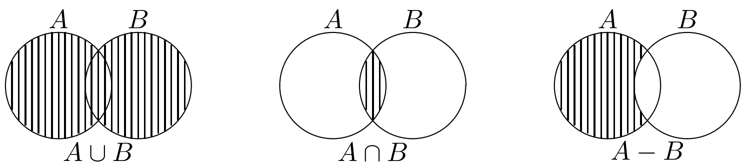
「コンピュータサイエンス入門」講義資料

数学的な準備

集合　集合とは、ものの集まりである。この講義では、以下のような一般的な記法を用いる。

- $\mathbf{N}$ — 自然数 0, 1, 2, 3,... 全体の集合（0 も含む）
- $\{a, b, c\}$ — a, b, c を要素にもつ集合
- $\emptyset$ — 空集合
- $x \in A$ — x は集合 A の要素
- $\{x \in A \mid P(x)\}$ — 性質 $P(x)$ を満たすような集合 A の要素 x を集めてできる集合
- $A \subseteq B$ — A は B の部分集合（$x \in A$ ならば $x \in B$）
- $A \cup B$ — 集合 A と B の和集合
- $A \cap B$ — 集合 A と B の共通部分
- $A - B$ — 集合 A の要素のうち、集合 B に含まれるものを除いた集合、すなわち $\{a \in A \mid a \notin B\}$



- $A \times B$ — 集合 A と B の直積集合（A の要素と B の要素の組を集めてできる集合）。$A \times B$ の要素は (a, b) $(a \in A,\ b \in B)$ と表せる。
- A^n — 集合 A の n 個の直積集合（$\overbrace{A \times A \times \ldots \times A}^{n}$）（$A$ の要素を n 個並べたリストを集めてできる集合）。例：$A^1 = A$, $A^2 = A \times A$, $A^3 = A \times A \times A$。$A^n$ の要素は $(a_1, \ldots, a_n)$ $(a_i \in A)$ と表せる。特に、A^0 は空のリスト $()$ だけを要素にもつ一点集合である。
- 集合 A から集合 B への関数全体のなす集合を $A \to B$ であらわす。f が集合 A から集合 B への関数であることを $f : A \to B$ と書く。関数 $f : A \to B$ については、任意の $a \in A$ に対し、$f(a) = b$ となるような $b \in B$ がただひとつ存在する。

可算集合　可算集合とは、空集合であるか、またはその要素を

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$$

というように、自然数の添字をつけてすべて並べあげる（列挙する）ことができる集合のことをいう。（すなわち、可算集合とは、空集合か、あるいは $\mathbf{N}$ からの全射的な関数が存在するような集合のことである。）

- 有限集合（要素が有限個しかない集合）は可算集合である。
- $\mathbf{N}$ は可算集合である。
- 整数全体の集合 $\mathbf{Z}$ や有理数全体の集合 $\mathbf{Q}$ は可算集合である。
- $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ は可算集合である。
- 実数全体の集合 $\mathbf{R}$ は可算集合では**ない**。
- $[0,1] = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ は可算集合では**ない**。
- $\mathbf{N}$ から $\mathbf{N}$ への関数全体の集合 $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ は可算集合では**ない**。

可算集合とは、有限集合か、または自然数で数え上げられるような（小さい）無限集合であると理解できる。可算でない集合は、可算集合より真に大きい無限集合である。（正確には、この「大きさ」は、集合の濃度または基数と呼ばれる概念についてのものである。）

対角線論法　$\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ が可算集合ではないことの、カントールの対角線論法による証明は以下のとおり。

　$\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ が可算集合だと仮定すると、その要素を

$$f_0, f_1, f_2, f_3, \ldots$$

というように、すべて並べあげることができる。ここで、$g : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ を

$$g(x) = f_x(x) + 1$$

で定義する。すると、g はどの f_n とも異なる。実際、任意の自然数 n について、$g(n) = f_n(n) + 1 \neq f_n(n)$ なので g と f_n は異なる関数である (下図を参照)。

	0	1	2	3	$\ldots$
f_0	$f_0(0)$	$f_0(1)$	$f_0(2)$	$f_0(3)$	$\ldots$
f_1	$f_1(0)$	$f_1(1)$	$f_1(2)$	$f_1(3)$	$\ldots$
f_2	$f_2(0)$	$f_2(1)$	$f_2(2)$	$f_2(3)$	$\ldots$
f_3	$f_3(0)$	$f_3(1)$	$f_3(2)$	$f_3(3)$	$\ldots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
g	$f_0(0)+1$	$f_1(1)+1$	$f_2(2)+1$	$f_3(3)+1$	$\ldots$

したがって、$\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ の要素を自然数の添字をつけてすべて数え上げることはできない。すなわち、$\mathbf{N} \to \mathbf{N}$ は可算集合ではない。