安定性の話[*1]

柳田伸太郎 (理学部 A 館 441 号室)
yanagida [at] math.nagoya-u.ac.jp
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~yanagida/others-j.html

目次

[*1] 2020/01/14, ver. 0.5.

1 代数的ベクトル束の分類問題

この節の内容に関して, 手に入れ易い日本語の文献は [丸山 77]. また [向井 08, §3.3, §7.4] にも解説がある. 代数曲面上のベクトル束については [F98] が手ごろな入門書である. [OSS80] は射影空間上の話が中心だが, 様々な話題を扱っており, 例えばインスタントン・モジュライ空間の ADHM 構成の話も書いてある.

1.1 代数的ベクトル束の定義と基本的な性質

定義. $r \in \mathbb{Z}_{>0}$. スキーム X 上の階数 r の **(代数的) ベクトル束** V とは X 上のスキームであって, X の **Zariski 開被覆** $\{U_i\}$ が存在して, 各 U_i 上のスキームとして $V_{U_i} := V \times_X U_i \simeq U \times \mathbb{A}^r$ となるもののこと.

階数を rank で表すことにする.

補題. X 上のベクトル束 V のなす圏と X 上の局所自由 $\mathcal{O}_X$ 加群層 $\mathcal{F}$ のなす圏は圏同値. 対象の対応は

$$\mathcal{F}(V) : \Gamma(U, \mathcal{F}(V)) = \{\ V_U \to U \text{ の切断 }\} \text{ で定まる } \mathcal{O}_X \text{ 加群層}. \quad V(\mathcal{F}) := \operatorname{Spec}(\operatorname{Sym}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}^\vee)).$$

但し $\operatorname{Sym}_{\mathcal{O}_X}(-)$ は $\mathcal{O}_X$ 対称代数層, $\mathcal{F}^\vee := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$.

詳しい説明は, 例えば [LP97, Chap. 1] にある. 初出は Serre の双対性の論文 [Se55] らしい. 今後はこの二つを同一視する (層で考えることの方が多い).

以下, X は体 k 上の代数多様体とする.

階数 1 のベクトル束は直線束に他ならない. その全体 $\operatorname{Pic}(X)$ は $\mathcal{O}_X$ 加群層としてのテンソル積 $\mathcal{O}_X$ で可換群の構造をもつ. この群 $\operatorname{Pic}(X)$ を **Picard 群**と呼んだ. 直線束の分類問題は, Picard 群の構造の解析問題と同じものと言える.

直線束のことは完全に分かっているわけではない (と思います) が, 高階の場合に話を移す.

環上の射影加群に関する Bass-Serre 分解定理の特殊な場合として

命題 (Serre, [Se58])**.** X 上のベクトル束 $\mathcal{F}$ が $\operatorname{rank}\mathcal{F} > \dim X$ を満たすならば, $\mathcal{F}$ は直線束を部分ベクトル束に含む.

ここでベクトル束 $\mathcal{F}$ の**部分ベクトル束**とは, 局所自由な部分 $\mathcal{O}_X$ 加群層 $\mathcal{F}'$ であって $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$ もまた局所自由になるもののことであった.

この命題で特に X が非特異曲線の場合, 任意のベクトル束 $\mathcal{F}$ は部分ベクトル束の列 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_r \supset \cdots \mathcal{F}_1 \supset 0$, $r := \operatorname{rank}\mathcal{F}$ であって各 $\mathcal{F}_n/\mathcal{F}_{n-1}$ が直線束になるものを持つ. そこで次の副節では非特異曲線上の場合のベクトル束の記述を復習する.

1.2 射影直線及び楕円曲線上のベクトル束

引き続き体 k 上で考える.

種数が小さい非特異射影曲線 X の場合はベクトル束の完全な分類が知られている. まず射影直線の場合は

定理 (Grothendieck, [Gr57])**.** $X \simeq \mathbb{P}^1$ ならば X 上のベクトル束は直線束の直和に同型.

Grauert と Remmert による簡明な証明が [OSS80, Chap. 1 §2.1] に紹介されている.

$k = \mathbb{C}$ の場合は GAGA によって複素解析的なベクトル束の分類問題と等価であるが, その場合は行列値の正則関数の標準形の問題に帰着される. これは微分方程式の分野では G.D. Birkhoff の分解定理として知られている. [OSS80, Chap. 1 §2.4] によると, 行列関数の標準形の問題は Birkhoff 以前に Plemelj や Hilbert が解決している.

楕円曲線の場合を述べる前に, 表現論から用語を拝借しておく.

定義. スキーム X 上のベクトル束 $\mathcal{F}$ は非自明な直和分解を持たないとき**直既約** (indecomposable) という.

X が非特異曲線の場合に戻る. $(r, d) \in \mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}$ に対し, 階数 r, 次数 d の X 上の直既約ベクトル束の同型類の集合を $\mathrm{V}(r, d)$ と書く. ベクトル束 $\mathcal{F}$ に対しその行列式直線束 (determinant line bundle) $\det \mathcal{F} := \wedge^{\operatorname{rank} \mathcal{F}} \mathcal{F}$ をとるという操作で次の写像が定まる.

$$\mathrm{V}(r, d) \xrightarrow{\det} \mathrm{V}(1, d), \quad \mathcal{F} \longmapsto \det \mathcal{F}. \tag{1.2.1}$$

では楕円曲線の場合の Atiyah の分類定理を述べよう. 楕円曲線は代数群であるが, その群構造を $+$ と書くことにする. それから $n \in \mathbb{Z}$ に対して n 倍写像 $[n] \in \mathrm{Aut}(X)$ が自然に定まる. $n > 0$ なら

$$[n] : X \longrightarrow X, \quad x \longmapsto nx := x + \cdots + x.$$

定理 1.2.1 (Atiyah, [A57])**.** X が楕円曲線の場合, 任意の $(r, d) \in \mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}$ に対して同型 $i(r, d) : \mathcal{F}(r, d) \xrightarrow{\sim} X$ がある. 更にこれらの同型は次の可換図式をなす.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{V}(r,d) \arrow[r, "\det"] \arrow[d, "i(r,d)"'] & \mathrm{V}(1,d) \arrow[d, "i(1,d)"] \\ X \arrow[r, "{[\gcd(r,d)]}"'] & X \end{tikzcd}$$

同型 $i(r, d)$ は, 現在では **Fourier 向井変換**として理解する方が簡単である. §4.4.2 で解説する.

$\gcd(r, d) = 1$ の場合は, $\mathrm{V}(r, d)$ の元, つまり直既約ベクトル束 $\mathcal{F}$ は**半等質ベクトル束** (semi-homogeneous vector bundle) というものになっている. これは, 楕円曲線の有限全射 (isogeny) $\pi : Y \to X$ と Y 上の直線束 $\mathcal{L}$ が存在して, $\mathcal{F} \simeq \pi_* \mathcal{L}$ と書けるもののことである. より一般の半等質層について §4.4.3 で解説する.

1.3 モジュライ函手と精密モジュライ, 特に Quot スキーム

この節の内容の詳しい解説は [FAG, Chap. 5] にある.

モジュライ理論をスキーム論的に扱うには表現可能函手を考えればよい, というのが Grothendieck のアイデアであった.

定義. $F : (\mathrm{Sch}/S)^{\mathrm{op}} \to (\mathrm{Sets})$ をスキーム S 上のスキームのなす圏 (Sch/S) から集合の圏 (Sets) への反変函手とする. $X \in (\mathrm{Sch}/S)$ が F を**表現する**とは, 函手として $F \simeq \mathrm{Hom}_S(-, X)$ となることをいう. このとき X を F の**精密モジュライ** (fine moduli scheme) という.

この定義では F は (Sch/S) からの函手としたが, 実際にモジュライ空間が存在するためには (Sch/S) に適切な条件を課して制限する必要がある. 実際, 次に説明する Quot 函手は Noether スキーム S 上の局所 Noether スキームのなす圏 $(\mathrm{Sch}^{\text{loc. noeth.}}/S)$ からの函手として定義される.

精密モジュライ空間の雛形は Grassmann 多様体である．与えられた線形空間に対し，その商空間全体のなす代数多様体が Grassmann 多様体であった．それの拡張として，Grothendieck は次のような函手の表現可能性を考えた．

定理 (Grothendieck)**.** S を Noether スキーム，$p : X \to S$ を射影的射，$\mathcal{F}$ を X 上の連接 $\mathcal{O}_X$ 加群層とする．函手 $\underline{\mathrm{Quot}}_{\mathcal{F}/X/S} : (\mathrm{Sch}^{\text{loc. noeth.}}/S) \to (\mathrm{Sets})$ を

$$\underline{\mathrm{Quot}}_{\mathcal{F}/X/S}(T) := \{\mathcal{G} \mid T \text{ 上平坦な } \mathcal{F}_T \text{ の商連接層 }\}$$

と定めると，これは S 上射影的なスキーム $\mathrm{Quot}_{\mathcal{F}/X/S}$ で表現可能である．函手 $\underline{\mathrm{Quot}}_{\mathcal{F}/X/S}$ を **Quot 函手**，射影的スキーム $\mathrm{Quot}_{\mathcal{F}/X/S}$ を **Quot スキーム**と呼ぶ．

Grassmann 多様体の場合，線形空間 V の部分空間であって次元が k のものを $\mathrm{Gr}(k, V)$ と書く．Quot スキームでも指定された不変量を持つ商層のみを考える．不変量としては Hilbert 多項式を考える．

Hilbert 多項式の定義を思い出しておこう．まず体 k 上の有限型スキーム X の場合を考える．$\mathcal{L}$ を X 上の直線束とし，$\mathcal{F}$ は X 上の連接層であって台が k 上固有なものとする．このとき $h(t) \in \mathbb{Q}[t]$ であって，任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して

$$h(n) = \chi(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}) := \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim_k H^i(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$$

となるものが一意に存在する．この h を $\mathcal{F}$ の $\mathcal{L}$ に関する Hilbert 多項式と呼ぶ．

相対的な場合は，$X \to S$ を有限型射，$\mathcal{L}$ を X 上の直線束，$\mathcal{F}$ を X 上の連接層であってスキーム論的台が S 上固有なものとする．すると各 $s \in S$ に対し，ファイバー X_s への制限を考えることで，$\mathcal{F}|_{X_s}$ の $\mathcal{L}|_{X_s}$ に関する Hilbert 多項式 h_s が定まる．$\mathcal{F}$ が S 上平坦であれば，関数 $s \mapsto h_s$ は局所的に一定である．この一定の関数 h を，$\mathcal{F}$ の $\mathcal{L}$ に関する相対的 Hilbert 多項式と呼ぶことにする．

定理 (Grothendieck)**.** 前の定理と同じ仮定のもと，$\mathcal{O}_X(1)$ を p に関して相対的に非常に豊富な X 上の直線束とする．多項式 $h(t) \in \mathbb{Q}[t]$ に対し，函手 $\underline{\mathrm{Quot}}^h_{\mathcal{F}/X/S}$ を

$$\underline{\mathrm{Quot}}^h_{\mathcal{F}/X/S}(T) := \left\{ \mathcal{G} \;\middle|\; \begin{array}{l} T \text{ 上平坦な } \mathcal{F}_T \text{ の商連接層 } \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{G} \text{ であって，} \\ X_T \to T \text{ における } \mathcal{O}_X(1) \text{ に関する相対的 Hilbert 多項式が } P \end{array} \right\}$$

と定めると，この函手も S 上射影的なスキーム $\mathrm{Quot}^h_{\mathcal{F}/X/S}$ で表現可能である．そして $\mathrm{Quot}_{\mathcal{F}/X/S} = \coprod_{h(t) \in \mathbb{Q}[t]} \mathrm{Quot}^h_{\mathcal{F}/X/S}$ となる．

射影的スキームということは豊富な直線束がある訳だが，それは Grassmann 多様体の普遍束の類似で，行列式束を考えることで構成できる．この直線束を Quot スキームの**普遍 (直線) 束** (universal line bundle または tautological line bundle) という．

$\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ としたものは $\mathrm{Hilb}^h_{X/S} := \mathrm{Quot}^h_{\mathcal{O}_X/X/S}$ と書かれ，特に $S = \mathrm{Spec}(k)$ の場合は Hilb^h_X と略記される．これらが **Hilbert スキーム**である．

この他の精密モジュライ空間の例として，直線束のモジュライ空間である **Picard スキーム**がある．

しかし，スキームで表現可能なモジュライ函手の例は比較的少ない (Quot スキームとその組み合わせで色々と作ることはできるが...)．次の副節ではその解決法を紹介する．

1.4 ベクトル束ないし層のモジュライ問題

前副節では精密モジュライである Quot スキームや Hilbert スキームを紹介したが, この節の主題であるベクトル束のモジュライ問題については, 次のような障害がある.

補題. 代数多様体 X 上のベクトル束全体, または連接 $\mathcal{O}_X$ 加群層全体をパラメトライズするような精密モジュライ空間は, 一般には (スキームとしては) 存在しない.

これは, もしそのようなスキームが存在するなら, パラメトライズされる元 $\mathcal{F}$ について $\dim \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ が一定でなければならないからである.

ベクトル束のモジュライ空間を精密モジュライ空間として作ることは諦める必要がある. 他の問題として, (あるクラスの) 代数多様体全体も精密モジュライ空間を持たない. このような問題について解決法を与えたのが Mumford による次の概念である.

定義. $X \in (\mathrm{Sch}/S)$ が F の**疎モジュライ** (coarse moduli scheme) であるとは, 函手の射 $f : F \to \mathrm{Hom}_S(-, X)$ が存在して

(i) 任意の幾何学的点 $\mathrm{Spec}(K) \to S$ に対し $f(\mathrm{Spec}(K))$ は全単射.

(ii) $Y \in (\mathrm{Sch}/S)$ と函手の射 $g : F \to \mathrm{Hom}_S(-, Y)$ が存在すれば, S 上の射 $\varphi : X \to Y$ で $g = \mathrm{Hom}_S(-, \varphi) \circ f$ となるものが唯一存在する.

ベクトル束や連接層全体が疎モジュライ空間を持つか, というと残念ながらそうはいかない. というのも, 疎モジュライ空間についてもやはり $\dim \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ は一定でなければならないからである. そこで, ベクトル束全体ではなく, 適当な条件を満たすものを取らないといけない. この適当な条件というのが安定性条件である.

2 加群層の安定性

この節は [HL10, Part I] の内容の大雑把な説明である.

この節ではスキーム X 上の $\mathcal{O}_X$ 加群層のことを単に層と呼ぶ.

2.1 Gieseker-丸山-Simpson 安定性

次の副節でモジュライ空間の構成について説明するが, そこでの議論を明確にするために, 天下りだが連接層の安定性をこの副節で導入しておこう. ベクトル束だけ考えていると安定性の概念を導入しにくいので, ここからは一般の連接層も考える. そこで連接層に纏わる諸概念の復習から始める. 詳しくは [HL10, §1.1, §1.2] を参照せよ.

定義 2.1.1. Noether スキーム X 上の連接層 $\mathcal{F}$ に対し,

(1) $\mathcal{F}$ の**次元** $\dim \mathcal{F}$ を閉集合 $\mathrm{Supp}(\mathcal{F}) := \{x \in X \mid \mathcal{F}_x \neq 0\}$ の次元で定義する.

(2) $\mathcal{F}$ の **torsion filtration** $T_\bullet(\mathcal{F})$ を次のように定義する. $d := \dim(\mathcal{F})$ とし, 各 $i = 0, \ldots, d$ に対し $T_i(\mathcal{F})$ を $\mathcal{F}$ の部分層であって次元が i 以下となるもののうちで最大のものする. これで層の増大列が得られる.

$$0 \subseteq T_0(\mathcal{F}) \subseteq \cdots \subseteq T_d(\mathcal{F}) = \mathcal{F}.$$

X を整スキームとして, X 上の連接層 $\mathcal{F}$ が捩れの無い (torsion free) であることと $\dim(\mathcal{F}) = \dim X$ かつ $T_{\dim X-1}(\mathcal{F}) = 0$ であることは同値であることに注意する.

次に §1.3 で扱った Hilbert 多項式について復習する. 以下, 断らない限り X を体 k 上の射影的スキーム, $\mathcal{F}$ を X 上の連接層とする. また $\mathcal{O}_X(1)$ を X 上の豊富な直線束とし, $m \in \mathbb{Z}$ に対して $\mathcal{F}(m) := \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(m)$ と書く. そして $\mathcal{F}$ の Hilbert 多項式を $h(\mathcal{F}, t) \in \mathbb{Q}[t]$ と書く. つまり, $m \in \mathbb{Z}$ に対して

$$h(\mathcal{F}, m) \;=\; \chi(\mathcal{F}(m)).$$

この多項式は偏極 $\mathcal{O}_X(1)$ に依存する. それを明示したい時は, $\mathcal{O}_X(1) = \mathcal{O}_X(H)$ で対応する豊富な因子 H を用いて $h_H(\mathcal{F}, t)$ と書くことにする.

補題. $\mathcal{F}$ の Hilbert 多項式 $h(\mathcal{F}, t)$ について, $\alpha_i(\mathcal{F}) \in \mathbb{Z}$ $(i = 0, \ldots, \dim(\mathcal{F}))$ が存在して

$$h(\mathcal{F}, t) \;=\; \sum_{i=0}^{\dim(\mathcal{F})} \alpha_i(\mathcal{F}) \frac{t^i}{i!}.$$

更に $\mathcal{F} \neq 0$ なら $\alpha_{\dim(\mathcal{F})}(\mathcal{F}) > 0$.

特に $\alpha_{\dim X}(\mathcal{O}_X)$ は X の $\mathcal{O}_X(1)$ に関する次数に他ならない.

定義. $\dim(\mathcal{F}) = \dim X =: d$ の時, $\mathcal{F}$ の**階数** (rank) を次式で定義する.

$$\mathrm{rank}(\mathcal{F}) \;:=\; \frac{\alpha_d(E)}{\alpha_d(\mathcal{O}_X)}.$$

これはベクトル束の階数の拡張になっている.

定義. $\mathcal{F}$ の簡約 Hilbert 多項式 (reduced Hilbert polynomial) $p(\mathcal{F},t) \in \mathbb{Q}[t]$ を次式で定義する.

$$p(\mathcal{F},t) := \frac{h(\mathcal{F},t)}{\alpha_{\dim(\mathcal{F})}(\mathcal{F})}.$$

偏極 H への依存性を明示したい場合は $p_H(\mathcal{F},t)$ と書く.

曲線の場合に (簡約) Hilbert 多項式を Riemann-Roch を使って計算すると以下のようになる.

補題 2.1.2. $\dim X = 1$ で X が非特異射影曲線だとする. g_X を X の種数とする. Riemann-Roch から, X 上の連接層 $\mathcal{F}$ に対して

$$\chi(\mathcal{F}) = \int_X \mathrm{ch}(\mathcal{F})\mathrm{td}(X) = \int_X (\mathrm{rank}(\mathcal{F}) + c_1(\mathcal{F}))(1 + c_1(X)/2) = \deg(\mathcal{F}) + (1-g_X)\,\mathrm{rank}(\mathcal{F}).$$

但し $\deg(\mathcal{F})$ は $\mathcal{F}$ の**次数**. この計算から

$$h(\mathcal{F},t) = \mathrm{rank}(\mathcal{F})\deg X \cdot t + \deg(\mathcal{F}) + (1-g_X)\,\mathrm{rank}(\mathcal{F}),$$

$$p(\mathcal{F},t) = t + \frac{1-g_X}{\deg X} + \frac{\mu(E)}{\deg X}.$$

但し $\mu(\mathcal{F})$ は次式で定義される有理数で, 連接層 $\mathcal{F}$ の**スロープ** (slope) と呼ばれる.

$$\mu(\mathcal{F}) := \frac{\deg(\mathcal{F})}{\mathrm{rank}(\mathcal{F})}.$$

多項式の標準的な順序関係を安定性の定義で用いるので, 復習しておこう.

定義. $f(t), g(t) \in \mathbb{Q}[t]$ に対して, $m \gg 0$ なら $f(m) \le g(m)$ となるとき, $f \le g$ と定義する.

層の安定性は次のような概念である.

定義 (Simpson, [Si94])**.** X を体 k 上の射影的スキーム, $\mathcal{E}$ を X 上の連接層とする. また $\mathcal{O}_X(1) = \mathcal{O}_X(H)$ を X 上の豊富な直線束とする.

(1) $\mathcal{E}$ は以下の条件を満たすとき, H に関して **半安定** (semistable), または単に H 半安定, と呼ばれる.
  (i) 純 (pure) である, すなわち任意の真部分層 $0 \subsetneq \mathcal{F} \subsetneq \mathcal{E}$ について $\dim(\mathcal{F}) = \dim(\mathcal{E})$.
  (ii) 任意の真部分層 $0 \subsetneq \mathcal{F} \subsetneq \mathcal{E}$ に対して $p(\mathcal{F}) \le p(\mathcal{E})$.

(2) $\mathcal{E}$ は以下の条件を満たすとき, H に関して**安定** (stable), または単に H 安定, と呼ばれる.
  (i) 純である.
  (ii) 任意の真部分層 $0 \subsetneq \mathcal{F} \subsetneq \mathcal{F}$ に対して $p(\mathcal{F}) < p(\mathcal{E})$.

補題 2.1.2 で計算した非特異曲線の場合は次のように言い換えることができる.

補題 2.1.3. X を体 k 上の非特異射影曲線とし, $\mathcal{E}$ を X 上の連接層とする. この時, $\mathcal{E}$ が [半] 安定であることは以下と同値である.

(a) $\dim(\mathcal{E}) = 0$, または
(b) $\dim(\mathcal{E}) = 1$ かつベクトル束であって, 任意の真部分層 $0 \subsetneq \mathcal{F} \subsetneq \mathcal{E}$ に対して $\mu(\mathcal{F}) \underset{[=]}{<} \mu(\mathcal{E})$.

非特異射影曲線上のベクトル束の安定性は, 上の補題のようにスロープを使って記述できる. Mumford が導入したのがこの場合で, 以下では**スロープ安定性**と呼ぶことにする. なお竹本 [T72] は一般次元の多様体上のスロープ安定性を定義し, 特に曲面上のスロープ安定層を議論した.

非特異射影曲面の場合は §2.3 で論じる.

2.2 GIT によるモジュライの構成

前節 §1.3 のモジュライ函手の設定を思い出そう. S は局所 Noether スキーム, $f : X \to S$ は射影的射, $\mathcal{O}_X(1)$ は f に関して相対的に非常に豊富な直線束とする. 以下 $\mathcal{O}_X(1)$ によるテンソルを $\mathcal{F}(n) := \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{O}_X(1))^{\otimes n}$ と略記する.

$\mathbf{P}$ を射影多様体上の連接層についてのある性質とする. 但し, ある体 k 上の多様体上の連接層 $\mathcal{F}$ が性質 $\mathbf{P}$ を持てば, k を含む代数閉体 K に対して $\mathcal{F} \otimes_k K$ も性質 $\mathbf{P}$ を持つものと仮定する.

$h \in \mathbb{Q}[t]$ とする. 反変函手 $M^{\mathbf{P}}(h) : (\mathrm{Sch}^{\text{loc. noeth.}}/S) \to (\mathrm{Sets})$ を次のように定義する.

$$M^{\mathbf{P}}(h)(T) := \left\{ \mathcal{F} \,\middle|\, \begin{array}{l} T \text{ 上平坦な連接 } \mathcal{O}_{X \times_S T} \text{ 加群層であって,} \\ T \text{ の任意の幾何学的点 } t \text{ について } \mathcal{F}_t \text{ が性質 } \mathbf{P} \text{ を持ち} \\ \chi(\mathcal{F}_t(n)) = h(n) \end{array} \right\} \Big/ \sim$$

但し $\mathcal{F} \sim \mathcal{F}'$ は, ある T 上の直線束 $\mathcal{L}$ があって $\mathcal{F} \simeq \mathcal{F}' \otimes_{\mathcal{O}_T} \mathcal{L}$ と定義する.

$\mathbf{P}$ に次の二条件を課す. これらは函手 $M^{\mathbf{P}}(h)$ が準射影的な疎モジュライ空間を持つことを期待して考え出されたものである.

定義. (1) 函手 $M^{\mathbf{P}}(h)$ が**有界** (bounded) であるとは, 次の集合が有界であることをいう.

$$\left\{ \mathcal{F} \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{ある幾何学的ファイバー } X_s \text{ 上の連接 } \mathcal{O}_{X_s} \text{ 加群層であって} \\ \text{性質 } \mathbf{P} \text{ を持ち } \chi(\mathcal{F}(n)) = h(n) \end{array} \right\} \Big/ \sim$$

但し X_s 上の $\mathcal{F}$ と $X_{s'}$ 上の $\mathcal{F}'$ について, $\mathcal{F} \sim \mathcal{F}'$ は, $k := k(s)$ と $k' := k(s')$ を含む代数閉体 K があって $\mathcal{F} \otimes_k K \simeq \mathcal{F}' \otimes_{k'} K$ と定義する.

(2) 函手 $M^{\mathbf{P}}(h)$ が開 (open) であるとは, 次の条件が成立することをいう: $X \times_S T$ 上の連接 $\mathcal{O}_{X \times_S T}$ 加群層 $\mathcal{F}$ をであって T 上平坦なものが任意に与えられたとすると, T の開部分スキーム U が存在して, 任意の代数閉体 K に対して

$$\{ t \in T(K) \mid F_t \text{ が性質 } \mathbf{P} \text{ を持つ} \} = U(K).$$

定理 2.2.1. K を代数閉体, $S := \mathrm{Spec}(K)$, X を K 上の非特異射影曲線とする. $\mathcal{O}_X(1) = \mathcal{O}_X(H)$ を X 上の非常に豊富な直線束とする. $\mathbf{P}$ を局所自由かつ H に関してスロープ安定と定義すると, 任意の $h(t) \in \mathbb{Q}[t]$ に対して函手 $M^{\mathbf{P}}(h)$ は有界かつ開.

さて, 一般的な状況に戻って, 以下 $\mathbf{P}$ は函手 $M^{\mathbf{P}}(h)$ が有界かつ開であるような性質とする. $h(t) \in \mathbb{Q}[t]$ も一つ取って固定しよう. $M^{\mathbf{P}}(h)$ が有界であることから, 次のような整数 m_0 が取れる.

補題. ある $m_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, S の任意の幾何学的点 s と $M^{\mathbf{P}}(h)(\mathrm{Spec}\, k(s))$ の任意の元 $\mathcal{F}$ および $m \geq m_0$ なる任意の $m_0 \in \mathbb{N}$ に対し,

- $\mathcal{F}(m)$ は大域切断で生成され,
- $i \in \mathbb{Z}_{>0}$ なら $H^i(X_s, \mathcal{F}(m)) = 0$.

$m \geq m_0$ となる整数 m を固定し, $N := h(m)$ とする. 補題の (2) から $N = \dim H^0(X_s, \mathcal{F}(m))$ なので,

$$V := K^N, \quad \mathcal{H} := V \otimes_K \mathcal{O}_X(-m)$$

とすれば, 補題の (1) と合わせて, 全射

$$\rho : \mathcal{H} \twoheadrightarrow \mathcal{F}$$

を得る．ここで §1.3 で扱った Quot スキームを思い出そう．$h'(t) \in \mathbb{Q}[t]$ を $h'(t) := h(t+m)$ で定義すると，

$$[\rho : \mathcal{H} \twoheadrightarrow \mathcal{F}] \in \widetilde{Q} := \mathrm{Quot}^{h'}_{\mathcal{H}/X/S}(\mathrm{Spec}\, k(s))$$

とみなせる．$\widetilde{Q}$ 上の普遍束を $\widetilde{\mathcal{V}}$ と書こう．$\widetilde{Q}$ には $\mathrm{GL}_N(S)$ が自然に作用し，$\widetilde{\mathcal{V}}$ は $\mathrm{GL}_N(S)$ 同変束である (ないし，$\mathrm{GL}_N(S)$ 線形化を持つ)．

さて函手 $M^{\mathbf{P}}(h)$ は開でもあった．従って，次のような開部分スキーム $U \subset \widetilde{Q}$ が存在する:

$$U(K) = \left\{ u \in \widetilde{Q}(K) \,\middle|\, \begin{array}{l} \mathcal{V}_u \text{ は性質 } \mathbf{P} \text{ を満たし} \\ \Gamma(\varphi \otimes k(u)) : \Gamma(X_u, V \otimes \mathcal{O}_{X_u} \to \Gamma(X_u, \widetilde{\mathcal{V}}_u) \text{ は同型で} \\ i \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ なら } H^i(X_u, \widetilde{\mathcal{V}}_u) = 0 \end{array} \right\}.$$

この状況で “$\mathbf{P}$ を満たすもののモジュライ空間” を作りたい訳だが，安直には “U を GL_N で割ったもの” がその候補になる．但し，割ったものがスキームにならないと困っていしまう．そこで幾何学的不変式論 (geometric invariant theory, GIT) が登場する．

まずスキームの群作用による商の概念の精密化である，幾何学的商 (geometric quotient) の定義を思い出そう．

定義 2.2.2. S 上のスキーム Z に S 上の群スキーム G が作用しているとする．S 上のスキームと射の組 $(Y, \phi : Y \to Z)$ が Z の G による**幾何学的商**であるとは，次の三条件が成立することをいう．

(i) φ は全射で，Y の任意の幾何学的点 y について，ファイバー Z_y は Z のある幾何学的点 z の G 軌道である．

(ii) $Z' \subset Z$ が G 不変な閉部分スキームならば，$\varphi(Z') \subset Y$ は閉．

(iii) $\mathcal{O}_Y = \varphi_*(\mathcal{O}_Z)^G$.

定義. S 上のスキーム Z に S 上の群スキーム G が作用しているとし，Z 上の豊富な直線束 $\mathcal{L}$ が G 同変である (ないし，G 線形化を持っている) と仮定する．S の幾何学的点 s 上の Z の幾何学的点 z について，

(1) $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ と $a \in \Gamma(Z_s, \mathcal{L}_s^{\otimes n})$ が存在して，z が $(Z_s)_a := \{u \in Z_s \mid a(u) \neq 0\}$ の幾何学的点であるとき，z は**半安定** (semistable) であるという．

(2) z が半安定かつ G_s の $(Z_s)_a$ への作用が閉かつ z の固定部分群が 0 次元であるとき，z は**安定** (stable) であるという．

特に G が簡約ならば，Z の開部分スキーム $Z^{\mathrm{ss}}, Z^{\mathrm{s}} \subset Z$ が存在して，任意の代数閉体 K について $Z^{\mathrm{ss}}(K) = \{z \in Z(K) \mid \text{半安定}\}$ および $Z^{\mathrm{s}}(K) = \{z \in Z(K) \mid \text{安定}\}$ となる．

以下，G の作用における元 $z \in Z$ の軌道を $O(z)$ と書き，その閉包を $\overline{O(z)}$ と書く．

定理. k は標数 0 の体，S は k 上有限型スキーム，Z は S 上の固有スキーム，G は S 上の簡約群スキームで Z に作用しているものとし，$\mathcal{L}$ は相対的に豊富で G 同変な Z 上の直線束とする．このとき，

(1) S 上の射影的スキーム Y と，Y への G の自明な作用に関する S 上の G 射 $\varphi : Z^{\mathrm{ss}} \to Y$ が存在して，次の (i') および定義 2.2.2 の (ii), (iii) を満たす．

(i') φ は全射かつ，Z の幾何学的点 z, z' について，$\overline{O(z)} \cap \overline{O(z')} = \emptyset$ と $\varphi(z) \neq \varphi(z')$ は同値．

(2) Y の開部分スキーム Y^{s} が存在して，$Z^{\mathrm{s}} = \varphi^{-1}(Y^{\mathrm{s}})$ かつ $(Y^s, \varphi|_{Z^{\mathrm{s}}})$ は Z^{s} の幾何学的商．

モジュライの構成に戻ろう．上の定理を適用するには，適当に $Z \subset \widetilde{Q}$ とその上の $G = \mathrm{GL}_N(S)$ 同変かつ相対的に豊富な直線束が必要になる．$\mathbf{P}$ が曲線上のベクトル束に対するスロープ半安定性ならば，そのよ

うな Z や $\mathcal{L}$ をものを取ることができる．この場合，補題 2.1.2 の計算から，$\mathcal{O}_X$ 加群層 $\mathcal{F}$ の Hilbert 多項式 $h_{\mathcal{F}}(t) \in \mathbb{Q}[t]$ は階数と次数の組 $(\operatorname{rank}\mathcal{F}, \deg_H \mathcal{F})$ で置き換えられる．

定理 2.2.3. k を標数 0 の代数閉体とする．X が k 上の非特異射影曲線，$(r,d) \in \mathbb{Z}^2$ とするとき，函手

$$M_X^{\mathrm{ss}}(r,d) : (\mathrm{Sch}^{\text{loc. noeth.}}/k) \longrightarrow (\mathrm{Sets}),$$
$$T \longmapsto \left\{ \mathcal{F} \;\middle|\; \begin{array}{l} T \text{ 上平坦な連接 } \mathcal{O}_{X\times_k T} \text{ 加群層であって，} \\ T \text{ の任意の幾何学的点 } t \text{ について } \mathcal{F}_t \text{ が半安定ベクトル束であり} \\ (\operatorname{rank}\mathcal{F}_t, \deg_H \mathcal{F}_t) = (r,d) \end{array} \right\} \Big/ \sim$$

は疎モジュライ空間 $\overline{\mathrm{M}}_X(r,d)$ を持つ．$\overline{\mathrm{M}}_X(r,d)$ は k 上射影的なスキームであり，更に開部分スキーム

$$\mathrm{M}_X(r,d) \subset \overline{\mathrm{M}}_X(r,d)$$

が存在して，その閉点は安定ベクトル束に対応する．

2.3 Gieseker-丸山安定性

前副節で扱った曲線上の層のモジュライ空間の存在定理 2.2.3 は，適切に条件を変えれば曲面上でも成立する．それが Gieseker と丸山の定理である．

この副節では，断らない限り，X を体 k 上の非特異射影曲面とする．$\mathcal{O}_X$ 加群層 $\mathcal{F}$ の**双対層** (dual sheaf) を

$$\mathcal{F}^\vee := \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$$

と書く．二重双対層 (double dual) $\mathcal{F}^{\vee\vee}$ への自然な射 $\theta_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^{\vee\vee}$ があることに注意する．

まず X 上の捩れの無い層について簡単に復習する．§2.1 の用語を思い出すと，層 $\mathcal{F}$ が捩れの無い層である $\iff$ $\mathcal{F}$ は pure かつ $\dim \mathcal{F} = 2$.

補題 2.3.1 ([HL10, Example 1.1.16]). X 上の捩れの無い層 $\mathcal{F}$ に対して，自然な射 $\theta_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^{\vee\vee}$ は短完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\theta_{\mathcal{F}}} \mathcal{F}^{\vee\vee} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0$$

を定める．また $\mathcal{F}^{\vee\vee}$ は局所自由であり，$\dim \mathcal{G} = 0$ となる．$\mathrm{Supp}(\mathcal{G})$ を**捩れの無い層 $\mathcal{F}$ の特異点** (singular points) と呼ぶ.

証明. [HL10, §1.1] により一般の状況での証明がある． □

次に曲線の場合の計算 (補題 2.1.2, 2.1.3) と同様の考察を曲面の場合で考えよう．

X を非特異射影曲面，$\mathcal{F}$ を X 上の連接層とする．$(r, c_1, c_2) := (\operatorname{rank}(\mathcal{F}), c_1(\mathcal{F}), c_2(\mathcal{F}))$ と略記する．Hirzebruch-Riemann-Roch から

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{F}) &= \int_X \mathrm{ch}(\mathcal{F})\mathrm{td}(X) = \int_X \Big(r + c_1 + \frac{c_1^2 - 2c_2}{2}\Big)\Big(1 + \frac{c_1(X)}{2} + \frac{c_1(X)^2 + c_2(X)}{12}\Big) \\ &= \frac{(c_1(X)^2) + c_2(X)}{12} r + \frac{(c_1, c_1(X))}{2} + \frac{(c_1^2) - 2c_2}{2}.\end{aligned}$$

特に $\chi(\mathcal{O}_X) = (c_1(X)^2 + c_2(X))/12$.

次に $\mathcal{O}_X(1) = \mathcal{O}_X(H)$ を豊富な因子 H に付随する直線束として, $\mathcal{F}(n) := \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n)$ の Euler 標数は, 上の計算から

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{F}(n)) &= \frac{r(H^2)}{2}n^2 + \Big((c_1, H) + \frac{r(c_1(X), H)}{2}\Big)n + \frac{(c_1(X)^2) + c_2(X)}{12}r + \frac{(c_1, c_1(X))}{2} + \frac{(c_1^2) - 2c_2}{2}, \\ p_H(\mathcal{F}, t) &= t^2 + \frac{2}{(H^2)}\Big(\frac{(c_1(X), H)}{2} + (\mu(\mathcal{F}), H)\Big)t + \frac{2}{(H^2)}\frac{\chi(\mathcal{F})}{r}. \end{aligned}$$

但し $\mu(\mathcal{F}) \in H^2(X, \mathbb{Q})$ は次式で定義される $\mathcal{F}$ **のスロープ**である.

$$\mu(\mathcal{F}) := \frac{c_1(\mathcal{F})}{\mathrm{rank}(\mathcal{F})}.$$

この計算から次の主張を得る.

補題 2.3.2. 非特異射影曲面 (X, H) 上の捩れの無い層 $\mathcal{E}$ に対し, $\mathcal{E}$ が H に関して [半] 安定であることと, 任意の真部分層 $0 \subsetneq \mathcal{F} \subsetneq \mathcal{E}$ に対して以下が成立することは同値.

$$(\mu(\mathcal{F}), H) < (\mu(\mathcal{E}), H), \quad \text{または} \quad (\mu(\mathcal{F}), H) = (\mu(\mathcal{E}), H) \text{ かつ } \frac{\chi(\mathcal{F})}{\mathrm{rank}(\mathcal{F})} \underset{[=]}{<} \frac{\chi(\mathcal{E})}{\mathrm{rank}(\mathcal{E})}.$$

曲面上の層の安定性はこの形で導入された. これを **Gieseker-丸山安定性**という. そしてこの安定性条件に対して, 定理 2.2.3 と同様のモジュライの存在定理が証明されている.

後で用いるためにモジュライ空間の記号だけ用意しておこう. X を非特異射影曲面, H をその上の豊富な因子とする. Hilbert 多項式 $h \in \mathbb{Q}[t]$ を定めると半安定層のモジュライ空間 $\mathrm{M}_X^{\mathrm{ss}}(h)$ が定まった. 今考えているのは曲面なので, h を指定することと Chern 類 (r, c_1, c_2) を指定することは同値なので,

定義 2.3.3. $(r, c_1, c_2) \in \mathbb{Z}^3$ に対し, それを Chern 類に持つような H 安定層のモジュライ空間を $\mathrm{M}_H(r, c_1, c_2)$ と書く. X を強調したい時は $\mathrm{M}_{X,H}(r, c_1, c_2)$ と書く. また半安定層のモジュライ空間を $\overline{\mathrm{M}}_H(r, c_1, c_2)$ と書く.

2.4 Harder-Narasimhan フィルトレーションと Jordan-Hölder フィルトレーション

今までは (半) 安定な層のみに注目して考えてきたが, ここでは一般の連接層と半安定層, 及び半安定層と安定層の関係を説明する.

この副節では X を体 K 上の射影スキームとし, X 上の豊富な直線束 $\mathcal{O}_X(1) = \mathcal{O}_X(H)$ を固定する.

定理. $\mathcal{E}$ を X 上の純 d 次元の連接層とする. 部分層からなる有限長の増大列

$$0 = \mathrm{HN}_0(\mathcal{E}) \subsetneq \mathrm{HN}_1(\mathcal{E}) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathrm{HN}_\ell(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$$

であって, 各商層 $\mathrm{gr}_i^{\mathrm{HN}}(\mathcal{E}) ;= \mathrm{HN}_i(\mathcal{E}) / \mathrm{HN}_{i-1}(\mathcal{E})$ が d 次元の半安定層であり, 更にその簡約 Hilbert 多項式 $p_i := p_H(\mathrm{gr}_i^{\mathrm{HN}}(\mathcal{E}))$ が

$$p_1 > \cdots > p_\ell$$

を満たすものが一意に存在する. この増大列 $\mathrm{HN}_\bullet$ を $\mathcal{E}$ の **Harder-Narasimhan** フィルトレーションと呼ぶ.

証明. [HL10, Theorem 1.3.4] を参照せよ. □

この主張は, もともとは曲線上の場合のスロープ安定性に対して Harder と Narasimhan が証明した (Math. Ann., 1975). その後曲面上の場合の Gieseker-丸山安定性に対して丸山 (Nagoya J. Math., 1980) や Shatz (Comp. math., 1977) が証明した.

Harder-Narasimhan フィルトレーションは連接層を半安定層に分解するものであった. 半安定層を安定層に分解するのが次に述べる Jordan-Hölder フィルトレーションである.

定理. $\mathcal{E}$ を d 次元半安定層とする. 部分層からなる有限列

$$0 = \mathcal{E}_0 \subsetneq \mathcal{E}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{E}_\ell = \mathcal{E}$$

であって, 各商層 $\mathrm{gr}_i(\mathcal{E}) = \mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}$ が安定で, かつ簡約 Hilbert 多項式について $p_H(\mathrm{gr}_i(\mathcal{E})) = p_H(\mathcal{E})$ となるものが存在する. 更に $\mathrm{gr}(\mathcal{E}) = \oplus_i \mathrm{gr}_i(\mathcal{E})$ はそのような列の取り方に依存しない. この列を半安定層 $\mathcal{E}$ の **Jordan-Hölder フィルトレーション**と呼ぶ.

証明. [HL10, Proposition 1.5.2] を参照せよ. □

よく使われる用語を紹介しておく.

定義. 半安定層 $\mathcal{E}_1$ と $\mathcal{E}_2$ が **S 同値**[*2]であるとは, $p(\mathcal{E}_1) = p(\mathcal{E}_2)$ かつ $\mathrm{gr}(\mathcal{E}_1) \simeq \mathrm{gr}(\mathcal{E}_2)$ となることをいう.

半安定層のモジュライ空間は, 半安定層の S 同値類をパラメトライズしているスキームである.

2.5 モジュライの期待次元

これまではモジュライ空間の存在問題を扱ってきた. ここで少しだけモジュライ空間の性質を解説することにする.

まず局所的な性質と次元の評価について述べる. 詳しくは [HL10, §4.5] を参照せよ.

最初に紹介する主張は, **モジュライ空間は局所的には変形問題を記述している**, というものである.

定義. 体 k 上の射影スキーム上の層 $\mathcal{F}$ に対し, その**変形函手** (deformation functor) $D_{\mathcal{F}}$ を次で定義する.

$$D_{\mathcal{F}} : (\mathsf{Artin}/k) \longrightarrow (\mathrm{Sets}), \quad D_{\mathcal{F}}(A) := \left\{ (\mathcal{F}_A, \varphi) \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathcal{F}_{\mathsf{A}} : \mathrm{Spec}(A) \text{ 上平坦な } X_A \text{ 上の連接層} \\ \varphi : \mathcal{F}_A \otimes_A k \xrightarrow{\sim} \mathcal{F} : \quad \mathcal{O}_X \text{ 加群層の同型} \end{array} \right\} \Big/ \sim .$$

ここで (Artin/k) は k 上の Artin 環のなす圏.

定理. X を体上の射影スキームとする. $\mathcal{F}$ を X 上の安定層とし, 疎モジュライ空間 (存在すると仮定して) の対応する点を $[\mathcal{F}] \in \mathrm{M}$ と書く. このとき局所環の完備化 $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathrm{M},[\mathcal{F}]}$ は変形函手 $D_{\mathcal{F}}$ を副表現 (pro-represent) する.

証明. [HL10, Theorem 4.5.1] を参照せよ. □

変形理論に関する標準的な議論を思い出そう.

補題. 上と同じ仮定のもと, $[\mathcal{F}] \in \mathrm{M}$ の Zariski 接空間には次のような canonical な同一視がある.

$$T_{[\mathcal{F}]}\,\mathrm{M} \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{F})$$

[*2] Seshadri が [Ses67] で導入した strongly equivalence に由来しています.

証明. Artin 環 $A_\varepsilon := k[\varepsilon]/\varepsilon^2$ を考える. Zariski 接空間とモジュライ空間の定義から

$$T_{[\mathcal{F}]}\,\mathrm{M} \simeq \{\mathcal{E} \in \mathsf{Coh}(X_{A_\varepsilon}) \mid A_\varepsilon \text{ 上平坦で } \mathcal{E}|_{X_0} \simeq \mathcal{F}\}/\sim.$$

この右辺の元 $\mathcal{E}$ を取ると, 短完全列

$$0 \longrightarrow \varepsilon\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}|_{X_0} \simeq \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

が定まり, $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{F},\mathcal{F})$ の元が得られる. 議論を逆に読むことで, 写像 $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{F},\mathcal{F}) \to T_{[\mathcal{F}]}\,\mathrm{M}$ も得られる. □

次の主張も標準的で, 例えば Čech コホモロジーを取れば示せる.

補題. もし $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{F}) = 0$ なら M は $[\mathcal{F}]$ で非特異.

変形函手 $D_{\mathcal{F}}$ に (森, Ann. Math., 1979) の障害の議論を適用することで, 次の主張が得られる.

命題. 次の次元評価が成立する.

$$\dim \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{F}) \;\geq\; \dim_{[\mathcal{F}]} \mathrm{M} \;\geq\; \dim \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{F}) - \dim \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{F}).$$

もし更に X が非特異なら, この評価を改善することができる. まずモジュライ空間 M から X の Picard スキームへの写像

$$\det : M \longrightarrow \mathrm{Pic}(X), [\mathcal{F}] \longmapsto \det\mathcal{F}$$

があることに注意する. ここで $\det\mathcal{F}$ は連接層 $\mathcal{F}$ の行列式直線束. 局所自由層の場合は §1.2 の (1.2.1) で言及したが, 体上の非特異射影スキーム上の連接層の場合は, $\mathcal{F}$ の有限長の局所自由分解 $\mathcal{F}^\bullet \to \mathcal{F}$ を取って $\det\mathcal{F} := \otimes_n(\det\mathcal{F}^n)^{(-1)^n}$ で well-defined になる.

次にトレース写像について述べる. 局所自由層 $\mathcal{F}$ に対してトレース写像 $\mathrm{tr} : \mathcal{E}nd(\mathcal{F}) = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{F}) \to \mathcal{O}_X$ を, 局所自明化をとって行列のトレースを取ることで定義できる. これはコホモロジーに写像

$$\mathrm{tr}^i : \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{F}) = H^i(\mathcal{E}nd(\mathcal{F})) \longrightarrow H^i(\mathcal{O}_X)$$

を誘導する. これもトレース写像と呼ぶ. X が非特異射影多様体なら, 任意の連接層 $\mathcal{F}$ に対して tr を次のように定義する: $\mathcal{F}$ の局所自由分解 $\mathcal{F}^\bullet \to \mathcal{F}$ を取って, 合成 $\mathcal{E}nd(\mathcal{F}) = \mathcal{E}nd(\mathcal{F}^\bullet,\mathcal{F}^\bullet) \twoheadrightarrow \oplus_n \mathcal{E}nd(\mathcal{F}^n,\mathcal{F}^n) \xrightarrow{\oplus_n \mathrm{tr}|_{\mathcal{F}^n}} \mathcal{O}_X$ を tr の定義とする. このコホモロジーを取って $\mathrm{tr}^i : \mathrm{Ext}^i(\mathcal{F},\mathcal{F}) \to H^i(\mathcal{O}_X)$ の定義とする. こうして定義した tr^i の核を次のように書く.

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{F})_0 \;:=\; \mathrm{Ker}\left(\mathrm{tr}^i : \mathrm{Ext}^i(\mathcal{F},\mathcal{F}) \longrightarrow H^i(\mathcal{O}_X)\right).$$

定理. X は体上の非特異射影多様体とし, $\mathcal{F}$ を X 上の安定層で $\mathrm{rank}(\mathcal{F}) > 0$ のものとする. $\mathcal{Q} := \det\mathcal{F} \in \mathrm{Pic}(X)$ とし, $[\mathcal{Q}] \in \mathrm{Pic}(X)$ での射 $\det : \mathrm{M} \to \mathrm{Pic}(X)$ のファイバーを $M(\mathcal{Q})$ と書く. すると

$$T_{[\mathcal{F}]}\,\mathrm{M}(\mathcal{Q}) \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{F})_0.$$

もし $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{F},\mathcal{F})_0 = 0$ なら M と $\mathrm{M}(\mathcal{Q})$ は共に $[\mathcal{F}]$ で非特異で, 次の次元評価が成立する.

$$\dim \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{F})_0 \;\geq\; \dim_{[\mathcal{F}]} \mathrm{M}(\mathcal{Q}) \;\geq\; \dim \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{F})_0 - \dim \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{F})_0.$$

証明. [HL10, Theorem 4.5.4] を参照せよ. □

更に X の次元が低い場合は Riemann-Roch から具体的な次元評価の公式が得られる．例えば $\dim X = 1$ なら, 任意の連接層 $\mathcal{F}$ に対して $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{F},\mathcal{F}) = 0$ だから, 階数 r の安定層 $\mathcal{F}$ に対しては

$$\dim \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F},\mathcal{F})_0 \;=\; \chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{F},\mathcal{F}) = (r^2-1)(g-1).$$

つまり

補題. C を種数 $g \geq 2$ の非特異射影曲線とする．固定された行列式直線束を持つ C 上の階数 r の安定層のモジュライ空間は非特異で次元 $(r^2-1)(g-1)$ である．

曲面の場合は必ずしもモジュライ空間が非特異になるとは限らない．しかし, 次元の下からの評価がやはり Hirzebruch-Riemann-Roch から計算できる．$r := \mathrm{rank}(\mathcal{F})$ として

$$\dim \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{F})_0 - \dim \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{F})_0 \;=\; \chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{F},\mathcal{F}) \;=\; 2r\Delta(\mathcal{F}) - (r^2-1)\chi(\mathcal{O}_X).$$

但し $\Delta(\mathcal{F})$ は次で定義され, $\mathcal{F}$ の**判別式** (discriminant) と呼ばれる．

$$\Delta(\mathcal{F}) \;:=\; c_2(\mathcal{F}) - \frac{r-1}{2r} c_1(\mathcal{F})^2 \;\in \mathbb{Q}$$

定義. $2r\Delta(\mathcal{F}) - (r^2-1)\chi(\mathcal{O}_X)$ を $\mathrm{M}(\mathcal{Q})$ の**期待次元** (expected dimension) または仮想次元 (virtual dimension) と呼ぶ.

2.6 その他の話題

2.6.1 Bogomolov 不等式

曲面上の安定層のモジュライの次元評価で現れた判別式 $\Delta(\mathcal{F})$ は様々な性質を持つ．例えば, Hirzebruch-Riemann-Roch の帰結として,

$$\chi(\mathcal{E},\mathcal{F}) \;=\; \mathrm{rank}(\mathcal{F})\,\mathrm{rank}(\mathcal{F}) \left(P(\mu(\mathcal{F}) - \mu(\mathcal{E})) - \frac{\Delta(E)}{\mathrm{rank}(\mathcal{E})} - \frac{\Delta(F)}{\mathrm{rank}(\mathcal{F})} \right)$$

但し $P(x) := (x, x-K_X)/2 + \chi(\mathcal{O}_X)$ および $\mu(\mathcal{F}) := c_1(\mathcal{F})/\mathrm{rank}(\mathcal{F})$.

また, 曲線上の層のスロープ安定性は, 一般次元の多様体上の捩れの無い層にも拡張できることに注意しておく．実際, 豊富な因子 H に対して

$$\mu_H(\mathcal{F}) \;:=\; (\mu(\mathcal{F}), H) \;=\; \frac{(c_1(\mathcal{F}), H)}{\mathrm{rank}(\mathcal{F})}$$

を部分層と比較すればよい．詳しくは [HL10, §1] を参照せよ．

モジュライの次元評価と関連して, 次の **Bogomolov 不等式**が知られている．

定理. X を非特異射影曲面とし, H を X 上の豊富な因子とする．X 上の捩れの無い連接層 $\mathcal{F}$ がスロープ半安定であれば

$$\Delta(\mathcal{F}) \geq 0.$$

証明は, 例えば [HL10, §3.4] を参照せよ．

2.6.2 壁越え現象

不変量 $c \in H^*(X,\mathbb{Z})$ を与えれば安定層のモジュライ空間 $M_H(c)$ が (空かもしれないが) 定まる．この空間の H への依存性はどうなっているか, つまり豊富錘 (ample cone) $\mathrm{Amp}(X)$ 上での $M_H(c)$ の振る舞いを考えよう．

もし H に関する安定層 $\mathcal{E} \in M_{X,H}(c)$ が別の H では安定でないと仮定する．安定性は開条件であったから, $\mathrm{Amp}(X)_{\mathbb{R}}$ の中の線分 $\overline{HH'}$ 上で, H から出発してどこかで $\mathcal{E}$ が不安定になる点がある．$\mathcal{E}$ を動かすと, このような点は $\mathrm{Amp}(X)_{\mathbb{R}}$ の中の実余次元 1 の集合をなす．これを**壁**と呼ぶ．壁たちの補集合の連結成分を **chamber** と呼ぶ.

一つの chamber C の上ではモジュライ空間は不変である．そこで, C に属する偏極 H に関するモジュライ空間を $M_C(c)$ と書いたりする．二つの chamber C と C' が壁 W を挟んで接している場合, 双有理写像 $M_C(c) \dashrightarrow M_{C'}(c)$ があることが期待できる.

具体的な壁越えの様子については, Bridgeland 安定性の場合に §5.4 で説明する.

2.6.3 小林-Hitchin 対応

複素代数多様体上の連接層と対応する複素解析空間上の解析的連接層との間に GAGA があった．これまで扱ってきた安定性の概念は全く代数的に定義されたものだが, 実は解析的な概念との対応がある, というのが小林-Hitchin 対応である.

まず polystable という概念を導入しておく.

定義. 半安定層 $\mathcal{E}$ は安定層の直和であるとき **polystable** であると呼ばれる.

半安定層の S 同値類は polystable な層を一意に含むことに注意する.

スロープ安定性に関して polystable であることをスロープ polystable と呼ぶことにしよう.

以下の主張が小林-Hitchin 対応である.

定理 (Narasimhan-Seshadri, Donaldson, Uhlenbeck-Yau)**.** 複素射影代数多様体 $(X, \mathcal{O}_X(1))$ 上の代数的ベクトル束 $\mathcal{E}$ について, $\mathcal{E}$ がスロープ polystable であることと, 対応するコンパクト Káhler 多様体 X_{an} 上のベクトル束が Kähler 計量に関する Hermite-Einstein 計量を持つことは同値.

2.6.4 Abel 曲面及び K3 曲面の場合

この部分の参考文献は [吉岡 04, §5].

X を $\mathbb{C}$ 上の Abel 曲面あるいは K3 曲面とする.

$$H^{\mathrm{ev}}(X,\mathbb{Z})_{\mathrm{alg}} := H^0(X,\mathbb{Z}) \oplus \mathrm{NS}(X) \oplus H^4(X,\mathbb{Z}) \subset H^{\mathrm{ev}}(X,\mathbb{Z})$$

とその双線形型式

$$\langle x, y\rangle := \int_X (x_1 \cup y_1 - x_0 \cup y_2 - x_2 \cup y_0)$$

で格子 $(H^{\mathrm{ev}}(X,\mathbb{Z})_{\mathrm{alg}}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ が定まる．これを向井格子と呼ぼう．双曲格子を U と書くと, $(H^{\mathrm{ev}}(X,\mathbb{Z}), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ は X が Abel 曲面なら $U^{\oplus 4}$ と, K3 曲面なら $U^{\oplus 4} \oplus (-E_8)^{\oplus 2}$ と同型である．X 上の連接層 $\mathcal{F}$ に対し,

$$v(\mathcal{F}) := \mathrm{ch}(\mathcal{F})\sqrt{\mathrm{td}(X)} = \bigl(\mathrm{rank}(\mathcal{F}), c_1(\mathcal{F}), \varepsilon_X \,\mathrm{rank}(\mathcal{F}) + c_1(\mathcal{F})^2/2 - c_2(\mathcal{F})\bigr) \in H^{\mathrm{ev}}(X,\mathbb{Z})_{\mathrm{alg}},$$

$$\varepsilon_X = \chi(\mathcal{O}_X)/2 = \begin{cases} 0 & (X\text{: Abel 曲面}) \\ 1 & (X\text{: K3 曲面}) \end{cases}$$

と定める. これは向井ベクトルと呼ばれることがある. これを用いると, Hirzebruch-Riemann-Roch の定理は次のように言い換えられる. $\chi(\mathcal{E},\mathcal{F}) := \sum_{n=0}^{2}(-1)^n \dim \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ として

$$\chi(\mathcal{E},\mathcal{F}) = \langle v(\mathcal{E}), v(\mathcal{F})\rangle.$$

H を X 上の豊富な因子とする. 定義 2.3.3 で導入した記号 $\mathrm{M}_{X,H}(r,c_1,c_2)$ の代わりに, 指定された向井ベクトル $v \in \mathbb{Z}^3$ を持つ安定層のモジュライ空間を (X や s を省略して) $M_H(v)$ と書くことにする. 同様に半安定層のモジュライ空間を $\overline{M}_H(v)$ と書く.

定理 2.6.1 (向井, [M84])**.** (1) $M_H(v)$ は非特異でその次元は $\langle v^2\rangle + 2$.

(2) $M_H(v)$ は正則シンプレクティック構造を持つ.

v が原始的 (他のベクトルの整数倍ではない) なとき, H を v に関して generic にとれば $M_H(v)$ は射影的になる. 従って, この場合, 上の主張は $M_H(v)$ が (空でなければ) コンパクトな複素シンプレクティック多様体であることを意味する.

上の主張はモジュライ空間を局所的に調べることで得られる. 次に紹介する結果はより大域的な結果である. そのために一つ用語を用意する.

定義. $v = (r,\xi,a) \in H^{\mathrm{ev}}(X,\mathbb{Z})_{\mathrm{alg}}$ が正であるとは, $r > 0$, または $r = 0$ かつ ξ が正因子, または $r = 0$ かつ $\xi = 0$ かつ $a > 0$ となることを言う.

連接層 $\mathcal{F} \in \mathsf{Coh}(X)$ の向井ベクトル $v(\mathcal{F})$ は必ず正になることに注意する.

定理 2.6.2 (吉岡, [Y03])**.** (X,H) は今までと同じものとする. $v \in H^{\mathrm{ev}}(X,\mathbb{Z})_{\mathrm{alg}}$ は正である仮定し, $v = mv_0$, v_0 は原始的, とおく.

(1) 半安定層 $\mathcal{F}$ で $v(\mathcal{E}) = v$ となるものが存在する $\iff \langle v_0^2\rangle \geq -2\varepsilon_X$.

(2) $\langle v^2\rangle > 0$ のとき, H を v に関して generic にとれば $\overline{M}_H(v)$ は既約な正規射影多様体.

定理 2.6.3 (吉岡, [Y09])**.** Abel 曲面 X と正かつ原始的な v について, 次のような双有理写像が存在する.

$$M_H(v) \dashrightarrow X \times \mathrm{Hilb}^{\langle v^2\rangle/2}(X).$$

ここで $\mathrm{Hilb}^{\ell}(X)$ は X 上の ℓ 点の Hilbert スキームである. それは 2ℓ 次元の非特異射影スキームで, シンプレクティック構造を持つものであった. 定理 2.6.1 と整合的であることに注意する.

以上の二つの結果は Fourier 向井変換を用いて証明された. Fourier 向井変換は §4 で解説する.

2.6.5 正標数の場合

基礎体が正標数の場合の安定層のモジュライの構成は, 有界性が長らく問題であったが, Langer [L04] によって解決された.

2.6.6 モジュライ構成の別の方法

Álvarez-Cónsul と King は [AK07] において, Kronecker 箙の表現のモジュライを使った安定層のモジュライ空間の別構成を与えた. [HL10, §4.D] に解説がある. 箙の表現のモジュライについては §3.2 で説明する.

3 Abel 圏での安定性

今までは代数多様体上の連接層に対する安定性を考えてきたが, この節では, より一般の Abel 圏に対する安定性を簡単に説明する.

3.1 Rudakov の安定性

層の安定性の定義には “捩れの無い層” ないし “純 d 次元層” という条件が現れていた. これを外して, 連接層のなす Abel 圏 $\mathsf{Coh}(X)$ 上の安定性を導入したい, という動機をもとに, 一般の Abel 圏に対する安定性の概念を Rudakov が [R97] で導入した. この副節で, その Rudakov の理論を紹介する.

順序に関して一つ用語を用意する. 集合上の**擬順序**[*3] (preorder) $\preceq$ とは, 二項関係であって

(1) 任意の元 x に対して $x \preceq x$.

(2) 任意の元 x, y, z に対して $x \preceq y$ かつ $y \preceq z$ ならば $x \preceq z$.

を満たすもののことである. つまり半順序 (partial order) における反対称律が成立するとは限らないもののことである.

擬順序 $\preceq$ について, 以下の記号を用いることにする.

- $x \preceq y$ かつ $y \preceq x$ となるとき $x \asymp y$ と書く.
- $x \preceq y$ かつ $y \not\preceq x$ となるとき $x \prec y$ と書く.

次の定義が一般の Abel 圏に対する安定性の概念である.

定義. **Abel 圏 A 上の安定性条件**とは, 零対象以外の対象の集合 $\mathrm{Ob}(\mathsf{A}) \setminus \{0\}$ 上の擬順序 $\prec$ であって, 以下の二条件を満たすもののことを言う.

(1) 任意の対象 $F, G \in \mathrm{Ob}(\mathsf{A}) \setminus \{0\}$ に対し, $F \prec G$ または $G \prec F$ または $F \asymp G$ の何れかが成立する.

(2) $E, F, G \in \mathrm{Ob}(\mathsf{A}) \setminus \{0\}$ からなる任意の短完全列 $0 \to E \to F \to G \to 0$ に対し, 以下の三つの何れかが成立する.

(i) $E \prec F \iff E \prec G \iff F \prec G$.

(ii) $F \prec E \iff G \prec E \iff G \prec F$.

(iii) $E \asymp F \iff E \asymp G \iff F \asymp G$.

定義. Abel 圏 A 上の安定性条件 $\prec$ が与えられているとする. $F \in \mathrm{Ob}(\mathsf{A}) \setminus \{0\}$ が $\prec$ に関し**安定** [**半安定**] であるとは, 任意の真部分対象 $0 \subsetneq G \subsetneq F$ に対して $G \prec F$ [$G \preceq F$] となることをいう.

A に適切な条件を課せば Harder-Narasimhan フィルトレーションの存在も言える.

定義. A を Abel 圏とする.

(1) A が弱 Noether であるとは, 任意の対象 $F \in \mathrm{Ob}(\mathsf{A})$ について, その部分対象 F_n 達からなる昇鎖列

$$F_1 \subset F_2 \subset \cdots, \text{ s.t. } F_n \preceq F_{n+1} \ \forall n$$

が有限長で停止し, また部分対象 F_n 達からなる昇鎖列

$$F_1 \subset F_2 \subset \cdots, \text{ s.t. } F_{n+1} \preceq F_n \ \forall n$$

[*3] 数学辞典 3 版及び 4 版での訳語. 日本語版 Wikipedia では前順序.

も有限長で停止することを言う.

(2) A が弱 Artin であるとは, 任意の対象 $F \in \mathrm{Ob}(\mathsf{A})$ について, その部分対象 F_n 達からなる降鎖列

$$F_1 \supset F_2 \supset \cdots, \text{ s.t. } F_n \preceq F_{n+1} \; \forall n$$

が有限長で停止することを言う.

定理. Abel 圏 A が弱 Noether かつ弱 Artin だとし, 安定性条件 $\prec$ が与えられていると仮定する. この時任意の $F \in \mathrm{Ob}(\mathsf{A}) \setminus \{0\}$ に対し部分対象の有限列

$$0 = \mathrm{HN}_0(F) \subsetneq \mathrm{HN}_1(F) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathrm{HN}_\ell(F) = F$$

であって, 各商対象 $\mathrm{gr}_i^{\mathrm{HN}}(F) := \mathrm{HN}_i(F)/\mathrm{HN}_{i-1}(F)$ が半安定であり, 更に

$$\mathrm{gr}_1^{\mathrm{HN}}(F) \succ \cdots \succ \mathrm{gr}_\ell^{\mathrm{HN}}(F)$$

となるものが一意に存在する.

Rudakov は更に多項式安定性 (polynomial stability) という概念を導入して, 前節 §2 で述べた射影スキーム X 上の純な連接層の安定性は, Abel 圏 $\mathsf{Coh}(X)$ 上の多項式安定性の例であることを証明した.

また加法的関数の比によっても安定性が定義できることを示した. 少し詳しく述べると, Abel 圏 A の Grothendieck 群 $K(\mathsf{A})$ 上の加法的関数 $r, c : K(\mathsf{A}) \to \mathbb{R}$ に対して, それらの比 $\mu := c/r$ の関数としての順序関係で A 上の安定性条件が定義できることを示した. 記号から明らかなように, これはスロープ安定性の一般化になっている.

3.2 箙の表現のモジュライ空間

King は層のモジュライ空間の GIT 構成を参考に, 箙の表現に対する安定性を導入して, そのモジュライ空間の構成を行った [Ki]. Rudakov の仕事はこの話にも動機づけられているようである. そこで King の理論を簡単に解説しよう.

定義 (King)**.** A を Abel 圏とし, $\theta : K(\mathsf{A}) \to \mathbb{R}$ を A の Grothendieck 群 $K(\mathsf{A})$ からの加法的関数 (つまり群準同型) とする. また $M \in \mathrm{Ob}(A) \setminus \{0\}$ とする.

(1) M が θ **半安定**であるとは, $\theta(M) = 0$ かつ, 任意の部分対象 $N \subset M$ に対して $\theta(N) \geq 0$ となることをいう.

(2) M が θ **安定**であるとは, θ 半安定であって, かつ部分対象 $N \subset M$ で $\theta(N) = 0$ となるものは $N = M$ と $N = 0$ のみであることをいう.

King は半安定層のモジュライ空間の GIT 構成に基づいて, 上の定義の意味で θ 半安定な箙の表現のモジュライ空間を構成し, それを使って更に有限次元代数の半安定加群のモジュライ空間を構成した.

最後に Rudakov の加法的関数の比による安定性条件と King の安定性条件の関係を述べよう. 加法的関数 $r, c : K(\mathsf{A}) \to \mathbb{R}$ が与えられたとする. $M \in \mathrm{Ob}(\mathsf{A})$ に対し, 加法的関数 $\theta : K(\mathsf{A}) \to \mathbb{R}$ を

$$\theta := -c + \frac{c(M)}{r(M)} r$$

で定義する. 当然 $\theta(M) = 0$ である. このとき, M が θ 安定であることと, 比 $\mu := c/r$ に関して前副節の意味で安定であることは同値である.

4 Fourier 向井変換

次節で Bridgeland 安定性条件を議論する際, 導来圏や三角圏が必要になるので, その準備も兼ねて, この節では Fourier 向井変換について簡単に解説する.

この節の参考文献は [BBHR], [H06], [戸田 16].

4.1 導来圏

この副節の内容の詳しい説明は, 例えば [KS, Chap. 1] を参照せよ.

導来圏の定義を簡単に復習しよう．加法圏 A に対し, その対象からなる複体のなす加法圏を $\mathsf{Kom}(\mathsf{A})$ と書く．この記事ではコホモロジー的な添え字付け, つまり $\cdots \to A^n \xrightarrow{d_A^n} A^{n+1} \to \cdots$ を用いる．また複体 $A \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Kom}(\mathsf{A}))$ のシフト $A[1]$ は $A[1]^n := A^{n+1}$ で定まるものとする．

$\mathsf{Kom}(\mathsf{A})$ の射 $f, g : A \to B$ がホモトピー同値であるとは, $\{h^n : A^n \to B^{n-1} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ が存在して, $f^n - g^n = h^{n+1}d_A^n + d_B^{n-1}h^n$ となることをいう．この同値関係 $\sim$ で割って得られる加法圏を $\mathsf{K}(\mathsf{A})$ と書き, A の複体の**ホモトピー圏**と呼ぶ．つまり

$$\mathrm{Ob}(\mathsf{K}(\mathsf{A})) = \mathrm{Ob}(\mathsf{Kom}(\mathsf{A})), \quad \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathsf{A})}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{Kom}(\mathsf{A})}(A, B)/\sim.$$

ホモトピー圏 $\mathsf{K}(\mathsf{A})$ は三角圏の構造を持つ．まず $\mathsf{K}(\mathsf{A})$ の射 $f : A \to B$ に対し写像錐 (mapping cone) $M(f)$ を

$$M(f)^n := A^{n+1} \oplus B^n, \quad d^n := \begin{bmatrix} d_{A[1]}^n & 0 \\ f^{n+1} & d_B^n \end{bmatrix}$$

で定義する．すると図式 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\alpha(f)} M(f) \xrightarrow{\beta(f)} A[1]$ が定まる．$\mathsf{K}(\mathsf{A})$ においてこの図式と同型な図式 $A' \to B' \to C' \to A'[1]$ を特三角 (distinguished triangle) と呼ぶ．すると以下の**三角圏** (triangulated category) の公理が成り立つ．

(1) $\mathsf{K}(\mathsf{A})$ は加法圏であって, 自己同値 $[1] : \mathsf{K}(\mathsf{A}) \to \mathsf{K}(\mathsf{A})$ を持つ．

(2) 特三角たちは以下の公理を満たす．

- $A \xrightarrow{\mathrm{id}_A} A \to 0 \to A[1]$ は特三角．
- $\mathsf{K}(\mathsf{A})$ の任意の射 $f : A \to B$ は特三角 $A \xrightarrow{f} B \to C \to A[1]$ に埋め込める．
- $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} A[1]$ が特三角である $\iff$ $B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} A[1] \xrightarrow{-f[1]} B[1]$ が特三角である．
- 二つの特三角 $A \xrightarrow{f} B \to C \to A[1]$ と $A' \xrightarrow{f'} B' \to C' \to A'[1]$ および可換図式 $v \circ f = f' \circ u$ が与えられたとき．$w : C \to C'$ が存在して図式全体を可換にする．
- 八面体公理

導来圏はホモトピー圏を更に局所化して得られる．以下, A を Abel 圏とし, $\mathsf{K}(\mathsf{A})$ の対象 A のコホモロジーを $H^n(A)$ と書く．そして

$$N := \{A \in \mathrm{Ob}(\mathsf{K}(\mathsf{A})) \mid H^n(A) = 0 \ (\forall n \in \mathbb{Z})\},$$
$$S(N) := \{f : A \to B \mid \text{特三角 } A \xrightarrow{f} B \to C \to A[1] \text{ であって } C \in N \text{ となるものが存在 }\}$$

と定めると $S(N)$ は射の積閉集合 (multiplicative system) であって, 従って圏の局所化 [KS, §1.6] が可能である．局所化で得られる圏

$$\mathsf{D}(\mathsf{A}) := \mathsf{K}(\mathsf{A})/S(N)$$

は, $\mathsf{K}(\mathsf{A})$ の三角圏の構造が遺伝して, 三角圏の構造を持つ. これを Abel 圏 A の**導来圏**と呼ぶ.

以上に述べた構成で, $\mathsf{Kom}(\mathsf{A})$ を上に有界 [または下に有界, 両側有界] な複体のなす充満部分圏 $\mathsf{Kom}^-(\mathsf{A})$ [または $\mathsf{Kom}^+(\mathsf{A})$, $\mathsf{Kom}^b(\mathsf{A})$] に置き換えて得られるものを $\mathsf{D}^-(\mathsf{A})$ [または $\mathsf{D}^+(\mathsf{A})$, $\mathsf{D}^b(\mathsf{A})$] と書く.

導来圏には導来函手が定まる. 以降では通常の函手と導来函手を同じ記号で書くことにする. 例えば射 $f : X \to Y$ による引き戻し $f^* : \mathsf{Coh}(Y) \to \mathsf{Coh}(X)$ とその導来函手 $f^* : \mathsf{D}(Y) \to \mathsf{D}(X)$ を同じ f^* で書く.

4.2 代数多様体の導来圏

この副節の参考文献は [H06, Chap. 4], [川又 06].

こんにち非特異射影多様体 X の導来圏といったら, X 上の連接層のなす Abel 圏 $\mathsf{Coh}(X)$ に付随する有界導来圏 $\mathsf{D}^b(\mathsf{Coh}(X))$ のことをいうことが多い. 以下簡単のために, 次のように略記する.

$$\mathsf{D}(X) := \mathsf{D}^b(\mathsf{Coh}(X)).$$

X の不変量としての $\mathsf{D}(X)$ の性質のうち基本的なものを紹介しよう.

$\mathsf{D}(X)$ の前に, まず $\mathsf{Coh}(X)$ についての古典的結果を思い出すと

命題 (Gabriel)**.** X と Y が体 k 上の非特異射影多様体で $\mathsf{Coh}(X) \simeq \mathsf{Coh}(Y)$ なら, $X \simeq Y$.

証明. [H06, Corollary 5.24] に導来圏を使った証明がある. □

X の標準層を ω_X と書く. また直線束 $\mathcal{L}$ の位数, つまり $\mathcal{L}^{\otimes k} \simeq \mathcal{O}_X$ となる最小の $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ を $\operatorname{ord} \mathcal{L}$ と書く.

命題. X と Y が体 k 上の非特異射影多様体で $\mathsf{D}(X) \simeq \mathsf{D}(Y)$ なら, $\dim X = \dim Y$ かつ $\operatorname{ord} \omega_X = \operatorname{ord} \omega_Y$.

証明は [H06, Proposition 4.1] を参照せよ.

定理 4.2.1 (Bondal-Orlov, [BO01])**.** X と Y を体 k 上の非特異射影多様体とし, ω_X または ω_X^{-1} が豊富だとする. このとき, $\mathsf{D}(X) \simeq \mathsf{D}(Y)$ ならば $X \simeq Y$.

証明は [H06, Proposition 4.11] を参照せよ.

この結果から, $X \not\simeq Y$ かつ $\mathsf{D}(X) \simeq \mathsf{D}(Y)$ となるような状況は (弱い意味で) Calabi-Yau でないと起きえないことが分かる.

二次元以下の場合なら, 導来同値な非特異射影多様体の分類が殆ど完全にできている. まず一次元の場合は, 楕円曲線だけが問題であるが

命題. 楕円曲線 E と E' について $\mathsf{D}(E) \simeq \mathsf{D}(E') \iff E \simeq E'$.

証明は [H06, Corollary 5.46] を参照せよ.

二次元の場合は

命題. 非特異射影曲面 X と Y について, X が Abel 曲面でも K3 曲面でもなければ $\mathsf{D}(X) \simeq \mathsf{D}(Y) \iff X \simeq Y$.

また X が Abel 曲面なら, 導来同値な Y も Abel 曲面. K3 曲面についても同じことがいえる.

証明は [H06, Chap. 12] を参照せよ.

K3 曲面の場合が最も面白いが, ここでは扱わない. Abel 曲面の場合については §4.4.3 で結果のみ述べる.

これまでは代数多様体 X の不変量としての $\mathsf{D}(X)$ の性質をみたが, 少し立場を変えて, 三角圏としての $\mathsf{D}(X)$ の性質, 特に自己同値のなす群 $\mathrm{Aut}(\mathsf{D}(X))$ について考えよう. まず $\mathrm{Aut}(\mathsf{D}(X))$ は以下の三種類の部分群を持つに注意する.

- 複体のシフト $\mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}[1]$ の生成する加群 $\mathbb{Z}$.
- X の自己同型 f から定まる導来引き戻し f^* のなす群 $\mathrm{Aut}(X)$.
- X 上の直線束 $\mathcal{L}$ との導来テンソル積 $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} (-)$ が定める自己同値のなす群 $\mathrm{Pic}(X)$.

定理 4.2.1 は次のように言い換えられる.

命題 4.2.2. X を体上の非特異射影多様体であって $\omega_X^{\pm 1}$ が豊富なものとだとする. このとき

$$\mathrm{Aut}(\mathsf{D}(X)) \simeq \mathbb{Z} \times (\mathrm{Aut}(X) \ltimes \mathrm{Pic}(X)).$$

証明は [H06, Proposition 4.17] を参照せよ.

4.3 Fourier 向井変換

この副節の参考文献は [H06, Chap. 5].

前副節の最後に $\mathrm{Aut}(\mathsf{D}(X))$ を考えた. Calabi-Yau の場合も扱うには, 次の概念が必要になる.

定義. X と Y を体 k 上の非特異射影多様体とし, $q : X \times Y \twoheadrightarrow X$ と $p : X \times Y \twoheadrightarrow Y$ を射影とする. $\mathcal{K} \in \mathrm{Ob}(\mathsf{D}(X \times Y))$ の定める **Fourier 向井変換** $\Phi_{\mathcal{K}}$ とは, 以下の導来函手の合成 (積分函手) のことである.

$$\Phi_{\mathcal{K}} = \Phi_{\mathcal{K}}^{X \to Y} : \mathsf{D}(X) \longrightarrow \mathsf{D}(Y), \quad \mathcal{E} \longmapsto p_*(\mathcal{K} \otimes q^* \mathcal{E}).$$

前副節の最後に述べた三種類の $\mathrm{Aut}(\mathsf{D}(X))$ の自己同値は Fourier 向井変換を用いて実現できる.

- 対角線 $\Delta \subset X \times X$ について $\Phi_{\mathcal{O}_\Delta[n]} \simeq [n]$.
- 射 $f : Y \to X$ のグラフ $\Gamma(f) \subset X \times Y$ について $\Phi_{\mathcal{O}_{\Gamma(f)}} \simeq f^*$.
- $\mathcal{L}$ を X 上の直線束とする. $\iota : X \xrightarrow{\sim} \Delta \subset X \times X$ を対角埋め込みとすると $\Phi_{\iota_*(\mathcal{L})} \simeq \mathcal{L} \otimes (-)$.

$\mathrm{Aut}(\mathsf{D}(X))$ については次の結果が重要である.

定理 4.3.1 (Orlov, J. Math. Sci., 1997)**.** X と Y を体 k 上の非特異射影多様体とし, $F : \mathsf{D}(X) \to \mathsf{D}(Y)$ を圏同値とする. このとき $\mathcal{K} \in \mathrm{Ob}(\mathsf{D}(X \times Y))$ であって $F \simeq \Phi_{\mathcal{K}}$ となるものが同型を除いて一意に存在する.

川又 [K04] は orbifold の場合にこの主張を拡張して証明した.

後の都合のために, Fourier 向井変換が Grothendieck 群及びコホモロジー群に誘導する写像を記述しておこう. X, Y を上と同じものとする. X の Grothendieck 群を $K(X) := K(\mathsf{Coh}(X)) = K(\mathsf{D}(X))$ と書く. また導来圏からの写像を $[-] : \mathsf{D}(X) \to K(X)$ と書く. $f \in K(X \times Y)$ に対し準同型 Φ_f^K を

$$\Phi_\kappa^K : K(X) \longrightarrow K(Y), \quad \varepsilon \longmapsto p_!(\kappa \otimes q^*(\varepsilon))$$

と定める. 但し $p_! : K(X \times Y) \to K(X)$ は Grothendieck 群上の順像函手で, $\mathcal{F} \in \mathrm{Ob}(\mathsf{D}(X \times Y))$ の定める $[\mathcal{F}] \in K(X \times Y)$ に対しては $p_![\mathcal{F}] := \sum_n (-1)^n [R^n p_*(\mathcal{F})]$ と表せる.

またコホモロジー群については, $v \in H^*(X \times Y, \mathbb{Q})$ に対して以下のように Φ_v^H を定める.

$$\Phi_v^H : H^*(X, \mathbb{Q}) \longrightarrow H^*(Y, \mathbb{Q}), \quad e \longmapsto p_*(v.q^*(e)).$$

また $v : K(X) \to H^*(X, \mathbb{Q})$ を次で定める.

$$v(\varepsilon) := \mathrm{ch}(\varepsilon)\sqrt{\mathrm{td}(X)}.$$

命題 4.3.2. $\mathcal{K} \in \mathsf{D}(X \times Y)$ に対して $v(\mathcal{K}) := \mathrm{ch}(\mathcal{K})\sqrt{\mathrm{td}(X \times Y)}$ とすると, 次の図式は可換.

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{D}(X) \arrow[r, "\Phi_{\mathcal{K}}"] \arrow[d, "{[-]}"'] & \mathsf{D}(Y) \arrow[d, "{[-]}"] \\
K(X) \arrow[r, "\Phi^K_{[\mathcal{K}]}"] \arrow[d, "v"'] & K(Y) \arrow[d, "v"] \\
H^*(X, \mathbb{Q}) \arrow[r, "\Phi^H_{v(\mathcal{K})}"'] & H^*(Y, \mathbb{Q})
\end{tikzcd}$$

これは Grothendieck-Riemann-Roch の定理 $\mathrm{ch}(f_!(e)).\mathrm{td}(Y) = f_*(\mathrm{ch}(\varepsilon).\mathrm{td}(X))$ の帰結である. 詳しい証明は [H06, §5.2] を参照せよ

4.4 安定層のモジュライ空間への応用

Fourier 向井変換を用いて, Abel 曲面や K3 曲面上の安定層のモジュライ空間の解析をすることができる (吉岡の定理 2.6.2 の説明も参照せよ). 特にモジュライ空間の間の双有理写像を豊富に構成することができる[*4]. このことを特殊な場合に限って説明しよう. 簡単のため, この副節に現れるスキームは全て $\mathbb{C}$ 上のものとする (本質的に同じ結果が任意の体上で成立する).

4.4.1 Abel 多様体上の Fourier 向井変換

この部分の参考文献は [H06, Chap. 8].

後のために, 一般次元の Abel 多様体についていくつか記号を用意しておく.

定義. Abel 多様体 A の双対 Abel 多様体を $\widehat{A}$ と書く. $\widehat{\iota} : \widehat{A} \to \widehat{A}$ を加法の逆元とする. また $\widehat{A} \times A$ 上の **Poincaré 直線束**を $\mathcal{P}$ と書く.

双対多様体や Poincaré 束の定義を思い出しておこう. ここでは $\mathbb{C}$ 上の場合だけ述べる (一般の場合は, 例えば Mumford, Abelian variety の §13). 指数完全列 $0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O}_A \to \mathcal{O}_A^* \to 0$ から $\widehat{A} := H^1(A, \mathcal{O}_A)/H^1(A, \mathbb{Z})$ とする. $\widehat{A} \to \mathrm{Pic}(A) = H^1(A, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{c_1} H^2(A, \mathbb{Z})$ によって $\widehat{A} = \mathrm{Pic}^0(A)$ と同一視できる. 次に, $\mathcal{P}$ は精密モジュライ空間としての $\mathrm{Pic}^0(A)$ に付随した普遍束で, 以下の条件を満たすものであった.

- $\alpha \in \mathrm{Pic}^0(A)$ に A 上の直線束 $\mathcal{L}_\alpha$ が対応するとして, $\mathcal{P}|_{\{\alpha\} \times A} \simeq \mathcal{L}_\alpha$.
- $e \in A$ を加法の零元として, $\mathcal{P}|_{\widehat{A} \times \{e\}} \simeq \mathcal{O}_{\widehat{A}}$.

Poincaré 束を核函数とする Fourier 変換が, [M81] で導入されたオリジナルの Fourier 向井変換である.

定理 (向井, [M81])**.** 任意の Abel 多様体 A に対して, Poincaré 直線束 $\mathcal{P} \in \mathrm{Pic}(\widehat{A} \times A)$ に付随した Fourier 向井変換

$$\Phi_{\mathcal{P}}^{\widehat{A} \to A} : \mathsf{D}(\widehat{A}) \longrightarrow \mathsf{D}(A)$$

は圏同値を与える. 更に $\Phi_{\mathcal{P}}^{A \to \widehat{A}} \circ \Phi_{\mathcal{P}}^{\widehat{A} \to A} \simeq (\widehat{\iota})^*[-\dim A]$ となる.

[*4] 実は歴史的には逆で, 向井先生はモジュライ空間の解析を動機として Fourier 変換を導入した, という経緯があります.

更に $\widehat{A} \simeq A$, つまり A が主偏極 Abel 多様体の場合, $\Phi_{\mathcal{P}}^{\widehat{A}\to A} = \Phi_{\mathcal{P}}^{A\to A}$ と思えるわけだが, この場合は状況が著しく単純になる. 少々天下りだが, A 上の直線束 $\mathcal{L}$ に対し射 $\varphi_{\mathcal{L}} : A \to \widehat{A}$ を次で定める.

$$\varphi_{\mathcal{L}} : A \longrightarrow \widehat{A}, \quad a \longmapsto [t_a^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^*].$$

但し $t_a \in \mathrm{Aut}(A)$ は平行移動.

定理 4.4.1 (向井, [M81])**.** $(A, \mathcal{L})$ が g 次元の主偏極 Abel 多様体ならば,

$$\mathbf{S} := \Phi_{(\mathrm{id}\times\varphi_{\mathcal{L}})^*\mathcal{P}}, \quad \mathbf{T} := \mathcal{L} \otimes (-) : \mathsf{D}(A) \longrightarrow \mathsf{D}(A)$$

とすると $\mathbf{S}^4 \simeq [-2g]$, $(\mathbf{T} \circ S)^3 \simeq [-g]$.

この結果をもとに, Orlov は主偏極 Abel 多様体 $(A, \mathcal{L})$ の $\mathrm{Aut}(\mathsf{D}(A))$ の群構造を決定した. その説明のため, $\mathrm{Aut}(A \times \widehat{A})$ の元を $f = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{bmatrix}$ とブロック表示して, $\widetilde{f} := \begin{bmatrix} \widehat{f_4} & -\widehat{f_2} \\ \widehat{f_3} & \widehat{f_1} \end{bmatrix}$ と定め, 部分群 $U(A \times \widehat{A}) \subset \mathrm{Aut}(A \times \widehat{A})$ を次で定める.

$$U(A \times \widehat{A}) := \{f \in \mathrm{Aut}(A \times \widehat{A}) \mid \widetilde{f} = f^{-1}\}.$$

定理 4.4.2 (Orlov)**.** 次の群の完全可換図式がある.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \oplus (A \times \widehat{A}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & (A \times \widehat{A}) \rtimes \widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, hook, "j"] & \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, hook] & 1 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \oplus (A \times \widehat{A}) \arrow[r] & \mathrm{Aut}(\mathsf{D}(A)) \arrow[r] & U(A \times \widehat{A}) \arrow[r] & 1.
\end{tikzcd}$$

ここで $\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{Z})$ は

$$\widetilde{\mathrm{SL}}_2(\mathbb{Z}) = \langle S, T, t \mid S^2 = t^{2g}, (ST)^3 = t^g, st = ts, Tt = tT \rangle$$

で定まる $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の被覆で, 単射 j は以下で定まる.

$$S \longmapsto \mathbf{S}, \quad T \longmapsto \mathbf{T}, \quad t \longmapsto [-1].$$

4.4.2 楕円曲線の場合

この部分の参考文献は [BBHR, §3.5.1].

Fourier 向井変換は曲面上の安定層の研究に新展開をもたらしたが, まずはより簡単な曲線の場合に状況を見ることにする. 命題 4.2.2 より, 非自明な自己同値があるのは楕円曲線の場合のみである. そこで以下では C を楕円曲線としよう.

C の加法の零元を $x_0 \in C$ とし, $\mathcal{L} := \mathcal{O}_C(x_0)$ とする. $\mathcal{L}$ は C の主偏極を定める. 特に $\widehat{C} \simeq C$. 更に $\iota : C \to C$ を加法の逆元 $x \mapsto -x$, $\Gamma_\iota \subset C \times C$ をそのグラフとし, $p_i : C \times C \twoheadrightarrow C$ $(i = 1, 2)$ を射影とすると Poincaré 束 $\mathcal{P}$ は次のように書ける.

$$\mathcal{P} \simeq \mathcal{O}_{C\times C}(\Gamma_\iota) \otimes p_1^*\mathcal{O}_X(-x_0) \otimes p_2^*\mathcal{O}_X(-x_0).$$

以前と同様に, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の生成元に対応する Fourier 向井変換を次のように書く.

$$\mathbf{S} := \Phi_{(\mathrm{id}\times\varphi_{\mathcal{L}})^*\mathcal{P}}, \quad \mathbf{T} := \mathcal{L} \otimes (-) : \mathsf{D}(C) \longrightarrow \mathsf{D}(C).$$

楕円曲線はその双対と同型だから, 向井の定理 4.4.1 が適用できる. この場合は更に, Orlov の定理 4.4.2 が簡単になって,

定理 4.4.3. 定理 4.4.2 の j は同型. 特に次の完全列がある.

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus (C \times C) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathsf{D}(C)) \longrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow 1.$$

$\dim C = 1$ なので, コホモロジー的 Fourier 向井変換 $\Phi^H_{\mathcal{K}}$ を二次正方行列で表すことができる. つまり, $\mathcal{E} \in \mathsf{D}(C)$ に対し

$$v(\mathcal{E}) := \mathrm{ch}(\mathcal{E})\sqrt{\mathrm{td}(X)} = \mathrm{ch}(\mathcal{E}) = \begin{bmatrix} \mathrm{rank}(\mathcal{E}) \\ c_1(\mathcal{E}) \end{bmatrix}$$

と向井ベクトルを表示して, $\Phi^H_{\mathcal{K}}$ を行列表示する.

補題. $\mathbf{S}$ と $\mathbf{T}$ に対応したコホモロジー的 Fourier 向井変換を同じ記号で書く. それらの $H^*(C, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$ における行列表示は

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Fourier 向井変換は導来圏の変換, つまり複体を複体に変換するものである. 従って層は一般には複体に写ってしまう. しかし以下で紹介するように, 楕円曲線の場合, Fourier 向井変換 $\mathbf{S}$ は安定層を安定層に写す.

定義. 非特異射影多様体 X の導来同値 $\Phi \in \mathrm{Aut}(\mathsf{D}(X))$ を固定する. また $n \in \mathbb{Z}$ とする. $\mathcal{E} \in \mathsf{D}(X)$ が Φ に関して WIT_n を満たすとは, 層 $\mathcal{F} \in \mathsf{Coh}(X)$ が存在して $\Phi(\mathcal{E}) \simeq \mathcal{F}[-n]$ となることをいう. そしてこの時, $\mathcal{F}$ を $\mathcal{E}$ の変換と呼ぶ.

命題 4.4.4. $\mathcal{E}$ を楕円曲線 C 上の $\mathrm{ch}(E) = (r, d)$ の半安定層とする.

(1) $d < 0$ なら $\mathcal{E}$ は $\mathbf{S}$ に関して WIT_1 を満たし, 更に $\mathcal{E}$ の変換は半安定である.
(2) $d > 0$ なら $\mathcal{E}$ は $\mathbf{S}$ に関して WIT_0 を満たし, 更に $\mathcal{E}$ の変換は半安定である.
(3) $d = 0$ なら $\mathcal{E}$ は $\mathbf{S}$ に関して WIT_0 を満たし, その像は摩天楼層である.

$\mathsf{Coh}^{\mathrm{ss}}_{r,d}(C) \subset \mathsf{Coh}(C)$ を $\mathrm{ch}(E) = (r, d)$ の半安定層のなす部分層とし, $\mathsf{Sky}_d(C) := \mathsf{Coh}^{\mathrm{ss}}_{0,d}(C)$ とすると, 上の主張より $\mathbf{S}$ は圏同値

$$\mathsf{Coh}^{\mathrm{ss}}_{r,d}(C) \simeq \mathsf{Coh}^{\mathrm{ss}}_{d,-r}(C)\ (d > 0) \quad \mathsf{Coh}^{\mathrm{ss}}_{r,d}(C) \simeq \mathsf{Coh}^{\mathrm{ss}}_{-d,r}(C)\ (d < 0) \quad \mathsf{Coh}^{\mathrm{ss}}_{r,0}(C) \simeq \mathsf{Sky}_r(C)$$

を引き起こす. また, $\mathbf{T}$ は直線束のテンソル積だから, 当然安定性を保つので, 次の圏同値を引き起こす.

$$\mathsf{Coh}^{\mathrm{ss}}_{r,d}(C) \simeq \mathsf{Coh}^{\mathrm{ss}}_{r,r+d}(C).$$

$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の $\mathbb{Q}$ への作用とあわせて考えると, 次の主張が得られる.

定理. $r > 0$ または $r = 0, d > 0$ である $(r, d) \in \mathbb{Z}^2$ に対し, $g := \gcd(r, d)$ とすると

$$\mathsf{Coh}^{\mathrm{ss}}_{r,d}(C) \simeq \mathsf{Sky}_g(C).$$

また $\mathrm{Sym}^d(C) := C^d/\mathfrak{S}_d$ を C の d 次対称積とすると, 半安定層のモジュライ空間について

$$M^{\mathrm{ss}}_C(r, d) \simeq M^{\mathrm{ss}}_C(0, d) \simeq \mathrm{Sym}^d(C).$$

4.4.3 Abel 曲面の場合

この部分の内容は主に [YY13] に基づく.

上で扱った楕円曲線の場合は Fourier 向井変換で安定性が保たれるというのが重要であった. その高次元での類似を考えるのは自然だろう. しかし, 高次元では命題 4.4.4 のような簡単な状況にはなっていない. そこで半安定層を性質の良い層で分解して, 変換を調べることを考える. 向井 [M80] は主偏極 Abel 曲面の場合にこの方法でモジュライ空間を解析し, また Picard 数が 1 の Abel 曲面に対しても同様の解析ができることを予想した. その予想の解決 [YY13] をここで説明する.

以下 X を Abel 曲面とする. 今までと同様に, $x \in X$ による平行移動を $t_x : X \to X$ を書く. また X の双対 Abel 曲面を $\widehat{X}$ と書く. そして $\mathcal{P}$ で X の Poincaré 束を表わす. X 上の層 $\mathcal{E}$ の向井ベクトルについて,

$$v(\mathcal{E}) = \mathrm{ch}(\mathcal{E}) = (\mathrm{rank}(\mathcal{E}), c_1(\mathcal{E}), \chi(\mathcal{E})), \quad \langle v(\mathcal{E})^2 \rangle = (c_1(\mathcal{E})^2) - 2\,\mathrm{rank}(\mathcal{E})\chi(\mathcal{E}).$$

上で言及した “性質の良い層” とは, [M78] で導入された**半等質層**のことである. §1.2 で半等質ベクトル束について言及したが, 改めて定義を述べておく. 任意の $\mathcal{E} \in \mathsf{Coh}(X)$ に対し

$$S(\mathcal{E}) := \{(x, \widehat{x}) \in X \times \widehat{X} \mid t_x^*(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{P}|_{X \times \widehat{x}} \simeq \mathcal{E}\}$$

は $X \times \widehat{X}$ の部分 Abel 多様体であり, $\dim S(\mathcal{E}) \leq 2$ である.

定義. $\dim S(\mathcal{E}) = 2$ となる $\mathcal{E}$ を**半等質層**と呼ぶ.

特に半等質ベクトル束 $\mathcal{E}$ は, 任意の $x \in X$ に対し $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^0(X)$ が存在して $t_x\mathcal{E} \simeq \mathcal{L} \otimes \mathcal{E}$ となるもののことである. “半等質” という名前はこの性質に由来する. (もし $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$ であれば, そのようなベクトル束 $\mathcal{E}$ は等質ベクトル束と呼ぶべきものなので.)

半等質層は [M78] で導入され, 分類やコホモロジーがそこで決定されている. 重要な性質を一つ述べよう.

命題. 半等質層は任意の偏極 H に関して半安定. また, その向井ベクトルを v とすると $\langle v^2 \rangle = 0$.

定理 2.6.1 や定理 2.6.2 を思い出すと, 正の向井ベクトル v で $\langle v^2 \rangle = 0$ なるものに対して, 安定層のモジュライ空間 $M_H(v)$ は非特異で次元は 2 となる.

偏極 H を一般にとれば, $M_H(v)$ は射影的である. 更に次の結果がある. $M_H(v)$ の普遍族 $\widetilde{\mathcal{E}}$ とは, $M_H(v) \times X$ 上の連接層 $\widetilde{\mathcal{E}}$ であって, 各 $\widehat{x} \in M_H(v)$ に対して $\widetilde{\mathcal{E}}\Big|_{\{\widehat{x}\} \times X}$ は $\widehat{x}$ に対応した安定層と同型なもののことであった.

命題 (Bridgeland, [Br99])**.** (1) $M_H(v)$ に普遍族が存在する $\iff$ $\gcd\{r, a, (\xi, \mathcal{L}) \mid \mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X)\} = 1$.

(2) $M_H(v)$ に普遍族 $\widetilde{\mathcal{E}}$ が存在すれば $\Phi_{\widetilde{\mathcal{E}}}^{X \to M_H(v)} : \mathsf{D}(X) \to \mathsf{D}(M_H(v))$ は圏同値.

なおこの定理は X が K3 曲面でも成立する.

以上から, 次の結果の半分が説明できたことになる.

定理. 半等質層のモジュライ空間 $M_H(v)$ は底空間である Abel 曲面 X と導来同値. 逆に Abel 曲面 X と導来同値な非特異射影曲面 Y は Abel 曲面で, ある H, v が存在して X 上の半等質層のモジュライ空間 $M_H(v)$ と同型になる.

更に主偏極 Abel 曲面の場合は

命題 4.4.5. 主偏極 Abel 曲面 X と導来同値な非特異射影曲面 Y は X と同型.

定義 4.4.6. アーベル曲面 X 上の連接層 $\mathcal{E}$ の**半等質表示**とは, $\mathsf{Coh}(X)$ での短完全列

$$0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2 \to 0 \quad 又は \quad 0 \to \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E} \to 0$$

であって次の条件を満たすもののこと.

- $v(E_1) = \ell_1 v_1$, $v(E_2) = \ell_2 v_2$ によって $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{Z}_{>0}$ と原始的向井ベクトル v_1, v_2 を定めた時, $(\ell_1 - 1)(\ell_2 - 1) = 0$, $\langle v_1, v_2 \rangle = -1$ かつ $\langle v_1^2 \rangle = \langle v_2^2 \rangle = 0$.

上の各表示をそれぞれ核表示, 余核表示と呼ぶ.

条件から E_1 と E_2 は半等質層で, これが "半等質表示" という名前の由来である. 半等質層のコホモロジーが分かっていることから, 半等質表示を持つ層のフーリエ向井変換の下での振る舞いが統制できる.

安定層 E がいつ半等質表示を持つかが問題になるが, $\operatorname{rank} \mathrm{NS}(X) = 1$ の場合は, 向井ベクトルのみで存在条件が書き下せる.

定義 4.4.7. 向井ベクトル v に対し, 自然数 ℓ_1, ℓ_2 と正の原始的向井ベクトル v_1, v_2 であって

$$\begin{aligned} v &= \pm(\ell_2 v_2 - \ell_1 v_1), \\ (\ell_1 - 1)(\ell_2 - 1) &= 0, \quad \langle v_1^2 \rangle = \langle v_2^2 \rangle = 0, \quad \langle v_1, v_2 \rangle = -1, \quad \mu(v_1) < \mu(v_2) \end{aligned}$$

を満たすものを考える. この不定方程式を**数値方程式**, 解 $(v_1, v_2, \ell_1, \ell_2)$ を v の**数値解**と呼ぶ.

定理 4.4.8. $\mathrm{NS}(X) = \mathbb{Z}H$ と仮定し, v を $\langle v^2 \rangle > 0$ なる向井ベクトルとする.

(1) もし v に二つ以上の数値解が存在すれば, $M_H(v)$ の一般の元は核表示と余核表示を持つ. どちらの半等質表示も一意に決まる.

(2) もし v の数値解が一つのみ存在すれば, $M_H(v)$ の一般の元は核表示と余核表示のどちらか一方のみを持つ. その半等質表示は一意に決まる.

定理の証明には, 数値方程式 $(v_1, v_2, \ell_1, \ell_2)$ に対し, 半等質層 E_1, E_2 であって $v(E_i) = \ell_i v_i$ $(i = 1, 2)$ となるものからなる複体 $E_1 \to E_2$ (この二項以外は 0) のモジュライ空間 $\mathfrak{M}^+(v_1, v_2, \ell_1, \ell_2)$ を用いる.

定理 4.4.8 の応用として, [M80, 予想 1, 予想 1′] を精密に述べた次の定理が示せる.

定理. X を $\mathrm{NS}(X) = \mathbb{Z}H$ なる Abel 曲面とし, v を向井ベクトルで $\ell := \langle v^2 \rangle / 2$ が正のものとする. v の数値解が少なくとも一つ存在すると仮定する.

(1) v の数値解 $(v_1, v_2, \ell_1, \ell_2)$ のうち $\operatorname{rank}(v_i)$ が最小のものを考える. ここで $i \in \{1, 2\}$ は $\ell_i = \ell$ となるものの方とする. この時, 一般の $[E_1 \xrightarrow{f} E_2] \in \mathrm{M}^+(v_1, v_2, \ell_1, \ell_2)$ は単射もしくは全射.

(2) (1) の状況の下で, f の余核もしくは核は安定層である.

(3) $M_H(v)$ の一般の元は (1) で考えた $(v_1, v_2, \ell_1, \ell_2)$ に対応する半等質分解を持つ.

上でも言及したが, 半等質分解を持つ層は Fourier 向井変換での振る舞いが原理的には記述しやすくなる. その計算を実際しようとするおと, コホモロジー群上での記述が必要になる. 楕円曲線の場合と同様にコホモロジー的 Fourier 向井変換を行列表示しようとすると, 安直にはコホモロジー群の階数分のサイズの行列を用いたくなるが. 主偏極 Abel 曲面の場合に, 向井は [M80] でよりコンパクトな表示を用いて計算した. それの $\operatorname{rank} \mathrm{NS}(X) = 1$ の場合への拡張を以下で紹介する.

今までと同様, Fourier 向井変換 $\Phi : \mathsf{D}(X) \to \mathsf{D}(Y)$ の誘導するコホモロジー的変換を $\Phi^H : H^*(X, \mathbb{Q}) \to H^*(X, \mathbb{Q})$ と書く. X が Abel 曲面 (ないし K3 曲面) なら, Φ^H は

$$H^{\mathrm{ev}}(X, \mathbb{Z})_{\mathrm{alg}} := H^0(X, \mathbb{Z}) \oplus \mathrm{NS}(X) \oplus H^4(X, \mathbb{Z})$$

を保つ. 誘導される変換を同じ記号を使って $\Phi^H : H^{\mathrm{ev}}(X, \mathbb{Z})_{\mathrm{alg}} \to H^{\mathrm{ev}}(Y, \mathbb{Z})_{\mathrm{alg}}$ と書くことにする.

以下 $\mathrm{NS}(X) = \mathbb{Z}H$ と仮定し, $n := (H^2)/2$ とする. $H^{\mathrm{ev}}(X, \mathbb{Z})_{\mathrm{alg}}$ は次の加群 $\mathrm{Sym}_2(\mathbb{Z}, n)$ と同型である.

$$H^{\mathrm{ev}}(X, \mathbb{Z})_{\mathrm{alg}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sym}_2(\mathbb{Z}, n) := \left\{ \begin{bmatrix} x & y\sqrt{n} \\ y\sqrt{n} & z \end{bmatrix} \middle| \, x, y, z \in \mathbb{Z} \right\}, \quad (r, dH, a) \longmapsto \begin{bmatrix} r & d\sqrt{n} \\ d\sqrt{n} & a \end{bmatrix}.$$

$\mathrm{Sym}_2(\mathbb{Z}, n)$ 上の双線型形式 B を

$$B(X, X') := 2yy' - (xz' + zx'), \quad X = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix}, \; X' = \begin{bmatrix} x' & y' \\ y' & z' \end{bmatrix} \in \mathrm{Sym}_2(\mathbb{Z}, n).$$

で定義すれば $\langle v, v' \rangle = B(\iota_X(v), \iota_X(v'))$ であり, 次の格子の等長変換が得られる.

$$\iota_X : (H^{\mathrm{ev}}(X, \mathbb{Z})_{\mathrm{alg}}, \langle \cdot, \cdot \rangle) \xrightarrow{\sim} (\mathrm{Sym}_2(X, \mathbb{Z}), B).$$

X と導来同値な代数多様体の同型類の集合を以下のように表そう.

$$\mathrm{FM}(X) := \{ Y : \text{代数多様体} \mid \mathsf{D}(X) \simeq \mathsf{D}(Y) \} / \sim .$$

X が $\mathrm{rank}\, \mathrm{NS}(X) = 1$ の Abel 曲面なので, 任意の $Y \in \mathrm{FM}(X)$ も $\mathrm{rank}\, \mathrm{NS}(Y) = 1$ の Abel 曲面である. そして $\mathrm{NS}(Y)$ の生成元である豊富な因子を $\widehat{H}$ と書くと $(\widehat{H}^2) = 2n$ となる. そこで圏同値 $\Phi : \mathsf{D}(Y) \xrightarrow{\sim} \mathsf{D}(Z)$ に対し格子 $(\mathrm{Sym}_2(X, \mathbb{Z}), B)$ の自己等長変換 $\theta(\Phi)$ を次のように定義する.

$$\theta(\Phi) := \iota_Z \circ \Phi^H \circ \iota_Y^{-1}$$

Z を固定して Y や Φ を動かすと, 等長変換 $\theta(\Phi)$ たちは群をなす. それは次のような算術群になる.

命題. $Z \in \mathrm{FM}(X)$ に対し $\mathcal{E}(Z) := \bigcup_{Y \in \mathrm{FM}(X)} \{ \Phi_{Y \to Z}^{E[2k]} \in \mathrm{Eq}(\mathsf{D}(Y), \mathsf{D}(Z)) \mid E \in \mathsf{Coh}(Y \times Z), k \in \mathbb{Z} \}$ とし,

$$G := \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \middle| \, x^2, y^2, z^2, w^2, \frac{xy}{\sqrt{n}}, \frac{zw}{\sqrt{n}} \in \mathbb{Z} \right\}$$

で群 G を定める. すると各 $Z \in \mathrm{FM}(X)$ に対して $\theta(\mathcal{E}(Z)) \cong G/\{\pm 1\}$.

この表示を用いて安定層のモジュライの記述を与えよう. 定理 2.6.3 より一般の Abel 曲面 X について双有理写像 $M_H(v) \dashrightarrow X \times \mathrm{Hilb}^{\langle v^2 \rangle /2}(X)$ が存在するが, X が主偏極の場合にこの写像を明示化しよう.

向井ベクトル $v = (r, dH, a) \in H^{\mathrm{ev}}(X, \mathbb{Z})_{\mathrm{alg}}$ に付随した二次形式 $Q_v(\cdot, \cdot)$ を次式で定義する.

$$Q_v(x, y) := -(rx^2 + 2xy + ay^2) = -\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & d \\ d & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

一方, $\langle w^2 \rangle = 0$ となる向井ベクトル w は整数 p, q でもって $w = (p^2, pqH, q^2)$ と書ける. これらについて $\langle w, v \rangle = Q_v(q, -p)$ となる.

X が主偏極なら命題 4.4.5 より $\mathrm{FM}(X) = \{X\}$. そして先の算術群 G は $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ になる. すると古典的な二次不定方程式の理論を用いて次の主張が示せる.

定理 4.4.9. X を主偏極アーベル曲面だとする．$v = (r, dH, a)$ を向井ベクトルであって次を満たすものとする．

- $\ell := \langle v^2 \rangle/2$ は正であって平方数ではない．また判別式が ℓ である二次形式の類数は 1 である．

この時, 以下のように双有理写像 $M_H(v) \dashrightarrow X \times \mathrm{Hilb}^\ell(X)$ が構成できる．

(1) 不定方程式 $2p_1q_1d - p_1^2a - q_1^2r = \epsilon$ ($\epsilon = \pm 1$) の解のうち $|p_1|$ が最小のものを取り, それから向井ベクトル $v_1 = (p_1^2, p_1q_1H, q_1^2)$ を作る．この時, 行列 $\gamma := \pm \begin{bmatrix} q_1 & \epsilon(dq_1 - ap_1) \\ -p_1 & \epsilon(dp_1 - rq_1) \end{bmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ は ${}^t\gamma Q_v \gamma = -\epsilon \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\ell \end{bmatrix}$. をみたす．

(2) $v_2 := (p_2^2, p_2q_2H, q_2^2)$ と置く．但し $q_2 = -\epsilon(dq_1 - ap_1)$ 及び $p_2 = \epsilon(dp_1 - rq_1)$．この時 $M_H(v)$ の一般の元は数値解 $(v_1, v_2, \ell, 1)$ もしくは $(v_2, v_1, 1, \ell)$ に対応する半等質表示を持つ．更に $\theta(\Phi) = \gamma$ なる Fourier 向井変換 $\Phi := \Phi^{\mathcal{E}}_{X \to X}$ もしくはそれと双対 (導来) 函手 $D_X := \mathrm{Hom}(-, \mathcal{O}_X)$ との合成 $D_X \circ \Phi$ が双有理写像 $M_H(v) \dashrightarrow X \times \mathrm{Hilb}^\ell(X)$ を与える．

最後に次元が 4 以上 20 以下 (i.e. $1 \le \ell \le 9$) のモジュライの双有理同値類について述べる．定理 4.4.9 から, ℓ を判別式とする二次形式の同値類とモジュライの双有理同値類が対応することが分かる．以下に二次形式の同値類を挙げる．

ℓ	Q_v	ℓ	Q_v
1	$2xy$, $x^2 - y^2$	6	$x^2 - 6y^2$
2	$x^2 - 2y^2$	7	$x^2 - 7y^2$
3	$x^2 - 3y^2$	8	$x^2 - 8y^2$
4	$x^2 - 4y^2$	9	$2x^2 + 2xy - 4y^2$, $x^2 - 9y^2$
5	$2x^2 + 2xy - 2y^2$, $x^2 - 5y^2$	10	$3x^2 + 2xy - 3y^2$, $x^2 - 10y^2$

命題． (1) $\ell = 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8$ なら $M_H(v)$ は $X \times \mathrm{Hilb}^\ell(X)$ と双有理同値．

(2) $\ell = 5$ なら $M_H(v)$ は $M_H(2, H, -2)$ か $X \times \mathrm{Hilb}^\ell(X)$ と双有理同値．

(3) $\ell = 9$ なら $M_H(v)$ は $M_H(2, H, -4)$ か $X \times \mathrm{Hilb}^\ell(X)$ と双有理同値．

4.5 その他の話題

4.5.1 3 次元 Flop と導来圏

3 次元 Flop と導来圏に関する Bridgeland の仕事 [B02]．解説が [戸田 16, 第 6 章] にある,

4.5.2 導来 McKay 対応

Bridgeland-King-Reid の仕事 [BKR]．解説が [戸田 16, 第 7 章] にある,

5 Bridgeland の安定性条件

この節の参考文献は [戸田 16, 第 8 章].

Bridgeland の動機は二つあるものと推測される. 一つは彼自身が明言しているように Douglas の Π 安定性 (J. Math. Phys., 2002) の数学的精密化である. もう一つは, Fourier 向井変換で Gieseker・丸山安定性が保存される (技術的には複雑な) 状況の, より自然な拡張だと思われる.

5.1 t 構造

三角圏の安定性条件の定義を述べるのに t 構造が必要になるため, ここで復習しておく.

定義. T を三角圏とする. 以下の条件を満たす部分圏 $\mathsf{T}^{\le 0} \subset \mathsf{T}$ を T の **t 構造**と呼ぶ.

- $\mathsf{T}^{\le 0}[1] \subset \mathsf{T}^{\le 0}$.
- 充満部分圏 $\mathsf{T}^{\ge 1} \subset \mathsf{T}$ を $\mathrm{Ob}(\mathsf{T}^{\ge 1}) = \{F \in \mathsf{T} \mid \mathrm{Hom}(\mathsf{T}^{\le 0}, F) = 0\}$ で定める. 任意の $E \in \mathrm{Ob}(\mathsf{T})$ に対し, $\tau_{\le 0}E \in \mathrm{Ob}(\mathsf{T}^{\le 0})$ 及び $\tau_{\ge 1}E \in \mathrm{Ob}(\mathsf{T}^{\ge 1})$ が存在し, 更に次の形の特三角が存在する.
$$\tau_{\le 0}E \to E \to \tau_{\ge 1}E \to (\tau_{\le 0}E)[1].$$

t 構造 $\mathsf{T}^{\le 0} \subset \mathsf{T}$ に対し, 部分圏
$$\mathsf{T}^{\heartsuit} := \mathsf{T}^{\le 0} \cap (\mathsf{T}^{\ge 1}[1]) \subset \mathsf{T}$$
は Abel 圏の構造を持つ. これを **t 構造の核** (core, heart) と呼ぶ.

定義. 次を満たす t 構造 $\mathsf{T}^{\le 0} \subset \mathsf{T}$ は**有界**である呼ばれる.
$$\mathsf{T} = \bigcup_{i,j \in \mathbb{Z}} \left(\mathsf{T}^{\le 0}[i]\right) \cap \left(\mathsf{T}^{\ge 1}[j]\right)$$

Abel 圏 A の有界導来圏 $\mathsf{D} := \mathsf{D}^b(\mathsf{A})$ は**標準的 t 構造**と呼ばれる t 構造を持つ. これは
$$\mathrm{Ob}(\mathsf{D}^{\le 0}) = \{E \in \mathrm{Ob}(\mathsf{D}) \mid H^n(E) = 0 \ \forall n > 0\}$$
で定まる充満部分圏 $\mathsf{D}^{\le 0} \subset \mathsf{D}$ のことである. このとき $\mathrm{Ob}(\mathsf{D}^{\ge 1}) = \{E \in \mathrm{Ob}(\mathsf{D}) \mid H^n(E) = 0 \ \forall n \le 0\}$ となる. そして $E \mapsto (\cdots \to 0 \to E \to 0 \to \cdots)$ で定まる $\mathsf{A} \to \mathsf{D}^{\heartsuit}$ は圏同値を与える. また標準的 t 構造は有界である.

5.2 三角圏の安定性

この副節は (Bridgeland, Ann. Math., 2007) に基づく.

§3 では Abel 圏に対する Rudakov の安定性条件を紹介したが, ここではその変種を導入しよう. 今までと同様に, Abel 圏 A の Grothendieck 群を $K(\mathsf{A})$ と書き, A の対象 E の $K(\mathsf{A})$ における同型類を $[E]$ と書く.

定義 5.2.1. Abel 圏 A 上の安定性条件とは, 以下の二条件を満たす群準同型 $Z : K(\mathsf{A}) \to \mathbb{C}$ のことである.

- 任意の $E \in \mathrm{Ob}(\mathsf{A}) \setminus \{0\}$ に対し $Z([E]) \in \mathbb{H} := \{r \exp(i\pi\phi) \mid r > 0, 0 < \phi \le 1\}$. 以下 $\arg Z(E) := \arg Z([E]) \in (0, \pi]$ と書く.

- 任意の $E \in \mathrm{Ob}(\mathsf{A}) \setminus \{0\}$ に対し, 部分対象からなる有限列

$$0 = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \cdots \subsetneq E_\ell = E$$

が存在して, 各 i について $\mathrm{gr}_i(E) := E_i/E_{i-1}$ が Z 半安定であり, 更に

$$\arg Z(\mathrm{gr}_1(E)) > \cdots > \arg Z(\mathrm{gr}_\ell(E))$$

となる. ここで対象 F が Z 半安定とは, 任意の真部分対象 $0 \subsetneq G \subsetneq F$ に対し $\arg Z(G) < \arg Z(F)$ となることをいう.

Harder-Narasimhan フィルトレーションの存在を定義に含めれていることに注意する.

三角圏の安定性条件の定義は次の通り.

定義 5.2.2. 三角圏 T 上の安定性条件とは次の条件を満たす組 (Z, A) のことである.

- $\mathsf{A} \subset \mathsf{T}$ は T の有界な t 構造の核.
- $Z : K(\mathsf{T}) \to \mathbb{C}$ は定義 5.2.1 の意味で Abel 圏 A 上の安定性条件.

T 上の安定性条件 (Z, A) が与えられれば, A の任意の対象について Harder-Narasimhan フィルトレーションが取れる. そこで, T の任意の対象にも同様のフィルトレーションが入ることが期待される. 実際, 次の主張が成立する.

補題 5.2.3. 三角圏 T に安定性条件を与えることと, 以下の条件を満たす $(Z, \{\mathsf{P}(\phi)\}_{\phi\in\mathbb{R}})$ を与えることは同値.

- 各 $\mathsf{P}(\phi)$ は T の部分圏であり, また $\mathsf{P}(\phi+1) = \mathsf{P}(\phi)[1]$ となる.
- $\phi_1 > \phi_2$ ならば, 任意の $E_i \in \mathsf{P}(\phi_i)$ に対して $\mathrm{Hom}(E_1, E_2) = 0$.
- $Z : K(\mathsf{T}) \to \mathbb{C}$ は群準同型で, 任意の $E \in \mathrm{Ob}(\mathsf{P}(\phi)) \setminus \{0\}$ に対して $Z(E) \in \mathbb{R}_{>0} \exp(i\pi\phi)$.
- 任意 $E \in \mathrm{Ob}(\mathsf{T})$ に対し, $\ell \in \mathbb{N}$ と実数列 $\phi_1 > \cdots > \phi_\ell$ 及び特三角の列

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
0 = E_0 \arrow[rr] & & E_1 \arrow[rr] \arrow[dl] & & E_2 \arrow[r] \arrow[dl] & \cdots \arrow[r] & E_{\ell-1} \arrow[rr] & & E_\ell = E \arrow[dl] \\
& A_1 \arrow[ul, "{[1]}"] & & A_2 \arrow[ul, "{[1]}"] & & & & A_\ell \arrow[ul, "{[1]}"] &
\end{tikzcd}$$

が存在して, 各 i に対し $A_i \in \mathsf{P}(\phi_i)$.

Douglas の用語を念頭に, Z を**中心電荷**, $\mathsf{P}(\phi)$ を**位相** (phase) ϕ **の半安定対象の圏**と呼ぶ.

5.3 安定性条件の空間

引き続き [B07] に従う. [戸田 16, §8.4] からも記号や議論を拝借した.

T を三角圏とする. 有限生成自由加群 Γ と群準同型 $\mathrm{cl} : K(\mathsf{T}) \to \Gamma$ を固定する. また $\Gamma_\mathbb{R} := \Gamma \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$ 上のノルム $\|\cdot\|$ も固定する.

これらのデータは, 次の二つの例を念頭に置いている.

補題 5.3.1. (1) A を体 k 上の有限次元代数とし, $\mathsf{mod}\,A$ を有限生成 A 加群のなす Abel 圏, $\mathsf{T} := \mathsf{D}^b(\mathsf{mod}\,A)$ をその有界導来圏とする. $K(\mathsf{T})$ は有限生成自由加群で, 具体的には A を関係式付き

の箙の道代数 $k[Q]/R$ で表示すれば, Q の各頂点に付随した単純表現が $K(\mathsf{T})$ の生成元になる．この場合, $\Gamma := K(\mathsf{T})$, $\mathrm{cl} := \mathrm{id}$ とおける．

(2) X を体上の非特異射影多様体とし, $\mathsf{T} := \mathsf{D}(X)$ とする．$K(\mathsf{D})$ は有限生成とは限らないが, $\Gamma := \mathrm{Im}(\mathrm{ch} : K(\mathsf{T}) \to H^*(X, \mathbb{Q}))$ は有限生成自由加群で, $\mathrm{cl} := \mathrm{ch}$ とおける．

定義 5.3.2. $\mathrm{Stab}_\Gamma(\mathsf{T})$ を, 以下の条件を満たす $(Z, \{\mathsf{P}(\phi)\}_{\phi\in\mathbb{R}})$ のなす集合とする．

- $Z : \Gamma \to \mathbb{C}$ は群準同型であり, $(Z \circ \mathrm{cl}, \{\mathsf{P}(\phi)\}_{\phi\in\mathbb{R}})$ は補題 5.2.3 の意味で T の安定性条件である．
- (台条件, support condition)

$$\sup_{E \in \bigcup_{\phi\in\mathbb{R}} \mathsf{P}(\phi)\setminus\{0\}} \frac{\|\mathrm{cl}(E)\|}{|Z(E)|} < \infty,$$

この集合 $\mathrm{Stab}_\Gamma(\mathsf{T})$ に複素多様体の構造が入る，というのが (Bridgeland, Ann. Math., 2007) の主定理である．$\sigma \in \mathrm{Stab}_\Gamma(\mathsf{T})$ と $E \in \mathrm{Ob}(\mathsf{T}) \setminus \{0\}$ に対し, 補題 5.2.3 のような完全三角の列が定まるが, そこの記号を用いて $\phi^+_\sigma(E) := \phi_1$, $\phi^-_\sigma(E) := \phi_\ell$ と定める．

定理 5.3.3. $\sigma = (Z, \{\mathsf{P}(\phi)\}_{\phi\in\mathbb{R}})$ と $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ に対し

$$B_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\sigma) := \left\{ (W, \{\mathsf{Q}(\phi)\}_{\phi\in\mathbb{R}}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \|W - Z\| < \varepsilon_1, \\ \phi^+_\sigma(E) - \phi^-_\sigma(E) < \varepsilon_2 \quad \forall E \in \bigcup_{\phi\in\mathbb{R}} \mathsf{Q}(\phi) \setminus \{0\} \end{array} \right\}$$

と定めると, $\mathrm{Stab}_\Gamma(\mathsf{T})$ には開基底を $\{B_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\sigma) \mid \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}_{>0}, \sigma \in \mathrm{Stab}_\Gamma(\mathsf{T})\}$ とする位相が定まる．また忘却写像

$$\mathrm{Stab}_\Gamma(\mathsf{T}) \longrightarrow \Gamma^\vee_\mathbb{C} := \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(\Gamma, \mathbb{C}), \quad (Z, \{\mathsf{P}(\phi)\}_{\phi\in\mathbb{R}}) \longmapsto Z$$

は局所同相写像である．特に $\mathrm{Stab}_\Gamma(\mathsf{T})$ は複素多様体の構造を持つ．

更に $\mathrm{Stab}_\Gamma(\mathsf{T})$ には, $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ 上の向きを保つ線形変換たちによる自然な作用がある．その説明のため, $\mathrm{GL}^+_2(\mathbb{R}) := \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid \det A > 0\}$ とし, $\widetilde{\mathrm{GL}}^+_2(\mathbb{R})$ を $\mathrm{GL}^+_2(\mathbb{R})$ の普遍被覆とする．

$\widetilde{\mathrm{GL}}^+_2(\mathbb{R})$ の素朴な記述を与えておこう (後の議論では直接は用いない)．$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}^+_2(\mathbb{R})$ に対し $\theta(A) \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ を, A の QR 分解を使って

$$A = QR, \quad Q := \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta(A) & -\sin\theta(A) \\ \sin\theta(A) & \cos\theta(A) \end{bmatrix}, \quad R := \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{bmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix}$$

で定める．この関数 $\theta : \mathrm{GL}^+_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ を用いて, 集合としては

$$\widetilde{\mathrm{GL}}^+_2(\mathbb{R}) = \{(A, \phi) \in \mathrm{GL}^+_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R} \mid \theta \equiv \phi \mod 2\pi\}$$

となる．積を書くために, まず $\theta(A_1A_2) = \theta(A_1) + \theta(A_2) + \eta(A_1, A_2)$ なる $\eta(A_1, A_2) \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ が定まることに注意する．$\eta(I_2, I_2) = 0$ とすると連続写像 $\eta(A_1, A_2) \in \mathbb{R}$ が一意に定まる．それを用いて積は $(A_1, \phi_1) \cdot (A_2, \phi_2) = (A_1A_2, \phi_1 + \phi_2 + \eta(A_1, A_2))$ と書ける．

$\widetilde{\mathrm{GL}}^+_2(\mathbb{R})$ は別の表し方がある．

$$\widetilde{\mathrm{GL}}^+_2(\mathbb{R}) = \left\{ (A, f) \;\middle|\; \begin{array}{l} A \in \mathrm{GL}^+_2(\mathbb{R}),\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ は単調増加関数で } f(x+1) = f(x) + 1, \\ \text{同一視 } S^1 = \mathbb{R}/2\mathbb{Z} = (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})/\mathbb{R}_{>0} \text{ のもと,} \\ f \text{ と } A \text{ が } S^1 \text{ に誘導する写像は等しい} \end{array} \right\}. \tag{5.3.1}$$

こちらの方が $\mathrm{Stab}_\Gamma(\mathsf{T})$ への作用を書きやすいので, 以後はこの記述を用いる．

命題 5.3.4. 以下の式によって, $\widetilde{\mathrm{GL}}_2^+(\mathbb{R})$ の $\mathrm{Stab}_\Gamma(\mathsf{T})$ への右作用が定まる.

$$\sigma.(A,f) := (A^{-1}\circ Z, \{\mathsf{P}(f(\phi))\}_{\phi\in\mathbb{R}}).$$

ここで部分群 $\mathbb{C}^* \subset \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ に注目しよう. 部分群であることは, 複素数の掛け算で $\mathbb{C}^*$ が $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ に作用することから分かる. 普遍被覆に持ち上げると $\mathbb{C}\subset\widetilde{\mathrm{GL}}_2^+(\mathbb{R})$ となっていて, この埋め込み写像は (5.3.1) を使うと $z\longmapsto \bigl(e^{i\pi z},\ f:x\mapsto x+\mathrm{Re}\,z\bigr)$ と書ける.

以上では $\widetilde{\mathrm{GL}}_2^+(\mathbb{R})$ の作用を考えたが, これは $\mathrm{Aut}(\mathsf{T})$ の作用を念頭に導入されたものである. そちらの説明のために, Γ に関する技術的な仮定を置く:

- $\mathrm{cl}:\mathsf{T}\to\Gamma$ と整合的な群準同型 $\alpha:\mathrm{Aut}(\mathsf{T})\to\mathrm{Aut}(\Gamma)$ が存在する. つまり, 各 $\Phi\in\mathrm{Aut}(\mathsf{T})$ に対して次の図式は可換.

$$\begin{tikzcd} \mathsf{T} \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\mathrm{cl}"'] & \mathsf{T} \arrow[d, "\mathrm{cl}"] \\ \Gamma \arrow[r, "\alpha(\Phi)"'] & \Gamma \end{tikzcd}$$

補題 5.3.5. 上の仮定は非特異射影多様体 X の導来圏 $\mathsf{T}=\mathsf{D}(X)$ の場合成立する.

証明. Orlov の定理 4.3.1 より $\Phi=\Phi_{\mathcal{K}}$ と Fourier 向井変換で書けるので, 対応するコホモロジー的変換 $\Phi^H_{v(\mathcal{K})}$ を用いて $\alpha(\Phi):=\Phi^H_{v(\mathcal{K})}$ とすれば良い. 図式の可換性は命題 4.3.2 に他ならない. □

命題 5.3.6. prp:action:left 上の仮定のもと, $\mathrm{Aut}(\mathsf{T})$ の $\mathrm{Stab}_\Gamma(\mathsf{T})$ への左作用が次式で定まる.

$$\Phi.\sigma=\bigl(Z\circ\alpha(\Phi)^{-1},\Phi(\mathsf{P}(\phi))_{\phi\in\mathbb{R}}\bigr)\quad(\Phi\in\mathrm{Aut}(\mathsf{T}),\ \sigma=(Z,\{\mathsf{P}(\phi)\}_{\phi\in\mathbb{R}}))\,.$$

以後の記述を簡単にするため,

定義. 非特異射影多様体 X に対し, 補題 5.3.1 (2) のように Γ と cl を取り, **Bridgeland 安定性条件の空間** $\mathrm{Stab}(X)$ を次で定める.

$$\mathrm{Stab}(X):=\mathrm{Stab}_\Gamma(\mathsf{D}(X)).$$

最後に X が楕円曲線の場合の $\mathrm{Stab}(X)$ の記述を紹介する. まず, 一般の非特異射影曲線 C に対して,

$$Z(\mathcal{E}):=-\deg(\mathcal{E})+i\,\mathrm{rank}(\mathcal{E})$$

で群準同型 $Z:K(\mathsf{Coh}(C))\to\mathbb{C}$ が定まるが, スロープ安定性の議論 (§2) から, これが定義 5.2.1 の意味での $\mathsf{Coh}(C)$ 上の安定性条件を定める.

特に C が楕円曲線であれば, $\mathsf{D}(C)=\mathsf{D}^b(\mathsf{Coh}(C))$ の標準的 t 構造 (§5.1) とこの中心電荷 Z で, 定義 5.2.2 の意味での $\mathsf{D}(C)$ 上の安定性条件 σ_0 が定まる. また $\sigma_0\in\mathrm{Stab}_\Gamma(\mathsf{D}(C))$ も成立する.

次に群作用を考えよう. 今の場合, $\widetilde{\mathrm{GL}}_2^+(\mathbb{R})$ の右作用 (命題 5.3.4) で定まる写像

$$\widetilde{\mathrm{GL}}_2^+(\mathbb{R})\ni(A,f)\longmapsto\sigma_0.(A,f)\in\mathrm{Stab}(C)$$

は同相写像であることが示せる. $\mathrm{Aut}(\mathsf{D}(C))$ の左作用 (命題 5.3.4) については, まず $\Gamma=H^0(C,\mathbb{Z})\oplus H^2(C,\mathbb{Z})\simeq\mathbb{Z}^{\oplus 2}$ であり, 補題 5.3.5 で扱った群準同型 $\alpha:\mathrm{Aut}(\mathsf{D})\to\mathrm{Aut}(\Gamma)$ は定理 4.4.3 より $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ と同一視できる. よって二重商が

$$\mathrm{Aut}(\mathsf{D}(C))\backslash\mathrm{Stab}(X)/\mathbb{C}\simeq\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\widetilde{\mathrm{GL}}_2^+(\mathbb{R})/\mathbb{C}\simeq\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})/\mathbb{C}^*\simeq\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}^\circ$$

と同一視できる．但し $\mathbb{H}^\circ \subsetneq \mathbb{H}$ は上半平面であり，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ は通常の方法で作用している．つまり二重商は楕円曲線のモジュライ空間と同一視できる．

最後の考察はミラー対称性における複素化された Kähler 錘の話題と関係する．詳しくは [戸田 16, §8.6] を参照せよ．

5.4 Abel 曲面上の安定性条件

この副節で [YY14] の結果を紹介する．

前副節の最後に楕円曲線の場合の安定性条件の空間を記述した．この副節では，Abel 曲面の場合に考えてみよう．以下 X を $\mathbb{C}$ 上の Abel 曲面とする．(任意の体上でも，適当な変更のもと，本質的に同じ結果が成立する.) X の導来圏に関しては §4.4.3 を参照せよ．

5.4.1 安定性条件の構成

まず $\mathsf{D}(X)$ 上の安定性条件の構成から始める必要がある．曲線の場合と違うのは，安定性条件の定義 5.2.2 における t 構造の核 $\mathsf{A} \subset \mathsf{D}(X)$ として，標準的な t 構造 $\mathsf{Coh}(X) \subset \mathsf{D}(X)$ を取ることができない，という点である ([戸田 16, 例 8.4] の説明を参照)．Abel 曲面及び K3 曲面に対して，Bridgeland は [B08] で捩れ対 (torsion pair) による傾斜 (tilting) を用いて安定性条件を構成した．それをここで解説する．

定義. Abel 圏 A の部分圏の組 (T, F) は次の条件を満たすとき，**捩れ対**であると呼ばれる．

- $\mathrm{Hom}(\mathsf{T}, \mathsf{F}) = 0$.
- 任意の $E \in \mathrm{Ob}(\mathsf{A})$ に対し，$T \in \mathrm{Ob}(\mathsf{T})$, $F \in \mathrm{Ob}(\mathsf{F})$ と短完全列 $0 \to T \to E \to F \to 0$ が存在する．

念頭にあるのは次の例である．

補題 5.4.1. 体上の代数多様体 X について，$\mathsf{T} \subset \mathsf{Coh}(X)$ を捩れ層のなす充満部分圏，$\mathsf{F} \subset \mathsf{Coh}(X)$ を捩れのない層のなす充満部分圏とすると，(T, F) は捩れ対である．

この主張のうち短完全列の存在は torsion filtration (定義 2.1.1) の存在から従う．

三角圏 D の t 構造の核 A とその捩れ対が与えられると，それらから別の Abel 部分圏が作れる，というのが **Happel-Reiten-Smaløの傾斜理論**である．$\mathsf{A} \subset \mathsf{D}$ による i 次コホモロジー函手を H^i_{A} と書くことにする．§5.1 の $\tau_{\le 0}$, $\tau_{\ge 1}$ を用いると，$\tau_{\ge 0}(E) := \tau_{\ge 1}(E[-1])[1]$ として，

$$H^i_{\mathsf{A}}(E) := \tau_{\ge 0}\tau_{\le 0}(E).$$

命題. $\mathsf{A} \subset \mathsf{D}$ を三角圏とその有界な t 構造の核とする．A の捩れ対 (T, F) に対し，充満部分圏 $\mathsf{A}^\sharp \subset \mathsf{D}$ を

$$\mathrm{Ob}(\mathsf{A}^\sharp) = \left\{ E \in \mathrm{Ob}(\mathsf{D}) \;\middle|\; \begin{array}{l} H^0_{\mathsf{A}}(E) \in \mathsf{T},\ H^{-1}_{\mathsf{A}}(E) \in \mathsf{F}, \\ H^i_{\mathsf{A}}(E) = 0\ (i \ne 0, -1). \end{array} \right\}$$

で定義すると，$\mathsf{A}^\sharp$ も D の t 構造の核になる．特に $\mathsf{A}^\sharp$ は Abel 圏である．

定義. $\mathsf{A}^\sharp$ を**捩れ対 (T, F) による A の傾斜**と呼ぶ．

補題 5.4.1 の捩れ対から標準的でない t 構造の核 $\mathsf{A}^\sharp \subset \mathsf{D}(X)$ が得られる．

X が Abel 曲面の状況に戻ろう．捩れ安定性 (twisted stability) を使うと，$\mathsf{D}(X)$ の t 構造のより多くの例を作ることができる．X の豊富錘を $\mathrm{Amp}(X)$ と書き，$\mathrm{Amp}(X)_{\mathbb{R}} := \mathrm{Amp}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ とする．$\beta \in \mathrm{NS}(X)_{\mathbb{R}}$ と

$\omega \in \mathrm{Amp}(X)_{\mathbb{R}}$ に対し, 捩れ半安定性を $p_\beta(\mathcal{E}) := p(\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}(-\beta))$ に関する (通常の意味の) ω 半安定性として定義する．補題 2.3.2 の計算を使って言い換えると,

定義 5.4.2. X を Abel 曲面とし, また $\beta \in \mathrm{NS}(X)_{\mathbb{R}}$, $\omega \in \mathrm{Amp}(X)_{\mathbb{R}}$ とする．X 上の捩れの無い層 $\mathcal{E}$ に対し,

$$\mu_{\beta,\omega}(\mathcal{E}) := (\mu(\mathcal{E}) - \beta, \omega), \quad \chi_{\beta,\omega}(\mathcal{E}) := (\chi(\mathcal{E}) - \mathrm{rank}(\mathcal{E})c_1(\mathcal{E}), \beta)$$

と定める．また $\mathcal{E}$ が (β,ω) **捩れ [半] 安定** ((β,ω)-twisted [semi]stable) であるとは,

$$\mu_{\beta,\omega}(\mathcal{F}) < \mu_{\beta,\omega}(\mathcal{E}) \quad \text{または} \quad (\mu_{\beta,\omega}(\mathcal{F}) = \mu_{\beta,\omega}(\mathcal{E}) \text{ かつ } \frac{\chi_{\beta,\omega}(\mathcal{F})}{\mathrm{rank}(\mathcal{F})} \underset{[=]}{<} \frac{\chi_{\beta,\omega}(\mathcal{E})}{\mathrm{rank}(\mathcal{E})}$$

が任意の真部分層 $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{E}$ について成立することをいう．

以下 $\mathbb{H}' \subset \mathbb{C}$ を上半平面に実軸の正部分を付け加えたものとする．

$$\mathbb{H}' := \{re^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid r,\theta \in \mathbb{R},\ r > 0,\ 0 \le \theta < \pi\}.$$

命題 5.4.3. 各 $\beta \in \mathrm{NS}(X)_{\mathbb{R}}$ と $\omega \in \mathrm{Amp}(X)_{\mathbb{R}}$ に対し, $\mathsf{D}(X)$ 上の安定性条件 $\sigma_{\beta,\omega} := (\mathsf{A}_{\beta,\omega}, Z_{\beta,\omega})$ で

- $$Z_{\beta,\omega}(E) := \langle \exp(\beta + i\omega), v(E)\rangle,$$
- $\mathsf{A}_{\beta,\omega}$ は次の捩れ対 $(\mathsf{T}_{\beta,\omega}, \mathsf{F}_{\beta,\omega})$ による $\mathsf{Coh}(X)$ の傾斜:

$$\begin{aligned}\mathsf{T}_{\beta,\omega} &:= \langle \mathcal{E}; (\beta,\omega) \text{ 捩れ安定かつ } \quad Z_{\beta,\omega}(\mathcal{E}) \in \mathbb{H}'\rangle_{\mathrm{ext}},\\ \mathsf{F}_{\beta,\omega} &:= \langle \mathcal{E}; (\beta,\omega) \text{ 捩れ安定かつ } -Z_{\beta,\omega}(\mathcal{E}) \in \mathbb{H}'\rangle_{\mathrm{ext}}\end{aligned}$$

となるものがある．但し $\langle\rangle_{\mathrm{ext}}$ は拡大で閉じている部分圏で最小のもの．また $\sigma_{\beta,\omega}$ は定義 5.3.2 の台条件を満たす．

こうして安定性条件の空間 $\mathrm{Stab}_\Gamma(X)$ の部分多様体 $\mathrm{NS}(X)_{\mathbb{R}} \times \mathrm{Amp}(X)_{\mathbb{R}}$ が構成できたことになる．得られた安定性条件 $\sigma_{\beta,\omega}$ は以下の性質を満たす．

命題 5.4.4. (1) $\mathcal{E} \in \mathrm{Ob}(\mathsf{D}(X))$ が $\mathrm{rank}(\mathcal{E}) \ge 0$ かつ $\langle v(E)^2\rangle \ll (\omega^2)$ を満たすとき,

$$\mathcal{E} \text{ が } \sigma_{\beta,\omega} \text{ 半安定} \iff \mathcal{E} \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Coh}(X)) \text{ かつ } (\beta,\omega) \text{ 捩れ半安定}.$$

(2) 任意の $\Phi \in \mathrm{Aut}(\mathsf{D}(X))$ について

$$\mathcal{E} \text{ が } \sigma_{(\beta,\omega)} \text{ 半安定} \Longrightarrow \Phi(E) \text{ が } \sigma_{(\beta',\omega')} \text{ 半安定}.$$

但し (β',ω') は $\Phi^H(re^{\beta+\sqrt{-1}\omega}) = r'e^{\beta'+\sqrt{-1}\omega'}$ で定める．

(1) の $(\omega^2) \gg 0$ は**巨大体積極限** (large volume limit) と呼ばれていて, そこでの安定性が古典的な安定性と一致するということである (これは物理側の要請の一つ)．(2) は Fourier 向井変換で安定性が保たれるという意味で, Bridgeland の安定性条件の定義から自然に導出できる性質だが, モジュライ空間の解析に大変役に立つものである．

なお, 以上の定義や主張は X が K3 曲面でも成立する．特に命題 5.4.4 (2) については [H08] を参照せよ．

5.4.2 壁の定義

この部分は [MYY] に従う．

§2.6.2 で層の安定性に関する壁越え現象に言及した．そこでの壁は, 安定性が豊富な因子 H に依存することから, $\mathrm{Amp}(X)_{\mathbb{R}}$ の部分空間として定義されるものであった．今考えている Bridgeland 安定性条件 $\sigma_{\beta,\omega}$ でその類似を考えると,

$$\mathrm{Stab}^{\sharp} := \mathrm{NS}(X)_{\mathbb{R}} \times \mathrm{Amp}(X)_{\mathbb{R}} \subset \mathrm{Stab}_{\Gamma}(X)$$

の部分空間であって, そこを跨ぐと不安定化する対象が存在するもののはずである．そこで

定義． 向井ベクトル $v \in H^{\mathrm{ev}}(X,\mathbb{Z})_{\mathrm{alg}}$ を固定する．また $v_1 \in H^{\mathrm{ev}}(X,\mathbb{Z})_{\mathrm{alg}}$ は以下を満たすものとする．

$$v_1 \notin \mathbb{Q}v, \quad \langle v_1^2 \rangle \geq 0, \quad \langle (v-v_1)^2 \rangle \geq 0, \quad \langle v_1, v-v_1 \rangle > 0.$$

(1) v **の壁** $W_{v,v_1} \subset \mathrm{Stab}^{\sharp}$ を次で定義する．

$$W_{v,v_1} := \{(\beta,\omega) \in \mathrm{Stab}^{\sharp} \mid \mathbb{R}Z_{(\beta,\omega)}(v) = \mathbb{R}Z_{(\beta,\omega)}(v_1)\}.$$

(2) $\mathrm{Stab}^{\sharp} \setminus \cup_{v_1} W_{v,v_1}$ の連結成分を v の **chamber** と呼ぶ．

壁の定義式は, $\sigma_{\beta,\omega}$ 半安定な対象 E_1, E_2 であって $v(E_1) = v_1$, $v(E_2) = v - v_1$ かつ $\mathbb{R}_{>0}Z_{\beta,\omega}(E_1) = \mathbb{R}_{>0}Z_{\beta,\omega}(E_2)$ となるものが存在するための条件である．

ここでモジュライ空間の記号を用意しておこう．$(\beta,\omega) \in \mathrm{Stab}^{\sharp}$ に対して $\mathsf{D}(X)$ の t 構造の核 $\mathsf{A}_{\beta,\omega}$ が定まることを思い出しておく (命題 5.4.3)．

定義． $(\beta,\omega) \in \mathrm{Stab}^{\sharp}$ とし, $v \in H^{\mathrm{ev}}(X,\mathbb{Z})_{\mathrm{alg}}$ とする．$\mathsf{A}_{\beta,\omega}$ の対象 $\mathcal{E}$ であって $v(\mathcal{E}) = v$ かつ $\sigma_{\beta,\omega}$ 半安定なもののモジュライ空間を $\overline{\mathrm{M}}_{\beta,\omega}(v)$ で表す．

壁の定義から次の主張が従う．

補題． C を v の chamber とすると, $\overline{\mathrm{M}}_{\beta,\omega}(v)$ は $(\beta,\omega) \in v$ に依存しない．

以下では具体的に壁の構造を見るため, $\mathrm{NS}(X) = \mathbb{Z}H$ と仮定する．すると $(\beta,\omega) = (sH, tH)$ とおけて,

$$\mathrm{Stab}^{\sharp} = \{(sH,tH) \mid s \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}_{>0}\}$$

と書ける．この場合に壁の定義方程式を書き下してみよう．$v = (r, dH, a)$, $v_1 = (r_1, d_1H, a_1)$ とすると,

$$\begin{aligned} Z_{sH,tH}(v) &= \langle \exp(sH+itH), r+dH+a \rangle = \langle 1+(s+it)H+\tfrac{1}{2}(s+it)^2(H^2), r+dH+a \rangle \\ &= d(s+it)(H^2) - \tfrac{1}{2}r(s+it)^2(H^2) - a \\ &= (H^2)\left(\left[\tfrac{1}{2}r(t^2-s^2)+ds-\tfrac{a}{(H^2)}\right] + i\,[d-rs]\,t \right) \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}Z_{sH,tH}(v) = \mathbb{R}Z_{sH,tH}(v_1) \\ \iff\ & \left[\tfrac{1}{2}r(t^2-s^2)+ds-\tfrac{a}{(H^2)}\right]\left[d_1-r_1s\right]t = \left[\tfrac{1}{2}r_1(t^2-s^2)+d_1s-\tfrac{a_1}{(H^2)}\right]\left[d-rs\right]t \\ \iff\ & \tfrac{1}{2}rd_1(t^2-s^2) - dr_1s^2 - \tfrac{a}{(H^2)}(d_1-r_1s) = \tfrac{1}{2}r_1d(t^2-s^2)+d_1rs^2-\tfrac{a_1}{(H^2)}(d-rs) \\ \iff\ & \tfrac{1}{2}(rd_1-r_1d)t^2+\tfrac{1}{2}(rd_1-r_1d)s^2+\tfrac{ar_1-a_1r}{(H^2)}s = \tfrac{ad_1-a_1d}{(H^2)}. \end{aligned}$$

これは円の方程式である．更に整理すると, 次のようになる．

補題 5.4.5. $\mathrm{NS}(X)=\mathbb{Z}H$ と仮定する.

(1) $v=(r,dH,a)$, $v_1=(r_1,d_1H,a_1)$ として, 壁 W_{v,v_1} は以下のように書ける.

(a) $rd_1=r_1d$, つまり $\mu(v)=\mu(v_1)=d/r$ のときは, $p:=d/r$ として,

$$W_{v,v_1}\ =\ W_\infty\ :=\ \{(sH,tH)\mid s=p,\ t>0\}.$$

(b) そうでないときは, $q:=d^2/r^2-2a/r(H^2)$, $c:=(ra_1-r_1a)/(rd_1-r_1d)(H^2)$ として

$$W_{v,v_1}\ =\ W_c\ :=\ \{(sH,tH)\mid (s-c)^2+t^2=(p-c)^2-q,\ t>0\}.$$

$p\in\mathbb{Q}$ と $q\in\mathbb{Q}_{>0}$ は v だけから決まり, $c\in\mathbb{Q}$ は v と v_1 から決まる.

(2) $c\neq c'$ なら $W_c\cap W_{c'}=\emptyset$.

さて, chamber C と C' を隔てる壁 W は. C において安定な対象 $\mathcal{E}$ が C' では不安定になるような部分であった. では次に, 不安定化するもの全体はどれだけあるか, ということを考えてみる. そこで指標になるのが §2.5 で扱ったモジュライの期待次元である. Bridgeland 安定対象のモジュライ空間についても, 期待次元は安定層の場合と同じ議論で扱えて ($\mathrm{Ext}^i(\mathcal{E},\mathcal{E})$ は $\mathsf{D}(X)$ で定義できるものなので), 結果の評価式は同じものになる.

そこで, chamber C における安定対象のモジュライ空間 $\overline{\mathrm{M}}_C(v)$ の中で, 壁 W を超えることで不安定化する対象全体のなす部分の余次元を**壁の余次元**[*5] と呼ぶことにする.

正確には次のように定義する.

定義. $v\in H^{\mathrm{ev}}(X,\mathbb{Z})_{\mathrm{alg}}$ の壁 W に対し

$$\operatorname{codim} W\ :=\ \min_{v=\sum_i v_i}\Bigl(1+\sum_{i<j}\langle v_i,v_j\rangle-\sum_i\bigl(\dim\overline{\mathrm{M}}_H^{\beta'}(v_i)-\langle v_i^2\rangle\bigr)\Bigr)$$

但し和は向井ベクトルの分解 $v=\sum_i v_i$ であって以下の二条件を満たすもの全体を走る.

- 任意の $(\beta,\omega)\in W$ について, 全ての i に対し $\phi_{\beta,\omega}(v)=\phi_{\beta,\omega}(v_i)$.
- W に接する chamber に属する任意の (β',ω') について, 全ての $i<j$ に対し $\phi_{\beta',\omega'}(v_i)>\phi_{\beta',\omega'}(v_j)$.

ここで $\phi_{\beta,\omega}(v):=\arg Z_{\beta,\omega}(v)$. また $\overline{\mathrm{M}}_H^{\beta'}(v_i)$ は定義 5.4.2 の意味の (β',H) 捩れ半安定層のモジュライ空間.

定義から分かるように, これは X が K3 曲面であっても適用できる.

5.4.3 数値方程式再考

この部分は [YY14] に従う. 引き続き $\mathrm{NS}(X)=\mathbb{Z}H$ の Abel 曲面 X を考える.

余次元 0 の壁を跨ぐと, モジュライ空間の双有理変換が得られることが期待できる. そこで余次元 0 の壁を調べよう. §4.4.3 の数値方程式 (定義 4.4.7) を思い出しておく.

補題.

$$\{W_{v,v_1}\mid v\ \text{の壁であって}\ \operatorname{codim} W=0\}\ \xleftrightarrow{1:1}\ \{(v_1,v_2,\ell_1,\ell_2)\mid \text{数値方程式の数値解}\ \}.$$

壁の方程式 (補題 5.4.5) を使うと, 余次元 0 の壁も明示的に書き下せる. ここでは $v=(1,0,-\ell)$, $\ell\in\mathbb{Z}_{>0}$ の壁を考えてみよう. この向井ベクトルを考えるのは長さ ℓ の 0 次元部分スキーム $Z\subset X$ のイデアル層 $\mathcal{I}_Z$

[*5] Euclid 位相ではどんな壁も余次元 1 なので, あまり良くない用語かもしれない.

が $v(\mathcal{I}_X) = (1, 0, -\ell)$ を満たすからである．逆に $v = (1, 0, -\ell)$ の安定層 $\mathcal{E}$ は，$\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}^0(X) = \widehat{X} = X$ と $\mathcal{I}_Z$ を使って $\mathcal{E} \simeq \mathcal{L} \otimes \mathcal{I}_Z$ と書ける．つまり

補題 5.4.6. 安定層のモジュライ空間について

$$\mathrm{M}_H(1, 0, -\ell) \simeq X \times \mathrm{Hilb}^{\ell}_X .$$

補題. $m \in \mathbb{Z}$ に対し $W^0_m \subset \mathrm{Stab}^\sharp$ を

$$W^0_m := \{(sH, tH) \mid (s - \tfrac{1}{\sqrt{n}} \tfrac{b_m}{a_m})(s - \tfrac{1}{\sqrt{n}} \tfrac{\ell a_m}{b_m}) + t^2 = 0\}, \quad W^0_0 := \{(sH, tH) \mid s = 0\}$$

で定める．但し $q^2 - \ell p^2 = \pm 1$ なる $p, q \in \mathbb{Z}_{>0}$ を用意しておいて，a_m, b_m を

$$\begin{bmatrix} b_m & \ell a_m \\ a_m & b_m \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} q & \ell p \\ p & q \end{bmatrix}^m$$

で定めた．すると

$$\{W \mid (1, 0, -\ell) \text{ の壁であって } \operatorname{codim} W = 0\} = \{W^0_m \mid m \in \mathbb{Z}\}.$$

$\{W^0_m\}$ を図示すると以下のようになる．t 軸に関して対象な配置になり，$s = \pm\sqrt{\ell/n}$ に収束していく半円の列になっている．

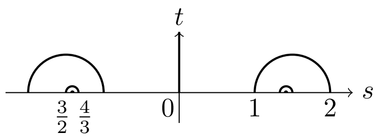

図 5.4.1　$n = 1$, $\ell = 2$ の場合の，余次元 0 の壁の様子．

壁の構造を使ったモジュライ空間の解析の例を紹介しよう．

定義. 図 5.4.2 のように，$m \in \mathbb{Z}$ に対して，W^0_m の外側の chamber を C^-_m, 内側の chamber を C^+_m とする．そして M_m を次で定める．

$$\mathrm{M}_m := \overline{\mathrm{M}}_{C^-_m}(1, 0, -\ell) \cap \overline{\mathrm{M}}_{C^+_{m-1}}(1, 0, -\ell).$$

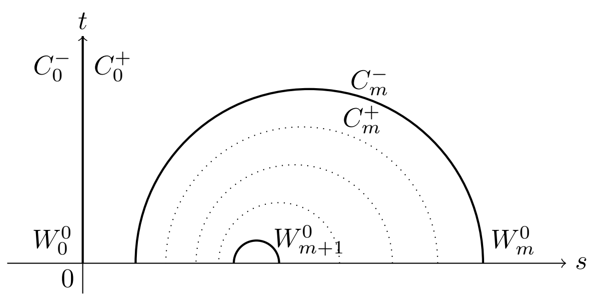

図 5.4.2　$C^\pm_m$ の定義．点線は余次元 1 以上の壁を意味する．

命題 5.4.4 (1) より，巨大体積極限では Bridgeland 安定性と Gieseker-丸山安定性は同値であった．このことと補題 5.4.6 から

補題 5.4.7.

$$\mathrm{M}_0 \simeq X \times \mathrm{Hilb}^{\ell}_X .$$

更に次のことが示せる.

命題 5.4.8. (1) 各 $m \in \mathbb{Z}$ に対して $\mathrm{M}_m \neq \emptyset$ かつ, 以下の双有理同値が存在する.

$$\mathrm{M}_m \dashrightarrow \overline{\mathrm{M}}_{C^+_{m-1}}(1,0,-\ell), \quad \mathrm{M}_m \dashrightarrow \overline{\mathrm{M}}_{C^-_m}(1,0,-\ell).$$

(2) ∃ 以下のような同型の列が存在する.

$$\cdots \longrightarrow M_{-2} \xrightarrow{\Psi_{-2}} M_{-1} \xrightarrow{\Psi_{-1}} M_0 \xrightarrow{\Psi_0} M_1 \xrightarrow{\Psi_1} M_2 \longrightarrow \cdots .$$

更に Ψ_m は, 半等質層のモジュライ空間 Y とその上の普遍族 $\mathcal{E}$ を使って, 次の形で書ける.

$$\Psi_m \simeq \Phi^{Y \to X}_{\mathcal{E}} \circ D_Y \circ \Phi^{X \to Y}_{\mathcal{E}^\vee}$$

最後に, 向井が [M80] で書いていて, [YY14] で証明が与えられている主張を紹介する.

定理. X は $\mathrm{NS}(X) = \mathbb{Z}H$ の主偏極 Abel 多様体とし, $v \in H^{\mathrm{ev}}(X,\mathbb{Z})_{\mathrm{alg}}$ は以下の三条件を満たすものとする.

- 正である.
- $\ell := \langle v^2 \rangle / 2 \in \mathbb{Z}$ は平方数ではない.
- $\#\{$ 判別式が ℓ の整数係数二次形式 $\}/\underset{\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})}{\sim} = 1.$

このとき

(1) $M_H(v) \dashrightarrow X \times \mathrm{Hilb}^{\ell}_X$.

(2) $\ell = 1,2,3$ なら (上の三条件は満たされていて) $M_H(v) \simeq X \times \mathrm{Hilb}^{\ell}(X)$.

主張は Gieseker-丸山の意味での安定層のモジュライに関するものであって, Bridgeland 安定性は登場していないことに注意する.

証明. (1) は §4.4.3 の定理 4.4.9 である. (2) の証明の概略を説明しよう.

$v = (r, dH, a)$ とする. まず二次形式の同値類の数に関する条件から, ある行列 $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ で

$$A \begin{bmatrix} r & d \\ d & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\ell \end{bmatrix}$$

となるものが存在する. ここで §4.4.3 の行列表記を用いた. $\mathrm{Aut}(\mathsf{D}(X))$ とその向井格子の変換群の記述を思い出すと, コホモロジー的 Fourier 向井変換が A で表されるような Fourier 変換 Φ が存在する. 命題 5.4.4 (2) (安定性の保存) より, $(1,0,-\ell)$ の chamber C が存在して, Φ は同型 $\mathrm{M}_H(v) \xrightarrow{\sim} \mathrm{M}_C(1,0,-\ell)$ を引き起こす.

ここで $\ell = 1,2,3$ の場合, $(1,0,-\ell)$ の壁で余次元 1 以上のものは存在しないことを用いると, ある $m \in \mathbb{Z}$ が存在して $C = C^+_{m-1} = C^-_m$ となる.

以上より

$$\mathrm{M}_H(v) \underset{\Phi}{\xrightarrow{\sim}} \mathrm{M}_{(\beta,\omega)}(1,0,-\ell) = \mathrm{M}_m \underset{\text{命題 5.4.8(2)}}{\xrightarrow{\sim}} \mathrm{M}_0 \underset{\text{補題 5.4.7}}{\simeq} X \times \mathrm{Hilb}^{\ell}_X .$$

□

5.5 その他の話題

他の代数曲面上の安定性条件, Bayer-Macríの仕事 [BM14a, BM14b], 3 次元 Abel 多様体上の安定性条件, 安定性条件の空間に入るべき構造.

参考文献

書籍

[BBHR] C. Bartocci, U. Bruzzo, D. Hernández Ruipérez, *Fourier-Mukai and Nahm Transforms in Geometry and Mathematical Physics*, Birkhäuser, 2009.

[FAG] B. Fantechi, L. Göttsche, L. Illusie, L. Kleiman, N. Nitsure, A. Vistoli, *Fundamental Algebraic Geometry*, American Mathematical Society, 2005.

[F98] R. Friedman, *Algebraic surfaces and holomorphic vector bundles*, Springer-Verlag, 1998.

[H06] D. Huybrechts, *Fourier-Mukai Transforms in Algebraic Geometry*, Oxford Univ. Press, 2006.

[HL10] D. Huybrechts, M. Lehn, *The Geometry of Moduli Spaces of Sheaves*, 2nd edit., Cambridge University Press, 2010.

[KS] M. Kashiwara, P. Schapira, *Sheaves on manifolds* Springer-Verlag, 1994.

[LP97] J. Le Potier, *Lectures on Vector Bundles*, translation from French version by A. Maciocia, Cambridge University Press, 1997.

[向井 08] 向井茂, **モジュライ理論 I, II**，岩波書店, 2008.

[OSS80] C. Okonek, M. Schneider, H. Spindler, *Vector Bundles on Complex Projective Spaces*, Birkhäuser, 1980.

[戸田 16] 戸田幸伸, **連接層の導来圏に関わる諸問題**, 数学書房, 2016.

解説記事

[川又 06] 川又雄二郎, **代数幾何学と導来圏**，数学 **58** (2006), 64–85.

[丸山 77] 丸山正樹, **代数的ベクトル束について**，数学 **29** (1977), 322–333.

[向井 87] 向井茂, **K3 曲面上のベクトル束のモジュライとシンプレクティック多様体**，数学 **39** (1987), 216–235.

[吉岡 04] 吉岡康太, **代数曲面上のベクトル束のモジュライ空間**，数学 **56** (2004), 225–247.

論文

[AK07] L. Álvarez-Cónsul, A. King, *A functorial construction of moduli of sheaves*, Invent. Math. **168** (2007), no. 3, 613–666.

[A57] M. F. Atiyah, *Vector bundles over an elliptic curve*, Proc. London Math. Soc., (3) **7** (1957) 414–452.

[BM14a] A. Bayer, E. Macrì, *Projectivity and birational geometry of Bridgeland moduli spaces*, J. Amer. Math. Soc., **27** (2014), no. 3, 707–752.

[BM14b] A. Bayer, E. Macrì, *MMP for moduli of sheaves on K3s via wall-crossing: nef and movable cones, Lagrangian fibrations*, Invent. Math., **198** (2014), no. 3, 505–590.

[BO01] A. Bondal, D. Orlov, *Reconstruction of a variety from the derived category and groups of autoequivalences*, Comp. Math., **125** (2001), 327–344.

[Br99] T. Bridgeland, *Equivalences of triangulated categories and Fourier-Mukai transforms*, Bull. London Math. Sac., **31** (1999), 25–34.

[B02] T. Bridgeland, *Flops and derived categories*, Invent. Math., **147** (2002), 613–632.

[B07] T. Bridgeland, *Stability conditions on triangulated categories*, Ann. Math., **166** (2007), 317–345.

[B08] T. Bridgeland, *Stability conditions on K3 surfaces*, Duke. Math. J., **141** (2008), 241–291.

[BKR] T. Bridgeland, A. King, M. Reid, *The McKay correspondence as an equivalence of derived categories*, J. Amer. Math. Soc., **14** (2001), 535–554.

[Gr57] A. Grothendieck, *Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann*, Amer. J. Math., **79** (1957), 121–138.

[H08] D. Huybrechts, *Derived and Abelian equivalences of K3 surfaces*, J. Alg. Goem. **17** (2008), 375–400.

[K04] Y. Kawamata, *Equivalences of derived categories of sheaves on smooth stacks*, Amer. J. Math., **126** (2004), 1057–1083.

[Ki] A. King, *Moduli of Representations of Finite Dimensional Algebras*, Quart. J. Math., **45** (1994), 515–530.

[L04] A. Langer, *Semistable sheaves in positive characteristic*, Ann. Math., (2) **159** (2004), no. 1, 251–276; Addendum: Ann. Math., 160 (2004), no. 3, 1211–1213.

[MYY] Minamide, Yanagida, Yoshioka, *Fourier-Mukai transforms and the wall-crossing behavior for Bridgeland's stability conditions*, J. Reine Angew. Math., **735** (2018), 1–107.

[M78] S. Mukai, *Semi-homogeneous vector bundles on an abelian variety*, J. Math. Kyoto Univ., **18** (1978), no. 2, 239–272.

[M80] 向井茂, アーベル曲面上のベクトル束の分類について, 数理解析研究所講究録 **409** (1980), 103–127.

[M81] S. Mukai, *Duality between* $D(X)$ *and* $D(\hat{X})$ *with its application to Picard sheaves*, Nagoya Math. J., **81** (1981), 153–175.

[M84] S. Mukai, *Symplectic structure of the moduli space of sheaves on an abelian or K3 surface*, Invent. Math., **77** (1984), no. 1, 101–116.

[R97] A. Rudakov, *Stability for an Abelian Category*, J. Alg., **197** (1997), 231–245.

[Se55] J.-P. Serre, *Un théorème de dualité*, Comment. Math. Helv., **29** (1955). 9–26.

[Se58] J.-P. Serre, *Modules projectifs et espaces fibrés à fibre vectorielle*, 1958 Séminaire P. Dubreil, M.-L. Dubreil-Jacotin et C. Pisot, 1957/58, Fasc. 2, Exposé 23.

[Ses67] C. S. Seshadri, *Space of unitary vector bundles on a compact Riemann surface*, Ann. Math., **85** (1967), 303–336.

[Si94] C. Simpson, *Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety. I*, Publ. Math. IHES, **79** (1994), 47–129.

[T72] F. Takemoto, *Stable vector bundles on algebraic surfaces*, Nagoya Math. J., **47** (1972), 29–48.

[Y03] K. Yoshioka, *Twisted stability and Fourier-Mukai transform I, II*, Comp. Math., **138** (2003), 261–288; Manuscripta math., **110** (2003), 433–465.

[Y09] K. Yoshioka, *Fourier-Mukai transform on abelian surfaces*, Math. Ann., **345** (2009), no. 3, 493–524.

[YY13] S. Yanagida, K. Yoshioka, *Semi-homogeneous sheaves, Fourier-Mukai transforms and moduli of stable sheaves on abelian surfaces*, J. Reine Angew. Math., **684** (2013), 31–86.

[YY14] S. Yanagida, K. Yoshioka, *Bridgeland's stabilities on abelian surfaces*, Math. Z., **276** (2014), Issue 1-2, 571–610.

以上です.