# 1 ベクトル空間

まず、実数体は、実数のなす集合 $\mathbb{R}$ と加法 $+\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$、乗法 $\cdot\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ で定義された写像からなる三組 $(\mathbb{R},+,\cdot)$ である。以下、加法と乗法を満たす性質を思い出す。

(A1) 任意の $a,b,c\in\mathbb{R}$ に対して、$(a+b)+c=a+(b+c)$ である。

(A2) 「任意の $a\in\mathbb{R}$ に対して、$a+0=a=0+a$」を満たす元 $0\in\mathbb{R}$ が存在する。

(A3) 任意の $a\in\mathbb{R}$ に対して、$a+b=0=b+a$ を満たす元 $b\in\mathbb{R}$ が存在する。

(A4) 任意の $a,b\in\mathbb{R}$ に対して、$a+b=b+a$ である。

(P1) 任意の $a,b,c\in\mathbb{R}$ に対して、$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ である。

(P2) 「任意の $a\in\mathbb{R}$ に対して、$a\cdot 1=a=1\cdot a$ を満たす」0 でない元 $1\in\mathbb{R}$ が存在する。

(P3) 任意の 0 でない $a\in\mathbb{R}$ に対して、$a\cdot b=1=b\cdot a$ を満たす元 $b\in\mathbb{R}$ が存在する。

(P4) 任意の $a,b\in\mathbb{R}$ に対して、$a\cdot b=b\cdot a$ である。

(D) 任意の $a,b,c\in\mathbb{R}$ に対して、$a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$ と $(a+b)\cdot c=(a\cdot c)+(b\cdot c)$ である。

注 1. 一般的に、集合 $K$ と以上の公理 (A1)–(A4)、(P1)–(P4)、(D) を満たす写像

$$+\colon K\times K\to K,\qquad \cdot\colon K\times K\to K$$

からなる三組 $(K,+,\cdot)$ は、体 (field) と呼ばれる。例として、集合 $\mathbb{F}_2=\{0,1\}$ と次のように定義された写像 $+\colon \mathbb{F}_2\times\mathbb{F}_2\to\mathbb{F}_2$、$\cdot\colon \mathbb{F}_2\times\mathbb{F}_2\to\mathbb{F}_2$ からなる三組 $(\mathbb{F}_2,+,\cdot)$ も体である。

$$\begin{array}{cccc} 0+0=0 & 0+1=1 & 1+0=1 & 1+1=0 \\ 0\cdot 0=0 & 0\cdot 1=0 & 1\cdot 0=0 & 1\cdot 1=1 \end{array}$$

この体は、位数 2 の有限体とよばれ、数学や情報理論での大切なものである。

---

授業ノート等：www.math.nagoya-u.ac.jp/~larsh/teaching/F2014_LA

**定義 2.** ベクトル空間とは、集合 $V$ と次の公理 (A1)–(A4) と (M1)–(M4) を満たす写像

$$+ \colon V \times V \to V, \qquad \cdot \colon \mathbb{R} \times V \to V$$

からなる三組 $(V, +, \cdot)$ である。

(A1) 任意の $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ に対して、$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ である。

(A2) 「任意の $\mathbf{u} \in V$ に対して、$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u} = \mathbf{0} + \mathbf{u}$」を満たす元 $\mathbf{0} \in V$ が存在する。

(A3) 任意の $\mathbf{u} \in V$ に対して、$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ を満たす元 $\mathbf{v} \in V$ が存在する。

(A4) 任意の $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ に対して、$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ である。

(M1) 任意の $a, b \in \mathbb{R}$、$\mathbf{u} \in V$ に対して、$(a \cdot b) \cdot \mathbf{u} = a \cdot (b \cdot \mathbf{u})$ である。

(M2) 任意の $a \in \mathbb{R}$、$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ に対して、$a \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = (a \cdot \mathbf{u}) + (a \cdot \mathbf{v})$ である。

(M3) 任意の $a, b \in \mathbb{R}$、$\mathbf{u} \in V$ に対して、$(a + b) \cdot \mathbf{u} = (a \cdot \mathbf{u}) + (b \cdot \mathbf{u})$ である。

(M4) 任意の $\mathbf{u} \in V$ に対して、$1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$ である。

注 3. ベクトル空間 $(V, +, \cdot)$ について、次の用語を用いることが多い。

(i) 集合 $V$ の元は、ベクトルと呼ばれ、太字 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \cdots$ で書かれている。

(ii) 集合 $\mathbb{R}$ の元は、スカラーと呼ばれ、小文字 $a, b, c, \cdots$ で書かれている。

(iii) ベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ に対して、$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$ は、$\mathbf{u}, \mathbf{v}$ のベクトル和と呼ばれる。

(iv) スカラー $a \in \mathbb{R}$ とベクトル $\mathbf{u} \in V$ に対して、ベクトル $a \cdot \mathbf{u} \in V$ は、$\mathbf{u}$ の $a$ 倍と呼ばれ、単に $a\mathbf{u}$ とも書かれている。

(v) 任意の $\mathbf{u} \in V$ に対して $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u} = \mathbf{0} + \mathbf{u}$ を満たすベクトル $\mathbf{0} \in V$ は、零ベクトルと呼ばれる。

(vi) ベクトル $\mathbf{u} \in V$ に対して、$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ を満たすベクトル $\mathbf{v} \in V$ は、ベクトル $\mathbf{u}$ の逆ベクトルと呼ばれ、$-\mathbf{u}$ と書かれる。

(vii) $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ のベクトル差は、$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$ で定義される。特に、任意のベクトル $\mathbf{u} \in V$ に対して、$\mathbf{u} - \mathbf{u} = \mathbf{0}$ である。

補題 **4.** $(V, +, \cdot)$ をベクトル空間とする。

(1) 零ベクトルについては、ただ一つが存在する。

(2) 任意の $\mathbf{u} \in V$ に対して、逆ベクトルは、ただ一つが存在する。

(3) 任意の $\mathbf{u} \in V$ に対して、$0\mathbf{u} = \mathbf{0}$ である。

(4) 任意の $\mathbf{u} \in V$ に対して、$(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$ である。

証明. (1) $\mathbf{0}, \mathbf{0}' \in V$ は、両方公理 (A2) を満たすとき、$\mathbf{0} = \mathbf{0}'$ であることを示せばよい。今、$\mathbf{0}$ は公理 (A2) を満たすため、$\mathbf{0}' = \mathbf{0}' + \mathbf{0}$ が分かる。同様に、$\mathbf{0}'$ は公理 (A2) を満たすため、$\mathbf{0}' + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ が分かる。すなわち、

$$\mathbf{0}' = \mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}$$

を示した。

(2) $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$ は、両方与えられた $\mathbf{u} \in V$ の逆ベクトルであることを仮定する。そのとき、

$$\mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v} + (\mathbf{u} + \mathbf{v}') = (\mathbf{v} + \mathbf{u}) + \mathbf{v}' = \mathbf{0} + \mathbf{v}' = \mathbf{v}'$$

が成り立つため、$\mathbf{u}$ の逆ベクトルの一意性を示した。

(3) $\mathbf{u} \in V$ において、

$$0\mathbf{u} = (0 + 0)\mathbf{u} = 0\mathbf{u} + 0\mathbf{u}$$

であるため、$\mathbf{0} = 0\mathbf{u}$ が分かる。

(4) 逆ベクトルの一意性より、$\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = \mathbf{0}$ を示せば良い。今、

$$\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = 1\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = (1 + (-1))\mathbf{u} = 0\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

であるため、補題を示した。 □

例 5. $n$ 次のユークリッド空間とは、次のように定義されたベクトル空間 $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ である。ここで、$\mathbb{R}^n$ は、$n$ 次の列ベクトル

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

のなす集合で、ベクトル和 $+\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ とスカラー積 $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ は、次の公式で定義された写像である。

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}, \qquad a \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au_1 \\ au_2 \\ \vdots \\ au_n \end{pmatrix}$$

例 6. 次のように、ベクトル空間 $(V, +, \cdot)$ を定める。$V$ を、任意の関数 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ からなる集合とし、ベクトル和とスカラー積を、それぞれの公式 $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ と $(af)(x) = af(x)$ で定める。このベクトル空間の零ベクトルは、定関数 $f(x) = 0$ である。

**命題 7.** $(V, +, \cdot)$ を、ベクトル空間とし、$W \subset V$ を、以下の性質 (i)—(iii) を満たす部分集合とする。このとき、$(W, +, \cdot)$ は、ベクトル空間である。

(i) $\mathbf{0} \in W$

(ii) 任意の $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ に対して、$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$ である。

(iii) 任意の $a \in \mathbb{R}$、$\mathbf{u} \in W$ に対して、$a\mathbf{u} \in W$ である。

証明. それぞれの性質 (ii) と (iii) により、$+\colon W \times W \to W$ と $\cdot : \mathbb{R} \times W \to W$ は、うまく定義された写像である。以下、公理 (A1)–(A4)、(M1)–(M4) が満たされていることを示す。まず、$(V, +, \cdot)$ が (A1)–(A4)、(M1)–(M4) を満たすため、$(W, +, \cdot)$ も (A1)、(A4)、(M1)–(M4) を満たすことが直ちに分かる。さらに、性質 (i) より、$V$ の零ベクトル $\mathbf{0}$ が $W$ に含まれているため、$(W, +, \cdot)$ が (A2) を満たすことが成り立つ。最後に、$(V, +, \cdot)$ が (A3) を満たすため、任意の $\mathbf{u} \in W$ に対して、$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ を満たす $\mathbf{v} \in V$ が存在することが分かる。しかし、補題 4 その (4) より、$\mathbf{v} = (-1)\mathbf{u}$ が分かるため、性質 (iii) より、$\mathbf{v} \in W$ を得る。よって、$(W, +, \cdot)$ が (A3) を満たすことを示した。 $\square$

定義 **8.** ベクトル空間 $(V,+,\cdot)$ において、以上の性質 (i)—(iii) を満たす部分集合 $W\subset V$ からなるようなベクトル空間 $(W,+,\cdot)$ は、$(V,+,\cdot)$ の部分空間とよばれる。

命題 **9.** $m\times n$ 行列 $A$ に対して、$W\subset\mathbb{R}^n$ を、解集合

$$W=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\mid A\mathbf{x}=\mathbf{0}\}\subset\mathbb{R}^n$$

とする。このとき、$(W,+,\cdot)$ は、ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^n,+,\cdot)$ の部分空間である。

証明. $W\subset\mathbb{R}^n$ が命題 7 の性質 (i)—(iii) を満たすことを示せばよい。$A\mathbf{0}=\mathbf{0}$ ため、(i) が成り立つ。任意の $\mathbf{u},\mathbf{v}\in W$ に対して、$A(\mathbf{u}+\mathbf{v})=A\mathbf{u}+A\mathbf{v}=\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$ ため、(ii) を得る。任意の $a\in\mathbb{R}$、$\mathbf{u}\in W$ に対して、$A(a\mathbf{u})=aA\mathbf{u}=a\mathbf{0}=\mathbf{0}$ なので、(iii) が成り立つ。よって、命題 7 より、$(W,+,\cdot)$ は、$(\mathbb{R}^n,+,\cdot)$ の部分空間であることが分かる。 □

定義 **10.** $m\times n$ 行列 $A$ において、解集合

$$W=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\mid A\mathbf{x}=\mathbf{0}\}\subset\mathbb{R}^n$$

からなる部分空間 $(W,+,\cdot)\subset(\mathbb{R}^n,+,\cdot)$ は、$A$ の核または $A$ のカーネル（kernel）と呼ばれ、$\ker(A)$ と書かれる。

例 11. (1) 次の部分集合 $W\subset\mathbb{R}^2$ について、$(W,+,\cdot)$ は $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ の部分空間である。

$$W=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2\mid 2x_1-3x_2=0\}$$

ただし、$(W,+,\cdot)$ は $1\times 2$ 行列 $A=\begin{pmatrix}2 & -3\end{pmatrix}$ のカーネルである。

(2) 次の部分集合 $Z\subset\mathbb{R}^2$ は、ユークリッド空間 $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ の部分空間ではない。

$$Z=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2\mid 2x_1-3x_2=1\}$$

なぜなら、$Z$ は、零ベクトル $\mathbf{0}$ を含まない。