絶対 Galois 群による数体の復元

星 裕一郎 (京都大学 数理解析研究所)

2014 年 5 月

本稿は, 早稲田大学で開催された “第 18 回早稲田整数論研究集会” において 2014 年 3 月 11 日に星が行った講演 “Reconstruction of a Number Field from the Absolute Galois Group” の報告原稿である. 基本的には講演の内容をただ纏めたものであるが, 一方, ここでは, 全体を通じて, 講演での説明よりも丁寧なそれを与えたつもりである.

0 記号 · 用語

§0 では, 本稿に登場する記号 · 用語の内, それほど一般的ではないと思われるものを説明する.

• 可換モノイド ($\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ 単位元を持つ可換半群) M に対して, $M^{\circledast} \overset{\text{def}}{=} M \sqcup \{*_M\}$ を M と一元集合 $\{*_M\}$ の非交和とする. 任意の $a \in M$ に対して $a \cdot *_M = *_M \cdot a = *_M \cdot *_M = *_M$ と定義することによって, $M^{\circledast}$ を可換モノイドと考える.

• M を加群, r を正整数とする. $M[r] \subseteq M$ を r 倍写像 $M \to M$; $a \mapsto ra$ の核として得られる M の部分加群, $M_{\mathrm{tor}} \overset{\text{def}}{=} \varinjlim_{n\geq 1} M[n]$ を M の捻れ元による部分加群とする. また, $T(M) \overset{\text{def}}{=} \varprojlim_{n\geq 1} M[n]$, $M^{\wedge} \overset{\text{def}}{=} \varprojlim_{n\geq 1} M/nM$ と書く. (例えば M が有限生成ならば, $M^{\wedge}$ は M の副有限完備化と一致する.)

• 位相群 G に対して, G^{ab} をその (位相群としての) アーベル化 (つまり, G の交換子群の閉包による剰余群) とする. また, $G^{\mathrm{ab/tor}} \overset{\text{def}}{=} G^{\mathrm{ab}}/(G^{\mathrm{ab}})_{\mathrm{tor}}$ と書く.

• K を体, r を正整数とする. $K_{\times}$ を K をその乗法構造によって可換モノイドと考えたもの, $K^{\times} \overset{\text{def}}{=} K \setminus \{0\}$ を K の非零元のなす群 (特に, 自然な同型 $(K^{\times})^{\circledast} \xrightarrow{\sim} K_{\times}$ が存在する), $\boldsymbol{\mu}(K) \overset{\text{def}}{=} (K^{\times})_{\mathrm{tor}} \subseteq K^{\times}$ を K の中の 1 の巾根のなす部分群, $\boldsymbol{\mu}_r(K) \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{\mu}(K)[r] \subseteq K^{\times}$ を K の中の 1 の r 乗根のなす部分群とする. また, K が標数 0 の代数的閉体のとき, $\Lambda(K) \overset{\text{def}}{=} T(\boldsymbol{\mu}(K))$ (つまり, “$\widehat{\mathbb{Z}}(1)$”) と書き, これを K に付随する **円分物** と呼ぶ.

• K を体とする. K が $\mathbb{Q}$ のある有限次拡大と同型であるとき, K は **NF** (= Number Field) であると言うことにする. ある素数 p が存在して K が $\mathbb{Q}_p$ のある有限次拡大と同型であるとき, K は **MLF** (= Mixed-characteristic Local Field) であると言うことにする.

1 Neukirch・内田の定理と単遠アーベル的復元

本稿の主題は, 以下の問に対する考察である.

問: 与えられた NF をその絶対 Galois 群から復元することはできるか?

この問の 1 つの古典的な肯定的解答として, 次の Neukirch・内田の定理を挙げることができる ([12], Theorem; [13], Theorem を参照[*1]).

Neukirch・内田の定理. $\square \in \{\circ, \bullet\}$ に対して, $F_\square$ を大域体 (つまり, NF か, あるいは, 有限体上の 1 変数代数関数体), $\overline{F}_\square$ を $F_\square$ の分離閉包, $G_\square \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Gal}(\overline{F}_\square/F_\square)$ を $\overline{F}_\square$ を基点とする $F_\square$ の絶対 Galois 群とする. また, $\mathrm{Isom}(\overline{F}_\circ/F_\circ, \overline{F}_\bullet/F_\bullet)$ を体の同型射 $\overline{F}_\circ \xrightarrow{\sim} \overline{F}_\bullet$ であって全単射 $F_\circ \xrightarrow{\sim} F_\bullet$ を誘導するもの全体のなす集合, $\mathrm{Isom}(G_\bullet, G_\circ)$ を位相群の同型射 $G_\bullet \xrightarrow{\sim} G_\circ$ 全体のなす集合とする. このとき, 共役による写像

$$\mathrm{Isom}(\overline{F}_\circ/F_\circ, \overline{F}_\bullet/F_\bullet) \longrightarrow \mathrm{Isom}(G_\bullet, G_\circ)$$

は全単射である.

$F_\circ$, $F_\bullet$ を NF, $G_\circ$, $G_\bullet$ をその絶対 Galois 群とすると, この定理によって, 特に, $F_\circ$ と $F_\bullet$ が体として同型であることと, $G_\circ$ と $G_\bullet$ が位相群として同型であることが同値であることがわかる. つまり, NF の絶対 Galois 群の位相群としての同型類によって, その NF の同型類が完全に決定される. 別の表現を用いれば, 絶対 Galois 群は NF に対する "完全な不変量" であるということがわかる. この意味において, "その絶対 Galois 群によって NF を復元することができる" と考えることが可能であろう.

一方, 望月新一氏は, [8] の中で, "そもそも復元とは何か?" という問についての考察を行い, そこで, "双遠アーベル的復元", "単遠アーベル的復元" という考え方を提唱した. この考え方のある側面を簡単に述べてしまうと, これは, "何を遂行すれば所望の復元が完了したと考えるか" という "復元という行為の完了の基準" の設定の問題であると言えるであろう. 本稿の主題である問の場合に, "双的な復元, 双遠アーベル的復元" の復元完了基準を具体的に述べれば, 例えば以下のようになる.

双遠アーベル的復元: NF $F_\circ$, $F_\bullet$ とそれらの代数閉包 $\overline{F}_\circ$, $\overline{F}_\bullet$ に対して, 同値

[*1] 以下の定式化の場合, 厳密には, 例えば [10], Theorem 12.1.9, などといった事実も必要である.

"$F_\circ \simeq F_\bullet \Leftrightarrow G_\circ \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Gal}(\overline{F}_\circ/F_\circ) \simeq G_\bullet \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Gal}(\overline{F}_\bullet/F_\bullet)$", あるいは, それより強く, "写像 $\mathrm{Isom}(\overline{F}_\circ/F_\circ, \overline{F}_\bullet/F_\bullet) \to \mathrm{Isom}(G_\bullet, G_\circ)$ の全単射性" が証明できたとき, 復元は "双遠アーベル的" に完了.

つまり, さきほど復習した Neukirch · 内田の定理の証明を与えることが, 双遠アーベル的復元の遂行に他ならない. それでは, この場合の "単的な復元, 単遠アーベル的復元" の復元完了基準は何であろうか. それは例えば以下のとおりである.

単遠アーベル的復元: NF F とその代数閉包 $\overline{F}$ に対して, (抽象的な) 位相群 $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ から出発して $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ 作用付き体 $\overline{F}$ を (したがって, $\overline{F}^{\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)}$ として F を) 構成する関手的な "群論的手続き" を与えることができたとき, 復元は "単遠アーベル的" に完了.

つまり, 復元の "入力" から "出力" を生成する関手的な手続きを与えることができたとき, "単的な復元" は完了するのである. このように, 2 つの対象 (つまり, "$F_\circ$ と $F_\bullet$") を比較して復元を議論するのではなく, 単独の対象 (つまり, "F") によってその復元を議論するので, "双" ではなく "単" なのである. また, 上の具体的な例からも推測できるように, 通常は, 単遠アーベル的復元を遂行すれば, その系として, 双遠アーベル的復元が得られる.

復元の "双版", 双遠アーベル的復元:

$$F_\circ \simeq F_\bullet \stackrel{?}{\Leftrightarrow} G_\circ \simeq G_\bullet,\ \text{あるいは},\ \mathrm{Isom}(\overline{F}_\circ/F_\circ, \overline{F}_\bullet/F_\bullet) \stackrel{?}{\xrightarrow{\sim}} \mathrm{Isom}(G_\bullet, G_\circ).$$

復元の "単版", 単遠アーベル的復元:

$$\mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \stackrel{?}{\rightsquigarrow} \overline{F}/F.$$

単遠アーベル的復元 $\rightsquigarrow$ 双遠アーベル的復元.

以上が, [8] で提唱されている "双遠アーベル的復元", "単遠アーベル的復元" という考え方の簡単な解説である[*2].

一方, もちろん, "双遠アーベル的復元" と "単遠アーベル的復元" の差が, 高々結論の定式化の差として生じている場合もあるであろう. つまり, もしもある定理が "双版" で述べられていても, 実質的にはその "単版" を証明していることもあるであろう. 実際, さき

[*2] しかしながら, 実際には, ([8] においても言及されているが) この "単版" を厳密に定式化することは困難である. [8] では, 対数 Frobenius 関手を用いて "対数 Frobenius 両立性" という枠組みの中で, "双" と "単" の違いの説明を試みている.

ほど復習した Neukirch · 内田の定理の証明を検証してみると,

関数体の場合, その証明は “単遠アーベル的復元” を与えている

ことがわかる. (これについては, §3 — 特に, 3.9 — で少し説明を行う.) つまり, Neukirch · 内田の定理の証明から, 実際には以下の主張を証明することができる.

関数体の単遠アーベル的復元可能性[*3]**.** F を有限体上の 1 変数代数関数体, $\overline{F}$ を F の分離閉包とする. このとき, (抽象的な) 位相群 $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ から出発して $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ 作用付き体 $\overline{F}$ を (したがって, $\overline{F}^{\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)}$ として F を) 構成する (位相群の開単射に関して) 関手的な “群論的手続き” を与えることができる.

それでは NF の場合はどうであろうか. 再び Neukirch · 内田の定理の証明を検証してみると,

NF の場合, その証明は “単遠アーベル的復元” を与えていない

ことがわかる. つまり,

Neukirch · 内田の定理の証明から, 絶対 Galois 群を出発点として元々の NF を群論的に構成する手続きを得ることは (少なくとも直ちには) できない

のである.

本稿 (そして, 講演) の主結果の概要を述べるために, 定義を与える.

定義. G を位相群とする. NF (あるいは MLF) K, K の代数閉包 $\overline{K}$, (位相群としての) 同型射 $\alpha\colon \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) \xrightarrow{\sim} G$ からなる 3 つ組 $(K, \overline{K}, \alpha)$ を G の **NF 包絡** (あるいは **MLF 包絡**) と呼ぶ. 位相群が NF 包絡 (あるいは MLF 包絡) を持つとき, その位相群は **NF 型** (あるいは **MLF 型**) であると言うことにする.

この準備のもと, 主結果の概要は以下のように述べられる.

[*3] 単遠アーベル的復元は, “所望の手続きの存在を証明する” ことが目的なのではなく, “所望の手続きを与える” ことが目的である. 特に, 主張の中にその手続きを書くべきとされる. この考えから, ここを “関数体の単遠アーベル的復元” ではなく “関数体の単遠アーベル的復元可能性” としている. 例えば, [8], Corollary 1.10, は, その主張を述べるためにおよそ 3 ページが費やされ, しかし, 証明がたったの 2 行で終わってしまうという, 従来の数学では比較的珍しい構成になっている. このような状況が生じる背景には, この “主張の中にその手続きを書くべき” という考えがある.

主結果の概要. NF 型位相群 G から G 作用付き代数的閉体 $\overline{F}(G)$ を (位相群の開単射に関して) 関手的に構成する “群論的手続き” が存在する:

$$G \quad \rightsquigarrow \quad (\overline{F}(G) \ \curvearrowleft \ G).$$

しかも, この手続きは様々な両立性条件を満たす. 特に, G の NF 包絡 $(F, \overline{F}, \alpha\colon G_F \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \xrightarrow{\sim} G)$ に対して, (G_F, G) 同変な自然な同型射 $\overline{F} \xrightarrow{\sim} \overline{F}(G)$ が存在する.

より大雑把に纏めてしまえば, 上の概要は, “NF に対してある単遠アーベル的復元が可能である” ということを主張している.

次節以降で, 主結果の概要で言及されている “手続き” の内容を説明する. 特に, §2 では局所的な単遠アーベル的復元に関する議論の復習を行い, §3 では NF の復元の手続きを解説する. 単遠アーベル的復元による構成は “■” で示してあるので, すべての “■” を拾えば (そして, その構成の正当性を認めれば), 主定理の (正確な主張の内の手続きの内容に相当する部分とその) 証明がある程度わかるようになっている.

最後に, 主結果に関する注意を与えて, §1 を終える.

- この主結果の証明には Neukirch · 内田の定理が用いられる. したがって, 主結果に至る議論は, Neukirch · 内田の定理の別証明を与えない.

- 本稿 (そして, 講演) では, 簡単のため, NF の “絶対 Galois 群” に関してのみ議論を行ったが, 実際には, “絶対 Galois 群の適切な商” に対して同様の結論を得ることが可能である.

2 局所理論の復習

§2 では, MLF に対する単遠アーベル的復元に関するいくつかの結果を復習しよう. k を MLF, $\overline{k}$ を k の代数閉包とする. $\mathcal{O}_k \subseteq k$ を k の整数環, $\mathcal{O}_k^{\triangleright} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{O}_k \setminus \{0\} \subseteq k^\times$ を非零整数のなす (乗法に関する) 位相モノイド, $\mathfrak{m}_k \subseteq \mathcal{O}_k$ を $\mathcal{O}_k$ の極大イデアル, $U_k^{(1)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} 1 + \mathfrak{m}_k \subseteq \mathcal{O}_k^\times$ を主単数のなす位相群, $\underline{k} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{O}_k/\mathfrak{m}_k$ を $\mathcal{O}_k$ の剰余体, $\overline{\underline{k}}$ を $\overline{k}$ によって定まる $\underline{k}$ の代数閉包, $G_k \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ を $\overline{k}$ を基点とする k の絶対 Galois 群, $I_k \subseteq G_k$ を G_k の惰性群, $P_k \subseteq I_k$ を G_k の暴惰性群, $\mathrm{Frob}_{\underline{k}} \in \mathrm{Gal}(\overline{\underline{k}}/\underline{k})$ を Frobenius

元とする. このとき, 局所類体論によって, 図式

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathcal{O}_k^{\times} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & (k^{\times})^{\wedge} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & \widehat{\mathbb{Z}} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathrm{Im}(I_k \to G_k^{\mathrm{ab}}) \arrow[r] & G_k^{\mathrm{ab}} \arrow[r] & G_k/I_k \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

— ここで, 水平の列は完全, 右側の垂直な射は $1 \in \widehat{\mathbb{Z}}$ を $\mathrm{Frob}_{\underline{k}} \in \mathrm{Gal}(\overline{\underline{k}}/\underline{k}) \xleftarrow{\sim} G_k/I_k$ に写す位相同型射, 右側の上の水平な射は k の付値が誘導する全射 — を可換とする自然な位相同型射

$$(k^{\times})^{\wedge} \xrightarrow{\sim} G_k^{\mathrm{ab}}$$

が存在する. この位相同型射 $(k^{\times})^{\wedge} \xrightarrow{\sim} G_k^{\mathrm{ab}}$ を用いることによって, $k^{\times}$ $(\subseteq (k^{\times})^{\wedge})$ の様々な部分モノイドを G_k^{ab} の部分モノイドと考えることにしよう. また, k の有限次拡大 $K \subseteq \overline{k}$ が与えられたとき, それぞれ k, K に対するこの位相同型射 $(k^{\times})^{\wedge} \xrightarrow{\sim} G_k^{\mathrm{ab}}$, $(K^{\times})^{\wedge} \xrightarrow{\sim} G_K^{\mathrm{ab}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Gal}(\overline{k}/K)^{\mathrm{ab}}$ は, 図式

$$\begin{tikzcd}
(k^{\times})^{\wedge} \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & (K^{\times})^{\wedge} \arrow[d, "\wr"'] \\
G_k^{\mathrm{ab}} \arrow[r] & G_K^{\mathrm{ab}}
\end{tikzcd}$$

— ここで, 上の水平の射は包含 $k \subseteq K$ から定まる射, 上の水平の射は包含 $G_K \subseteq G_k$ に関する移行射 — を可換とする. したがって, MLF の乗法群や絶対 Galois 群に関するよく知られた事実によって, 以下の主張が成立する.

- k の剰余標数 $\mathrm{char}(\underline{k})$ は, 以下の条件を満たす唯一の素数 l である: $\log_l(\sharp(G_k^{\mathrm{ab/tor}}/l \cdot G_k^{\mathrm{ab/tor}})) \geq 2$.

  以降, 簡単のため, $p \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{char}(\underline{k})$ と書く.

- $d_k \stackrel{\mathrm{def}}{=} [k : \mathbb{Q}_p] = \log_p(\sharp(G_k^{\mathrm{ab/tor}}/p \cdot G_k^{\mathrm{ab/tor}})) - 1$.

- $f_k \stackrel{\mathrm{def}}{=} [\underline{k} : \mathbb{F}_p] = \log_p(\sharp(G_k^{\mathrm{ab}})_{\mathrm{tor}}^{(p')} + 1)$ — ただし, $(G_k^{\mathrm{ab}})_{\mathrm{tor}}^{(p')}$ は, $(G_k^{\mathrm{ab}})_{\mathrm{tor}}$ の元で位数が p と素なもののなす部分加群.

- I_k は, G_k の開部分群 $\mathrm{Gal}(\overline{k}/K) \subseteq G_k$ — ただし, $K \subseteq \overline{k}$ は k の有限次拡大 — であって, $d_K/f_K = d_k/f_k$ を満たすものすべての共通部分と一致する.

- P_k は I_k の唯一の副 p Sylow 部分群である.

- $\mathrm{Frob}_{\underline{k}} \in \mathrm{Gal}(\overline{\underline{k}}/\underline{k}) \xleftarrow{\sim} G_k/I_k$ は, 共役による作用 $G_k \to \mathrm{Aut}(I_k)$ が誘導する作用 $G_k/I_k \to \mathrm{Aut}(I_k/P_k)$ による像が p^{f_k} 倍写像となる G_k/I_k の唯一の元である.

- $U_k^{(1)}$ は $\mathcal{O}_k^\times$ の唯一の副 p Sylow 部分群である.

- G_k 作用付き加群の完全系列たち $\{1 \to \boldsymbol{\mu}_n(\overline{k}) \to \overline{k}^\times \overset{n}{\to} \overline{k}^\times \to 1\}_{n\geq 1}$ が定める Kummer 射 $\mathrm{Kmm}_k\colon k^\times \to H^1(G_k, \Lambda(\overline{k}))$ は単射である.

G を MLF 型位相群[*4] とする. 以上の事実をもとに, MLF 型位相群 G に対して, 以下のように単遠アーベル的復元を実行する.

■ 素数 $\mathrm{ch}(G)$ を, 以下の条件を満たす (唯一の) 素数 l として定義する: $\log_l(\sharp(G^{\mathrm{ab/tor}}/l\cdot G^{\mathrm{ab/tor}})) \geq 2$.

■ $d(G) \overset{\mathrm{def}}{=} \log_{\mathrm{ch}(G)}(\sharp(G^{\mathrm{ab/tor}}/\mathrm{ch}(G)\cdot G^{\mathrm{ab/tor}})) - 1$.

■ $f(G) \overset{\mathrm{def}}{=} \log_{\mathrm{ch}(G)}(\sharp(G^{\mathrm{ab}})_{\mathrm{tor}}^{(\mathrm{ch}(G)')} + 1)$ — ただし, $(G^{\mathrm{ab}})_{\mathrm{tor}}^{(\mathrm{ch}(G)')}$ は, $(G^{\mathrm{ab}})_{\mathrm{tor}}$ の元で位数が $\mathrm{ch}(G)$ と素なもののなす部分加群.

■ $I(G) \overset{\mathrm{def}}{=} \bigcap_{G^\dagger\subseteq G:\ \text{開部分群 s.t. } \frac{d(G)}{f(G)}=\frac{d(G^\dagger)}{f(G^\dagger)}} G^\dagger$ [*5].

■ $P(G)$ を $I(G)$ の (唯一の) 副 $\mathrm{ch}(G)$ Sylow 部分群として定義する.

■ $\mathrm{Frob}(G) \in G/I(G)$ を, 共役による作用 $G \to \mathrm{Aut}(I(G))$ が誘導する作用 $G/I(G) \to \mathrm{Aut}(I(G)/P(G))$ による像が $\mathrm{ch}(G)^{f(G)}$ 倍写像となる $G/I(G)$ の (唯一の) 元として定義する.

■ $\mathcal{O}^\times(G) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Im}(I(G) \to G^{\mathrm{ab}}) \subseteq G^{\mathrm{ab}}$. ここで, 指数有限部分群をその開部分群と考えることによって, $\mathcal{O}^\times(G)$ を位相加群と考える.

■ $k^\times(G) \overset{\mathrm{def}}{=} G^{\mathrm{ab}} \times_{G/I(G)} \mathrm{Frob}(G)^{\mathbb{Z}} \subseteq G^{\mathrm{ab}}$. ここで, 部分加群 $\mathcal{O}^\times(G) \subseteq k^\times(G)$ の位相から定まる位相により, $k^\times(G)$ を位相加群と考える.

■ $k_\times(G) \overset{\mathrm{def}}{=} k^\times(G)^{\circledast}$.

■ $\mathcal{O}^\triangleright(G) \overset{\mathrm{def}}{=} G^{\mathrm{ab}} \times_{G/I(G)} \mathrm{Frob}(G)^{\mathbb{N}} \subseteq k^\times(G)$. ここで, 部分加群 $\mathcal{O}^\times(G) \subseteq \mathcal{O}^\triangleright(G)$ の位相から定まる位相により, $\mathcal{O}^\triangleright(G)$ を位相モノイドと考える.

■ $U^{(1)}(G)$ を $\mathcal{O}^\times(G)$ の (唯一の) 副 $\mathrm{ch}(G)$ Sylow 部分群として定義する.

---

*4 MLF 型位相群は位相的に有限生成な副有限群であることが知られており (例えば [10], Theorem 7.4.1, を参照), また, 位相的に有限生成な副有限群の開部分群は “指数有限な部分群” として特徴付けることが可能であることが知られている ([11], Theorem 1.1, を参照). したがって, 特に, MLF 型位相群に対する様々な単遠アーベル的復元は, その “入力” を, より原始的な対象である “MLF 型位相群から位相を忘れて得られる下部構造としての群” に取替えることも可能である.

*5 その定義から, MLF 型位相群の開部分群は再び MLF 型であることに注意.

■ $\overline{k}^{\times}(G) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varinjlim_{G^{\dagger} \subseteq G\colon \text{開部分群}} k^{\times}(G^{\dagger})$ — ただし, 開部分群 $G^{\ddagger} \subseteq G^{\dagger} \subseteq G$ に対して, 遷移射 $k^{\times}(G^{\dagger}) \to k^{\times}(G^{\ddagger})$ は, 移行射 $(G^{\dagger})^{\mathrm{ab}} \to (G^{\ddagger})^{\mathrm{ab}}$ が誘導する射とする. 共役によって定まる G の $\overline{k}^{\times}(G)$ への作用によって, $\overline{k}^{\times}(G)$ を G 作用付き加群と考える.

■ $\overline{k}_{\times}(G) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \overline{k}^{\times}(G)^{\circledast}$. G の $\overline{k}^{\times}(G)$ への作用から定まる G の $\overline{k}_{\times}(G)$ への作用によって, $\overline{k}_{\times}(G)$ を G 作用付きモノイドと考える.

■ $\boldsymbol{\mu}(G) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \overline{k}^{\times}(G)_{\mathrm{tor}}$. G の $\overline{k}^{\times}(G)$ への作用から定まる G の $\boldsymbol{\mu}(G)$ への作用によって, $\boldsymbol{\mu}(G)$ を G 作用付き加群と考える.

■ $\Lambda(G) \stackrel{\mathrm{def}}{=} T(\boldsymbol{\mu}(G))$. G の $\boldsymbol{\mu}(G)$ への作用から定まる G の $\Lambda(G)$ への作用によって, $\Lambda(G)$ を G 作用付き加群と考える.

■ G 作用付き加群の完全系列たち $\{1 \to \boldsymbol{\mu}(G)[n] \to \overline{k}^{\times}(G) \stackrel{n}{\to} \overline{k}^{\times}(G) \to 1\}_{n\geq 1}$ が定める単射 $k^{\times}(G) \hookrightarrow H^1(G, \Lambda(G))$ を $\mathrm{Kmm}(G)$ と書く.

その構成から, $(k, \overline{k}, \alpha\colon G_k \stackrel{\sim}{\to} G)$ を G の MLF 包絡とすると, 以下の事実が従うことを確認することができる.

(1) 等式 $\mathrm{char}(\underline{k}) = \mathrm{ch}(G)$, $d_k = d(G)$, $f_k = f(G)$ が成立する.

(2) 同型射 α は位相群の可換図式

$$\begin{array}{ccccc}
P_k & \stackrel{\subset}{\longrightarrow} & I_k & \stackrel{\subset}{\longrightarrow} & G_k \\
\wr\downarrow & & \wr\downarrow & & \wr\downarrow\alpha \\
P(G) & \stackrel{\subset}{\longrightarrow} & I(G) & \stackrel{\subset}{\longrightarrow} & G
\end{array}$$

を定めて, しかも, 誘導された位相同型射 $G_k/I_k \stackrel{\sim}{\to} G/I(G)$ は $\mathrm{Frob}_{\underline{k}} \in \mathrm{Gal}(\overline{\underline{k}}/\underline{k}) \stackrel{\sim}{\leftarrow} G_k/I_k$ を $\mathrm{Frob}(G) \in G/I(G)$ に写す.

(3) 同型射 α は位相モノイドの可換図式

$$\begin{array}{ccccccc}
U_k^{(1)} & \stackrel{\subset}{\longrightarrow} & \mathcal{O}_k^{\times} & \stackrel{\subset}{\longrightarrow} & \mathcal{O}_k^{\rhd} & \stackrel{\subset}{\longrightarrow} & k^{\times} \\
\wr\downarrow & & \wr\downarrow & & \wr\downarrow & & \wr\downarrow \\
U^{(1)}(G) & \stackrel{\subset}{\longrightarrow} & \mathcal{O}^{\times}(G) & \stackrel{\subset}{\longrightarrow} & \mathcal{O}^{\rhd}(G) & \stackrel{\subset}{\longrightarrow} & k^{\times}(G)
\end{array}$$

を定める.

(4) 同型射 α はモノイドの間の (G_k, G) 同変な同型射

$$k_{\times} \stackrel{\sim}{\longrightarrow} k_{\times}(G), \quad \overline{k}^{\times} \stackrel{\sim}{\longrightarrow} \overline{k}^{\times}(G), \quad \overline{k}_{\times} \stackrel{\sim}{\longrightarrow} \overline{k}_{\times}(G), \quad \boldsymbol{\mu}(\overline{k}) \stackrel{\sim}{\longrightarrow} \boldsymbol{\mu}(G), \quad \Lambda(\overline{k}) \stackrel{\sim}{\longrightarrow} \Lambda(G)$$

を誘導する.

(5) (3), (4) に登場した同型射 $k^\times \xrightarrow{\sim} k^\times(G)$, $\Lambda(\overline{k}) \xrightarrow{\sim} \Lambda(G)$ は, 図式

$$\begin{array}{ccc} k^\times & \xrightarrow{\mathrm{Kmm}_k} & H^1(G_k, \Lambda(\overline{k})) \\ \wr\downarrow & & \wr\downarrow \\ k^\times(G) & \xrightarrow{\mathrm{Kmm}(G)} & H^1(G, \Lambda(G)) \end{array}$$

を可換にする.

これまでの議論によって, MLF に対する様々な概念の単遠アーベル的復元が得られた.

$$G \quad \rightsquigarrow \quad \mathrm{ch}(G),\ d(G),\ f(G),\ P(G) \subseteq I(G) \subseteq G,$$
$$U^{(1)}(G) \subseteq \mathcal{O}^\times(G) \subseteq \mathcal{O}^\triangleright(G) \subseteq k^\times(G) \subseteq k_\times(G),$$
$$\boldsymbol{\mu}(G) \subseteq \overline{k}^\times(G) \subseteq \overline{k}_\times(G) \curvearrowleft G,\ \Lambda(G) \curvearrowleft G,\ \mathrm{Kmm}(G)\colon k^\times(G) \hookrightarrow H^1(G, \Lambda(G)).$$

§2 の最後に, (本稿で目標としている復元とは直接の関連はないが) MLF それ自体の復元について, 簡単な解説を与えよう. 良く知られているように, MLF に対する Neukirch · 内田の定理の類似は成立しない. 実際, 体として同型ではない 2 つの MLF であって, その絶対 Galois 群が位相群として同型となるものが存在することが知られている (例えば [4], §2, を参照). したがって, (“双”, “単” どちらの意味にしても) MLF の絶対 Galois 群から元の MLF を復元することはできない.

一方, MLF の絶対 Galois 群に適当な付加構造を与えて, その付加構造付き位相群から出発すれば, 元の MLF を復元できる場合がある. そういったタイプの結果は, 例えば, [5], [7], [2] で与えられている. そこで証明されている結果 (の一部) は, 以下のように纏められる.

定理. $\square \in \{\circ, \bullet\}$ に対して, $k_\square$ を MLF, $\overline{k}_\square$ を $k_\square$ の代数閉包, $G_\square \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Gal}(\overline{k}_\square/k_\square)$ を $\overline{k}_\square$ を基点とする $k_\square$ の絶対 Galois 群とする. また, $\alpha\colon G_\circ \to G_\bullet$ を位相群の間の開準同型射, p を $k_\circ$ の剰余標数とする. (開準同型射 α の存在から, $k_\bullet$ の剰余標数も p となる[*6] — [7], Proposition 3.4, を参照.) このとき, 以下の 3 つの条件は同値である.

(1) α は幾何的 ([7], Definition 3.1, (iv), を参照) である. 即ち, $k_\bullet$ を $k_\circ$ の部分体に写す体の同型射 $\overline{k}_\bullet \xrightarrow{\sim} \overline{k}_\circ$ が存在して, α はその同型射から生じる.

[*6] もしも α が開単射ならば, これは, 上で得られた “char($\underline{k}$)” の特徴付けからも従う.

(2) α は CHT 型 ([7], Definition 3.1, (iv), を参照) である．即ち, $\Box \in \{\circ, \bullet\}$ に対して, $\chi_\Box^{\mathrm{cyc}}\colon G_\Box \to \mathbb{Z}_p^\times$ を p 進円分指標, $\widehat{\overline{k}}_{\Box +}$ を $\overline{k}_\Box$ の p 進完備化として得られる体をその加法構造によって $G_\Box$ 作用付き位相加群と考えたものとすると, 等式 $\chi_\circ^{\mathrm{cyc}} = \chi_\bullet^{\mathrm{cyc}} \circ \alpha$ が成立して[*7], かつ, $G_\circ$ 作用付き位相加群 $\widehat{\overline{k}}_{\circ +}$ と $G_\circ$ 作用付き位相加群 $\alpha^*(\widehat{\overline{k}}_{\bullet +})$ は同型となる．

(3) α は HT 保存的 ([2], Definition 1.3, (i), を参照) である．即ち, 任意の p 進表現 $\rho\colon G_\bullet \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ に対して, ρ が Hodge・Tate 表現ならば, $\rho \circ \alpha\colon G_\circ \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ も Hodge・Tate 表現となる．

その上, もしも α が同型射であるならば, これらの条件は, 次の (4) とも同値である．

(4) α は RF 保存的 ([7], Definition 3.6, (iii), を参照) である．即ち, α は $G_\circ, G_\bullet$ の上付き高次分岐群によるフィルトレーションを保つ．

同値 (1) $\Leftrightarrow$ (4), (1) $\Leftrightarrow$ (2), (1) $\Leftrightarrow$ (3) はそれぞれ, [5], Theorem; [7], Theorem 3.5, (i); [2], Theorem, で与えられている．

[5]: G_k + 上付き高次分岐群によるフィルトレーション $\rightsquigarrow$ 体 k
[7]: G_k + 円分指標, $\widehat{\overline{k}}_+$ $\rightsquigarrow$ 体 k
[2]: G_k + Hodge・Tate 表現 $\rightsquigarrow$ 体 k

[7] や [2] での議論は, [5] で与えられたそれの改良と考えられる．[5] で得られた 1 つの重要な観察は, 以下の (†) である: (上の単遠アーベル的復元の議論の記号を用いることにすると) 位相加群 $\mathcal{O}^\times(G)$ の完全化 $\mathcal{O}^\times(G)^{\mathrm{pf}}$ ($\stackrel{\mathrm{def}}{=} \varinjlim_{n\geq 1} \mathcal{O}^\times(G)_n$ — ただし, $\mathcal{O}^\times(G)_n \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{O}^\times(G)$, 遷移射は m が n を割り切るときの n/m 倍写像 $\mathcal{O}^\times(G)_m = \mathcal{O}^\times(G) \to \mathcal{O}^\times(G)_n = \mathcal{O}^\times(G)$) は, p 進対数写像を考えることで, k_+ という k をその加法構造によって加群と考えたものに対応する．つまり, MLF 包絡 $(k, \overline{k}, \alpha\colon G_k \stackrel{\sim}{\to} G)$ は, 加群の可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_k^\times & \xrightarrow{\log} & k_+ \\ \wr\downarrow & & \wr\downarrow \\ \mathcal{O}^\times(G) & \longrightarrow & \mathcal{O}^\times(G)^{\mathrm{pf}} \end{array}$$

— ただし, 上の水平の射は p 進対数写像 — を誘導する．したがって, $\mathcal{O}_k$ をその加法構

[*7] もしも α が開単射ならば, この等式はいつでも成立する．

造によって加群と考えたものを $\mathcal{O}_{k+}$ とすると, $\mathcal{O}_{k+}$ は k_+ の整構造を, 特に, (上の図式の右側の垂直の同型射を通じて) $\mathcal{O}^\times(G)^{\mathrm{pf}}$ の整構造を定める. このとき, 大雑把に言えば,

> (†): k_+ の乗法構造 (したがって, k の体構造) が復元可能 $\Leftrightarrow$ 考察下の設定によって, (G の様々な開部分群に対しても) この "$\mathcal{O}_{k+}$ から定まる $\mathcal{O}^\times(G)^{\mathrm{pf}}$ の整構造" が復元可能

となる.

この観察により, この "$\mathcal{O}_{k+}$ から定まる $\mathcal{O}^\times(G)^{\mathrm{pf}}$ の整構造" は, k の環構造に本質的に依存した "環論的標準的整構造" だと考えられる. 一方, これまでの議論からわかるように, 上の図式の下の水平射 $\mathcal{O}^\times(G) \to \mathcal{O}^\times(G)^{\mathrm{pf}}$ の像も $\mathcal{O}^\times(G)^{\mathrm{pf}}$ のある整構造を定め, これは, G から単遠アーベル的に復元可能である. (MLF 包絡を通じてこの整構造を解釈すると, これは, p 進対数写像 $\mathcal{O}_k^\times \to k_+$ の像として得られる k_+ の整構造である.) この整構造は, 絶対 Galois 群の位相群としての構造にしか依存しない "群論的標準的整構造" だと考えられる.

$\mathcal{O}_{k+} \subseteq k_+$: 環論的標準的整構造 $\rightsquigarrow$ 体 k

$\log(\mathcal{O}_k^\times) \subseteq k_+$: 群論的標準的整構造 $(= 2 \cdot \mathrm{char}(\underline{k}) \cdot$ 対数シェル$)$ $\leftsquigarrow$ 群 G_k

3 大域的復元アルゴリズム

§3 では, NF に対する単遠アーベル的な復元に関する議論の解説を与える. 講演のときと同様, ここでも, Kummer コンテナの復元の部分まで比較的詳細な説明を与え, その後の部分については概略を述べるに留める.

G を NF 型位相群, $(F, \overline{F}, \alpha\colon G_F \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \xrightarrow{\sim} G)$ を G の NF 包絡とする[*8]. (したがって, F は NF, $\overline{F}$ は F のある代数閉包である.) $\mathcal{O}_F \subseteq F$ を F の整数環, $\mathcal{V}_F$ を F の非 Archimedes 的付値のなす集合, $\mathcal{V}_{\overline{F}}$ を $\overline{F}$ の非 Archimedes 的付値のなす集合とする. また, 各 $v \in \mathcal{V}_F$ に対して, $\mathcal{O}_{(v)}$ を $\mathcal{O}_F$ の v での局所化, $\mathcal{O}_{(v)}^{\triangleright} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathcal{O}_{(v)} \setminus \{0\} \subseteq F^\times$ を非零元のなす (乗法に関する) モノイド, $\mathfrak{m}_{(v)} \subseteq \mathcal{O}_{(v)}$ を $\mathcal{O}_{(v)}$ の極大イデアル, $U_{(v)}^{(1)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} 1 + \mathfrak{m}_{(v)} \subseteq \mathcal{O}_{(v)}^\times$ を主単数のなす群, F_v を F の v での完備化として得られる MLF とする. 最後に, $I_{F,\mathrm{fin}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varinjlim_{S \subseteq \mathcal{V}_F\colon \text{有限部分集合}} (\prod_{v \in S} F_v^\times) \times (\prod_{v \in \mathcal{V}_F \setminus S} \mathcal{O}_{F_v}^\times)$ を F の有限イ

---

*8 ここで NF 包絡を固定した目的は, "これより与えられる構成で何を復元しているのか" を説明するためである. これから行う様々な構成に, この NF 包絡はもちろん用いられない.

デールのなす群, I_F を F のイデールのなす群, $\mathrm{rec}_F\colon I_F \to G_F^{\mathrm{ab}}$ を大域類体論による準同型射, $\mathrm{rec}_{F,\mathrm{fin}} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{rec}_F|_{I_{F,\mathrm{fin}}}\colon I_{F,\mathrm{fin}} \to G_F^{\mathrm{ab}}$ を rec_F の $I_{F,\mathrm{fin}} \subseteq I_F$ への制限とする.

これより大域的な復元アルゴリズムの概略を

3.1. 内田の補題の数体版 · “単版”
3.2. 非 Archimedes 的付値のなす集合の復元
3.3. NF に対する 2 つの概念の復元
3.4. 局所的なモノイドの復元
3.5. 有限イデールのなす群の復元
3.6. 大域的円分物の復元, 局所大域円分剛性同型
3.7. Kummer コンテナの復元
3.8. 考察 I
3.9. 考察 II
3.10. その後の復元手続き

というステップに分けて説明する.

3.1. 内田の補題の数体版 · “単版”

モノイド M に対して, 集合 S と S の元で添字付けられた部分モノイド $M_s^{(1)} \subseteq M_s^{\triangleright} \subseteq M$ の族のなす組 $\bigl(S, \{M_s^{(1)} \subseteq M_s^{\triangleright} \subseteq M\}_{s\in S}\bigr)$ が以下の条件を満たすとき, その組 $\bigl(S, \{M_s^{(1)} \subseteq M_s^{\triangleright} \subseteq M\}_{s\in S}\bigr)$ を M の上の **PUO 構造** (= Principal Units and Orientations 構造) と呼ぶことにする: ある NF E とモノイドのある同型射 $\rho\colon E_\times \xrightarrow{\sim} M$ とある全単射 $\phi\colon \mathcal{V}_E \xrightarrow{\sim} S$ が存在して, 任意の $v \in \mathcal{V}_E$ に対して, $\rho\colon E_\times \xrightarrow{\sim} M$ は部分モノイドの間の同型射 $\mathcal{O}_{(v)}^{\triangleright} \xrightarrow{\sim} M_{\phi(v)}^{\triangleright}$, $U_{(v)}^{(1)} \xrightarrow{\sim} M_{\phi(v)}^{(1)}$ を定める. また, そのような 3 つ組 (E,ρ,ϕ) を PUO 構造付きモノイド $\bigl(M, S, \{M_s^{(1)} \subseteq M_s^{\triangleright} \subseteq M\}_{s\in S}\bigr)$ の **NF 包絡** と呼ぶことにする. このとき, 内田の補題の数体版 · “単版” の主張の概要は以下のとおりである.

> PUO 構造付きモノイド $\mathcal{M} = \bigl(M, S, \{M_s^{(1)} \subseteq M_s^{\triangleright} \subseteq M\}_{s\in S}\bigr)$ から以下の条件を満たす写像
> $$田_{\mathcal{M}}\colon\ M \times M \ \longrightarrow\ M$$
> を (PUO 構造付きモノイドの同型射に関して) 関手的に構成することができる:

(E, ρ, ϕ) を $\mathcal{M}$ の NF 包絡とすると, 合成

$$E_\times \times E_\times \xrightarrow[\sim]{(\rho,\rho)} M \times M \xrightarrow{\boxplus_{\mathcal{M}}} M \xleftarrow[\sim]{\rho} E_\times$$

は E の加法構造 "$(a, b) \mapsto a + b$" と一致する.

古典的な "内田の補題" は, この主張の, 代数的閉体上の 1 変数代数関数体に対する類似的主張 (の "双版") であり, §1 で復習した Neukirch · 内田の定理の関数体の場合を証明するために, 内田興二氏によって [13] で証明された. (その "単版" は, [8], Proposition 1.3, を参照.) 上で述べた内田の補題の数体版に関しては, その "双版" は [3] で証明が与えられ, また, [3] で行われている議論を適切に処理することによって, 上記の "単版" が得られる.

3.2. 非 Archimedes 的付値のなす集合の復元

■ $\widetilde{\mathcal{V}}(G)$ を G の極大 MLF 型閉部分群のなす集合とする. このとき, 共役によって, G は $\widetilde{\mathcal{V}}(G)$ に作用する.

■ $\mathcal{V}(G) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \widetilde{\mathcal{V}}(G)/G$.

このとき, Neukirch によって以下の主張が証明されている (例えば [10], Corollary 12.1.11, を参照).

> 対応 $\widetilde{v} \mapsto D_{\widetilde{v}}$ は全単射 $\mathcal{V}_{\overline{F}} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{V}}(G_F)$ を定める. しかも, この全単射は G_F 同変であり, したがって, 全単射 $\mathcal{V}_F \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}(G_F)$ を定める.

これにより, NF 包絡 $(F, \overline{F}, \alpha)$ によって, 自然な全単射

$$\mathcal{V}_{\overline{F}} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{V}}(G_F) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{V}}(G), \quad \mathcal{V}_F \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}(G_F) \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}(G)$$

が定まることがわかる.

$D \in v \in \mathcal{V}(G)$ (つまり, $D \in \widetilde{\mathcal{V}}(G)$ であり, また, v は D の G 共役たちのなす集合) とすると, §2 で定義した $\mathrm{ch}(D)$, $d(D)$, $f(D)$ という値は v の元 "D" の選択に依存しないことが簡単に確認できる. この事実から,

■ $\mathrm{ch}(v) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{ch}(D)$, $d(v) \stackrel{\mathrm{def}}{=} d(D)$, $f(v) \stackrel{\mathrm{def}}{=} f(D)$

と定義することにする. また,

■ $\mathcal{V}^{d=1}(G) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\, v \in \mathcal{V}(G) \mid d(v) = 1 \,\}$

と定義する.

3.3. NF に対する 2 つの概念の復元

■ NF 型位相群 G が非自明な有限部分群を持たないとき, G は **総虚** であると言うことにする.

■ NF 型位相群 G が以下の条件を満たすとき, G は **絶対 Galois** であると言うことにする: $v, w \in \mathcal{V}(G)$ に対して, $\mathrm{ch}(v) = \mathrm{ch}(w)$ ならば $f(v) = f(w)$.

すると, それぞれ例えば [10], Theorem 12.1.7; [9], Chapter VII, Corollary 13.8, から, 以下の事実が従う.

- NF F が総虚であることと G_F が (上の意味で) 総虚であることは同値である.
- NF F が $\mathbb{Q}$ 上 Galois であることと G_F が (上の意味で) 絶対 Galois であることは同値である.

3.4. 局所的なモノイドの復元

$v \in \mathcal{V}(G)$ とする. このとき, 任意の $D \in v$ に対する D の G の中での通約端末性 (つまり, $D = C_G(D) \overset{\mathrm{def}}{=} \{\, g \in G \,|\, [D : D \cap gDg^{-1}], [gDg^{-1} : D \cap gDg^{-1}] < \infty \,\}$ であるという事実 — 例えば [10], Corollary 12.1.4, の証明を参照) と §2 で与えられた $k^{\times}(D)$ の構成 (特に, $k^{\times}(D) \subseteq D^{\mathrm{ab}}$ という事実) から, 以下のように加群 $k^{\times}(v)$ を定義することが可能であることがわかる.

■ $k^{\times}(v) \subseteq \prod_{D \in v} k^{\times}(D)$ を以下の条件を満たす $\prod_{D \in v} k^{\times}(D)$ の唯一の部分加群とする:

(1) 部分加群 $k^{\times}(v) \subseteq \prod_{D \in v} k^{\times}(D)$ は, 共役による G の $\prod_{D \in v} k^{\times}(D)$ への作用の不変部分に含まれる.

(2) 任意の $D_0 \in v$ に対して, 合成写像 $k^{\times}(v) \hookrightarrow \prod_{D \in v} k^{\times}(D) \twoheadrightarrow k^{\times}(D_0)$ は同型射.

また,

■ $k_{\times}(v) \overset{\mathrm{def}}{=} k^{\times}(v)^{\circledast} \subseteq \prod_{D \in v} k_{\times}(D)$

とする. このとき, 簡単に確認できるように, (2) の合成写像による, 部分モノイド $U^{(1)}(D_0) \subseteq \mathcal{O}^{\times}(D_0) \subseteq \mathcal{O}^{\triangleright}(D_0) \subseteq k^{\times}(D_0)$ の逆像は, “D_0” の選択に依存しない. また,

(2) の合成写像と $k^\times(D_0)$ の位相から定まる $k^\times(v)$ の位相も,“D_0” の選択に依存しない. この事実により,

■ $k^\times(v)$ の部分モノイド $U^{(1)}(v) \subseteq \mathcal{O}^\times(v) \subseteq \mathcal{O}^\triangleright(v) \subseteq k^\times(v)$ を, (2) の合成写像による, 部分モノイド $U^{(1)}(D_0) \subseteq \mathcal{O}^\times(D_0) \subseteq \mathcal{O}^\triangleright(D_0) \subseteq k^\times(D_0)$ の逆像として定義する. また, (2) の合成写像と $k^\times(D_0)$ の位相から定まる位相によって, $U^{(1)}(v) \subseteq \mathcal{O}^\times(v) \subseteq \mathcal{O}^\triangleright(v) \subseteq k^\times(v)$ を位相モノイドと考える.

3.2 で得られた全単射 $\mathcal{V}_F \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}(G)$ によって $\mathcal{V}_F$ と $\mathcal{V}(G)$ を同一視すると, この定義から, 任意の $v \in \mathcal{V}_F$ に対して, NF 包絡 $(F, \overline{F}, \alpha)$ は, 位相モノイドの可換図式

$$\begin{array}{ccccccc}
U^{(1)}_{F_v} & \xrightarrow{\subset} & \mathcal{O}^\times_{F_v} & \xrightarrow{\subset} & \mathcal{O}^\triangleright_{F_v} & \xrightarrow{\subset} & F^\times_v \\
\wr\downarrow & & \wr\downarrow & & \wr\downarrow & & \wr\downarrow \\
U^{(1)}(v) & \xrightarrow{\subset} & \mathcal{O}^\times(v) & \xrightarrow{\subset} & \mathcal{O}^\triangleright(v) & \xrightarrow{\subset} & k^\times(v)
\end{array}$$

とモノイドの同型

$$(F_v)_\times \xrightarrow{\sim} k_\times(v)$$

を定めることがわかる.

3.5. 有限イデールのなす群の復元

3.4 で構成した局所的なモノイドを用いて, 加群 $I_{\mathrm{fin}}(G)$, 及び, 準同型射 $\mathrm{rec}(G)\colon I_{\mathrm{fin}}(G) \to G^{\mathrm{ab}}$ を以下のように定義する.

■ $I_{\mathrm{fin}}(G) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varinjlim_{S \subseteq \mathcal{V}(G)\colon \text{有限部分集合}} \left(\prod_{v \in S} k^\times(v)\right) \times \left(\prod_{v \in \mathcal{V}(G)\setminus S} \mathcal{O}^\times(v)\right)$.

■ $\mathrm{rec}(G)\colon I_{\mathrm{fin}}(G) \to G^{\mathrm{ab}}$ を様々な $D \in \widetilde{\mathcal{V}}(G)$ に対する埋め込み $D \hookrightarrow G$ が誘導する準同型射として定義する.

この構成から, NF 包絡 $(F, \overline{F}, \alpha)$ は, 加群の可換図式

$$\begin{array}{ccc}
I_{F,\mathrm{fin}} & \xrightarrow{\mathrm{rec}_{F,\mathrm{fin}}} & G^{\mathrm{ab}}_F \\
\wr\downarrow & & \wr\downarrow \alpha^{\mathrm{ab}} \\
I_{\mathrm{fin}}(G) & \xrightarrow{\mathrm{rec}(G)} & G^{\mathrm{ab}}
\end{array}$$

— ただし, 左側の垂直の射は 3.4 の可換図式に現れる位相同型射から定まる同型射 — を定めることがわかる.

3.6. 大域的円分物の復元, 局所大域円分剛性同型[*9]

対角的な埋め込みによって, $F^\times$ を自然に $I_{F,\mathrm{fin}}$ の部分群と考える[*10]. このとき, 大域類体論による準同型射 $\mathrm{rec}_F\colon I_F \to G_F^{\mathrm{ab}}$ の核に関する良く知られた事実 (例えば [10], Theorem 8.2.5, を参照) から, F が総虚ならば,

$$\boldsymbol{\mu}(F) \ = \ \mathrm{Ker}(\mathrm{rec}_{F,\mathrm{fin}})_{\mathrm{tor}}$$

という等式が成立する. この事実により, 大域的円分物 $\Lambda(G)$ を以下のように定義する.

■ $\boldsymbol{\mu}(G) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varinjlim_{G^\dagger \subseteq G\colon \text{総虚な開部分群}} \mathrm{Ker}(\mathrm{rec}(G^\dagger))_{\mathrm{tor}}$ [*11]. G の共役による $\boldsymbol{\mu}(G)$ への作用によって, $\boldsymbol{\mu}(G)$ を G 作用付き加群と考える.

■ $\Lambda(G) \stackrel{\mathrm{def}}{=} T(\boldsymbol{\mu}(G))$. G の $\boldsymbol{\mu}(G)$ への作用から定まる G の $\Lambda(G)$ への作用によって, $\Lambda(G)$ を G 作用付き加群と考える.

この構成から, NF 包絡 $(F, \overline{F}, \alpha)$ は, (G_F, G) 同変な同型射

$$\boldsymbol{\mu}(\overline{F}) \ \stackrel{\sim}{\longrightarrow} \ \boldsymbol{\mu}(G), \quad \Lambda(\overline{F}) \ \stackrel{\sim}{\longrightarrow} \ \Lambda(G)$$

を定めることがわかる.

また, 任意の $D_0 \in \widetilde{\mathcal{V}}(G)$ に対して, (G のすべての開部分群に対する) 合成

$$I_{\mathrm{fin}}(G) \ \hookrightarrow \ \prod_{v \in \mathcal{V}(G)} k^\times(v) \ \hookrightarrow \ \prod_{D \in \widetilde{\mathcal{V}}(G)} k^\times(D) \ \twoheadrightarrow \ k^\times(D_0)$$

は, 大域的円分物 $\Lambda(G)$ と局所的円分物 $\Lambda(D_0)$ の間の D_0 同変な同型射

$$\Lambda(G) \ \stackrel{\sim}{\longrightarrow} \ \Lambda(D_0)$$

を誘導することがわかる. この同型射を **局所大域円分剛性同型** と呼ぶ.

[*9] 円分物の間の適切な同型は **円分剛性同型** と呼ばれ, 遠アーベル幾何学において重要な役割を果たしてきた. 例えば, [1] で与えられている PSC 型遠半グラフの理論から生じる円分剛性同型は幾何的な円分物の間の同型射であり, 組み合わせ論的遠アーベル幾何学において基本的な存在となっている. また, 別の例として, [6] で得られている単テータ環境の理論から生じる円分剛性同型が挙げられ, これは, 望月新一氏による宇宙際 Teichmüller 理論で非常に重要な役割を果たしている.

[*10] したがって, $F^\times \subseteq I_{F,\mathrm{fin}} \subseteq I_F$ と, 包含を合成することによって, $F^\times$ を I_F の部分群だと考えることができる. しかし, これは従来の — 例えば大域類体論で考察されているような — 埋め込み "$F^\times \subseteq I_F$" とは異なることに注意する. 実際, このようにして $F^\times$ を I_F の部分群と考えた場合, 一般には合成 $F^\times \hookrightarrow I_F \stackrel{\mathrm{rec}_F}{\to} G_F^{\mathrm{ab}}$ の像は自明にはならない.

[*11] その定義から, NF 型位相群の開部分群は再び NF 型であることに注意.

3.7. Kummer コンテナの復元

NF F に対して, Kummer コンテナ $\mathcal{H}^\times(F)$ を, Kummer 射たちから定まる単射

$$\prod_{v\in\mathcal{V}_F} F_v^\times \hookrightarrow \prod_{\widetilde{v}\in\mathcal{V}_{\overline{F}}} H^1(\mathrm{Gal}(\overline{F}_{\widetilde{v}}/F_{\widetilde{v}|_F}),\Lambda(\overline{F}_{\widetilde{v}})) \overset{\sim}{\leftarrow} \prod_{\widetilde{v}\in\mathcal{V}_{\overline{F}}} (F_{\widetilde{v}|_F}^\times)^\wedge$$

の像の, 自然な単射

$$(F^\times)^\wedge \overset{\sim}{\to} H^1(G_F,\Lambda(\overline{F})) \hookrightarrow \prod_{\widetilde{v}\in\mathcal{V}_{\overline{F}}} H^1(\mathrm{Gal}(\overline{F}_{\widetilde{v}}/F_{\widetilde{v}|_F}),\Lambda(\overline{F}_{\widetilde{v}})) \overset{\sim}{\leftarrow} \prod_{\widetilde{v}\in\mathcal{V}_{\overline{F}}} (F_{\widetilde{v}|_F}^\times)^\wedge$$

による逆像として定義する. また, Kummer コンテナ $\mathcal{H}(F)$ を $\mathcal{H}(F) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathcal{H}^\times(F)^\circledast$ と定義する. すると, その定義から, モノイドの自然な可換図式

$$\begin{array}{ccc} F^\times & \xrightarrow{\subset} & \mathcal{H}^\times(F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F_\times & \xrightarrow{\subset} & \mathcal{H}(F) \end{array}$$

— ただし, 垂直の射は自然な埋め込み — が存在する. ここで, NF 型位相群 G に対する Kummer コンテナ $\mathcal{H}^\times(G)$, $\mathcal{H}(G)$ を以下のように定義する.

- §2 で定義された Kummer 射 “Kmm(D)” たちから定まる単射

$$\prod_{v\in\mathcal{V}(G)} k^\times(v) \hookrightarrow \prod_{D\in\widetilde{\mathcal{V}}(G)} k^\times(D) \hookrightarrow \prod_{D\in\widetilde{\mathcal{V}}(G)} H^1(D,\Lambda(D))$$

の像の, 局所大域円分剛性同型から定まる (単) 射

$$H^1(G,\Lambda(G)) \hookrightarrow \prod_{D\in\widetilde{\mathcal{V}}(G)} H^1(D,\Lambda(D))$$

による逆像を $\mathcal{H}^\times(G)$ と書く.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^\times(G) & \longrightarrow & \prod_{v\in\mathcal{V}(G)} k^\times(v) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(G,\Lambda(G)) & \longrightarrow & \prod_{D\in\widetilde{\mathcal{V}}(G)} H^1(D,\Lambda(D)). \end{array}$$

- $\mathcal{H}(G) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathcal{H}^\times(G)^\circledast$.

すると, NF 包絡 $(F, \overline{F}, \alpha)$ は図式の間の同型

$$\left(\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^\times(F) & \longrightarrow & \prod_{v \in \mathcal{V}_F} F_v^\times \\ \downarrow & & \downarrow \\ (F^\times)^\wedge & \longrightarrow & \prod_{\widetilde{v} \in \mathcal{V}_{\overline{F}}} (F^\times_{\widetilde{v}|_F})^\wedge \end{array}\right) \stackrel{\sim}{\to} \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^\times(G) & \longrightarrow & \prod_{v \in \mathcal{V}(G)} k^\times(v) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(G, \Lambda(G)) & \longrightarrow & \prod_{D \in \widetilde{\mathcal{V}}(G)} H^1(D, \Lambda(D)) \end{array}\right)$$

とモノイドの同型

$$\mathcal{H}(F) \stackrel{\sim}{\longrightarrow} \mathcal{H}(G)$$

を誘導する. また, $G^\dagger \subseteq G$ を開部分群とすると, モノイドの自然な可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^\times(G) & \stackrel{\subset}{\longrightarrow} & \prod_{v \in \mathcal{V}(G)} k^\times(v) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}^\times(G^\dagger) & \stackrel{\subset}{\longrightarrow} & \prod_{v^\dagger \in \mathcal{V}(G^\dagger)} k^\times(v^\dagger) \end{array}$$

とモノイドの単射

$$\mathcal{H}(G) \hookrightarrow \mathcal{H}(G^\dagger)$$

が得られる.

3.8. 考察 I

我々の復元の目的である対象は体 F である. 一方, 3.7 までの議論によって, その体 F が定めるモノイド $F_\times \supseteq F^\times$ を含むモノイドである Kummer コンテナ $\mathcal{H}(F) \supseteq \mathcal{H}^\times(F)$ (に対応する G に付随する対象) の復元が完了した. では, これらの対象 $F_\times \supseteq F^\times$, $\mathcal{H}(F) \supseteq \mathcal{H}^\times(F)$ の間にはどれくらいの差があるのであろうか. Kummer コンテナの定義から確認できる次の可換図式によって, その差を理解することができるであろう.

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathcal{O}_F^\times & \longrightarrow & F^\times & \longrightarrow & F^\times/\mathcal{O}_F^\times & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 1 & \longrightarrow & (\mathcal{O}_F^\times)^\wedge & \longrightarrow & \mathcal{H}^\times(F) & \longrightarrow & F^\times/\mathcal{O}_F^\times & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

— ただし, 水平の列は完全. つまり, $\mathcal{H}^\times(F)$ は, $F^\times$ の大域単数部分 $\mathcal{O}_F^\times$ を完備化したものとなっているのである. したがって, 大雑把には,

所望の “体 F” の非零元のなす群の復元 $\Leftrightarrow$ $(\mathcal{O}_F^\times)^\wedge$ の部分集合 $\mathcal{O}_F^\times \subseteq (\mathcal{O}_F^\times)^\wedge$ の群論的特徴付け

という観察が得られる. その上, Dirichlet の単数定理によって, $\mathcal{O}_F^\times$ は有限生成加群であるので,

$$\mathcal{O}_F^\times \ \simeq\ \text{有限群} \oplus \bigoplus^{\text{有限}} \mathbb{Z} \ \subseteq\ (\mathcal{O}_F^\times)^\wedge \ \simeq\ \text{有限群} \oplus \bigoplus^{\text{有限}} \widehat{\mathbb{Z}}$$

となる. これにより, 更に大雑把に,

所望の "体 F" の非零元のなす群の復元 $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\widehat{\mathbb{Z}}$ の "適切な部分集合" $\mathbb{Z} \subseteq \widehat{\mathbb{Z}}$ の群論的特徴付け

とも考えられる. このように考えると, 所望の体の非零元のなす群の復元は, それ自体が一般的には非常に難しい問題であるということがわかる.

3.9. 考察 II

3.8 の設定のもと, 一方, その非零元のなす群の復元が遂行できたと仮定しよう. つまり, NF 包絡を通じた合成

$$F^\times \ \hookrightarrow\ \mathcal{H}^\times(F) \ \stackrel{\sim}{\to}\ \mathcal{H}^\times(G)$$

の像として得られる, G に付随する Kummer コンテナ $\mathcal{H}^\times(G)$ の中の "正解の部分群 $F^\times \subseteq \mathcal{H}^\times(G)$" が群論的に特徴付けられたと仮定しよう. この "正解の部分群" の "$(-)^{\circledast}$" を $F_\times(G) \subseteq \mathcal{H}(G)$ と書くことにする. すると, これまでの復元の手続きから,

$v \in \mathcal{V}(G)$ に対して, 部分モノイド $U^{(1)}(v) \subseteq \mathcal{O}^{\triangleright}(v) \subseteq k_\times(v)$ の, 合成

$$F_\times(G) \ \hookrightarrow\ \mathcal{H}(G) \ \to\ k_\times(v)$$

による逆像を $F_\times(G)_v^{(1)} \subseteq F_\times(G)_v^{\triangleright} \subseteq F_\times(G)$ と書くと,

$$\big(F_\times(G),\, \mathcal{V}(G),\, \{F_\times(G)_v^{(1)} \subseteq F_\times(G)_v^{\triangleright} \subseteq F_\times(G)\}_{v\in\mathcal{V}(G)}\big)$$

は PUO 構造付きモノイドとなる

ことがわかる. したがって, 3.1 で述べた内田の補題の数体版・"単版" によって, $F_\times(G)$ に所望の体の構造が定まる. つまり, ここまでの議論から,

所望の "体 F" の非零元のなす群の復元 $\quad\Rightarrow\quad$ 所望の "体 F" の復元

という結論が得られる.

しかしながら, 3.8 の最後で述べたとおり, "所望の体の非零元のなす群の復元" は一般的には非常に難しい問題である. 実際, 我々はこの結論 (を使用はするが, それ) のみを通じて所望の体の復元を実行するわけではないということを注意する.

§1 で, Neukirch · 内田の定理の関数体の場合の証明によって, 関数体に対する単遠アーベル的復元は実質的に得られている, ということを述べた. この 3.9 の最後に, 関数体の場合に単遠アーベル的復元が比較的容易に実行可能であった理由, あるいは, NF の場合と関数体の場合の本質的な差を確認しよう. そのために, 3.8, 3.9 の議論を簡単に復習する.

大域的な単数のなす群の完備化の中の大域的な単数のなす部分群の特徴付け
$\overset{\text{Kummer コンテナの性質}}{\Longrightarrow}$ 所望の体の非零元のなす群の復元
$\overset{\text{内田の補題}}{\Longrightarrow}$ 所望の体の復元

NF の場合と関数体の場合の差を一言で表現するならば,

関数体の大域的な単数のなす群は有限群であるため, それを完備化しても元の群と変わらない

となる. この事実から, 関数体の場合, "大域的な単数のなす群の完備化の中の大域的な単数のなす部分群の特徴付け" がいかなる苦労もなく遂行できるため, 上の議論を適用することで, "所望の体の復元" が完了するのである.

3.10. その後の復元手続き

ここから先の部分については, 復元の手続きの概略を与えるに留める.

■ §1 の Neukirch · 内田の定理によって, もしも $E/\mathbb{Q}$ が有限次 Galois 拡大ならば, $\mathrm{Aut}(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E))$ は位相群として自然に $G_{\mathbb{Q}} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ と同型になる. この事実から, 3.3 で定義した "絶対 Galois" という性質を用いて, $G_F \hookrightarrow G_{\mathbb{Q}}$ に対応する NF 型位相群 $G \hookrightarrow G_{\mathrm{cor}}$ を復元する.

■ $\mathbb{Q}$ の大域的な単数のなす群 (つまり, $\mathbb{Z}^\times = \{1, -1\}$) は有限群であるので, 3.8 の可換図式によって, $\mathcal{H}^\times(G_{\mathrm{cor}}) \subseteq \mathcal{H}(G_{\mathrm{cor}})$ それ自身が "正解の対象 $\mathbb{Q}^\times \subseteq \mathbb{Q}_\times$" である. したがって, 3.9 の議論のように内田の補題の数体版 · "単版" を適用することによって, $\mathcal{H}(G_{\mathrm{cor}})$ に体の構造を与えることができる. 得られた体を $F(G_{\mathrm{cor}})$ $(\simeq \mathbb{Q})$ と書くことにする. (したがって, 自然な同一視 $F(G_{\mathrm{cor}})_\times = \mathcal{H}(G_{\mathrm{cor}})$ が存在する.)

■ $v \in \mathcal{V}^{d=1}(G)$ とする. $\mathbb{Q}^\times$ が $\mathbb{Q}_p^\times$ の中で稠密であるという事実から, $F(G_{\mathrm{cor}})^\times$ の, 合成

$$F(G_{\mathrm{cor}})^\times \;=\; \mathcal{H}^\times(G_{\mathrm{cor}}) \;\hookrightarrow\; \mathcal{H}^\times(G) \;\to\; k^\times(v)$$

による $k^\times(v)$ への像は稠密であることがわかる. これにより, $F(G_{\mathrm{cor}})$ の加法構造の適切

な延長を考えることによって, $k_\times(v)$ に体の構造が定まる. 得られた体を $k(v)$ ($\simeq \mathbb{Q}_{\mathrm{ch}(v)}$) と書くことにする. このとき, 自然な同一視 $k(v)_\times = k_\times(v)$ が存在する.

■ $G \subseteq G_{\mathrm{cor}}$ が正規部分群で, かつ, 商 G_{cor}/G が可解群であったとする. このとき,

- (冪に関する Hasse の原理 — 例えば [10], Theorem 9.1.11, を参照 — により) 合成

$$\mathcal{H}^\times(G) \hookrightarrow \prod_{v\in\mathcal{V}(G)} k^\times(v) \twoheadrightarrow \prod_{v\in\mathcal{V}^{d=1}(G)} k^\times(v)$$

が単射であるという事実,

- 有限次可解拡大 $E/\mathbb{Q}$ に対する $E^\times \subseteq \mathcal{H}^\times(E)$ の構造についてのある考察,
- 直前の "■" によって得られる $\prod_{v\in\mathcal{V}^{d=1}(G)} k_\times(v)$ の環構造

から, $\mathcal{H}(G)$ の適切な部分モノイド $F_\times(G) \subseteq \mathcal{H}(G)$ とその上の適切な体構造を定めることができる. 得られた体を $F(G)$ と書くことにする. このとき, 自然な同一視 $F(G)_\times = F_\times(G)$ が存在する.

■ $D \in \widetilde{\mathcal{V}}(G)$ とする. $G_{\mathrm{cor}}^{\mathrm{sol}}$ を G_{cor} の最大副可解商とすると, Grunwald · Wang の定理 (例えば [10], Theorem 9.2.8, を参照) などによって, 合成 $D \hookrightarrow G \hookrightarrow G_{\mathrm{cor}} \twoheadrightarrow G_{\mathrm{cor}}^{\mathrm{sol}}$ は単射であることがわかる. したがって, (位相加群の帰納極限として得られる) 加群 $\overline{k}^\times(D) = \varinjlim_{D^\dagger\subseteq D\colon \text{開部分群}} k^\times(D^\dagger)$ から生じるモノイド $\overline{k}_\times(D) = \overline{k}^\times(D)^\circledast$ を, 正規開部分群 $G^\dagger \subseteq G_{\mathrm{cor}}$ であって商 $G_{\mathrm{cor}}/G^\dagger$ が可解群であるようなものたちによる (直前の "■" によって得られた) 体 $F(G^\dagger)$ で "近似" することができる. この考察により, そのような体 $F(G^\dagger)$ たちの加法構造の適切な延長を考えることによって, $\overline{k}_\times(D)$ に (代数的閉) 体の構造が定まる. 得られた体を $\overline{k}(D)$ ($\simeq \overline{\mathbb{Q}}_{\mathrm{ch}(D)}$) と書くことにする. このとき, 自然な同一視 $\overline{k}(D)_\times = \overline{k}_\times(D)$ が存在する.

■ $G \subseteq G_{\mathrm{cor}}$ が正規部分群であると仮定する. また, $D \in \widetilde{\mathcal{V}}(G)$ とする. 合成

$$F(G_{\mathrm{cor}}) = \mathcal{H}(G_{\mathrm{cor}}) \hookrightarrow \mathcal{H}(G) \to \overline{k}(D)$$

によって, $F(G_{\mathrm{cor}})$ を代数的閉体 $\overline{k}(D)$ の部分体と考える. $F(G_{\mathrm{cor}})$ の $\overline{k}(D)$ の中での代数閉包を $\overline{F}(D) \subseteq \overline{k}(D)$ と書く. このとき,

- 部分体 $E \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ が $\mathbb{Q}$ 上有限次 Galois であるならば, この部分体 $E \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ は, 集合 $\{\, p\colon \text{素数} \mid \text{体の埋め込み } E \hookrightarrow \mathbb{Q}_p \text{ が存在する} \,\}$ で決定される

という事実 (例えば [9], Chapter VII, Corollary 13.10, を参照) から, 以下の条件を満た

す $\overline{F}(D)$ の部分体 $F(D) \subseteq \overline{F}(D)$ を群論的に, しかも, 一意的に構成することができる: 位相群の同型射 $\mathrm{Gal}(\overline{F}(D)/F(D)) \xrightarrow{\sim} G$ が存在する.

ここで, $\mathrm{Gal}(\overline{F}(D)/F(D)) \curvearrowright \overline{F}(D)^{\times}$ に対する Kummer 射 $F(D)^{\times} \hookrightarrow H^1(\mathrm{Gal}(\overline{F}(D)/F(D), \Lambda(\overline{F}(D))))$ を, (非標準的な) 同型射 $G \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(\overline{F}(D)/F(D))$ とその同型射から生じる円分剛性同型 $\Lambda(G) \xrightarrow{\sim} \Lambda(\overline{F}(D))$ で引き戻すことによって, 部分加群 $F^{\times}(G) \subseteq (\mathcal{H}^{\times}(G) \subseteq)\ H^1(G, \Lambda(G))$ が得られる. 一方, Neukirch · 内田の定理によって, この部分加群 $F^{\times}(G) \subseteq \mathcal{H}^{\times}(G)$ は "$D \in \widetilde{\mathcal{V}}(G)$" や "(非標準的な) 同型射 $G \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(\overline{F}(D)/F(D))$" の選択に依存しないことがわかる. その上, 直前の "■" による局所的な代数的閉体の体の構造を用いて (あるいは, 3.9 の議論のように内田の補題の数体版 · "単版" を適用することによって), $F_{\times}(G) \stackrel{\mathrm{def}}{=} F^{\times}(G)^{\circledast}$ に体の構造を定めることができる. 得られた体を $F(G)$ と書くことにする.

■ $\overline{F}(G) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varinjlim_{G^{\dagger} \subseteq G_{\mathrm{cor}}:\,\text{正規開部分群}} F(G^{\dagger})$ とする. 共役によって定まる G の $\overline{F}(G)$ への作用によって, $\overline{F}(G)$ を G 作用付き体と考える. このとき, これまでの構成から, この

$$\overline{F}(G) \quad \curvearrowleft \quad G$$

が, 我々の復元における所望の対象であることがわかる.

謝辞

"第 18 回早稲田整数論研究集会" の運営にご尽力なさった関係者の皆様, 特に, 講演をご依頼くださった小松啓一先生, また, 集会に関わる様々な雑務にご対応くださった兵藤史武さんに感謝申し上げます. また, 今回の講演の内容は, 2013 年 7 月 12 日に "早稲田整数論セミナー" で星が行った講演 "数体の乗法的情報による加法構造の復元" に直接的な関連のあるものとなっております. (この講演では, この原稿の 3.1 で説明した内田の補題の数体版の "双版" — つまり, [3] の内容 — についてお話をしました.) こちらのセミナーの関係者の皆様にも感謝申し上げます. 最後に, 本研究の遂行に対して励ましをくださった小松啓一先生に, 改めて厚く御礼申し上げます.

参考文献

[1] Y. Hoshi and S. Mochizuki, Topics surrounding the combinatorial anabelian geometry of hyperbolic curves I: Inertia groups and profinite Dehn twists, *Galois-Teichmüller theory and arithmetic geometry*, 659–811, Adv. Stud. Pure Math., **63**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2012.

[2] Y. Hoshi, A note on the geometricity of open homomorphisms between the absolute Galois groups of p-adic local fields, *Kodai Math. J.* **36** (2013), no. **2**, 284–298.

[3] Y. Hoshi, On the field-theoreticity of homomorphisms between the multiplicative groups of number fields, to appear in *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*

[4] M. Jarden and J. Ritter, On the characterization of local fields by their absolute Galois groups, *J. Number Theory* **11** (1979), no. **1**, 1–13.

[5] S. Mochizuki, A version of the Grothendieck conjecture for p-adic local fields, *Internat. J. Math.* **8** (1997), no. **4**, 499–506.

[6] S. Mochizuki, The étale theta function and its Frobenioid-theoretic manifestations, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **45** (2009), no. **1**, 227–349.

[7] S. Mochizuki, Topics in absolute anabelian geometry I: generalities, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **19** (2012), no. **2**, 139–242.

[8] S. Mochizuki, *Topics in absolute anabelian geometry III: Global reconstruction algorithms*, RIMS Preprint **1626** (March 2008).

[9] J. Neukirch, *Algebraic number theory*, Translated from the 1992 German original and with a note by Norbert Schappacher. With a foreword by G. Harder. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **322**. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[10] J. Neukirch, A. Schmidt, and K. Wingberg, *Cohomology of number fields*, Second edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **323**. Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[11] N. Nikolov and D. Segal, Finite index subgroups in profinite groups, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **337** (2003), no. **5**, 303–308.

[12] K. Uchida, Isomorphisms of Galois groups, *J. Math. Soc. Japan* **28** (1976), no. **4**, 617–620.

[13] K. Uchida, Isomorphisms of Galois groups of algebraic function fields, *Ann. of Math.* (**2**) 106 (1977), no. **3**, 589–598.