微分積分学第一　１類Ｍ組 第２回講義内容（2007 年 4 月 19 日）07.05revised 井上淳

(I) 何故、$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$ といえるのだろうか？

1　実数とは何か

1.1　$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$ の証明概略

1.2　「実数とは何か」をちょっと

ところで、2003 年度の第 1 回講義後には、「全ての実数は 10 進数で書けるのですか」という質問があった。これは、当たり前の事実のようにも見えるが、「実数とは何か」「どう認識しているのか」に関わる良い質問である。以下でこの質問に答える。

まず、実数の連続性が以下と同等[1]であることが示される：

定理 1.1 上に有界な単調増加数列は極限を持つ。

前回これを用いて自然対数の底（Napier 数と言う）を**定義**することの概略を述べた。

今学期の一つの目標は、以下を示し、ついでにこの e の近似値を求めることである。

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!},\quad 2.7182812<e<2.71828274.$$

このためには、少なくとも、級数の収束、関数の微分、Taylor 展開等、という概念が必要である。

[演習問題]　（アルキメデスの原理）「任意の 2 つの実数 $a>0,\,b>0$ に対して、$na>b$ となる自然数 n が存在する」ことを背理法と実数の連続性を用いて示せ.

また、定理 1.1 の系として

演習問題 1.1 (区間縮小法) *(i)* 有界閉区間列 $\{I_n\}_n$ が単調減少、即ち、任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し $I_n\supset I_{n+1}$ ならば $\cap_{n=1}^{\infty}I_n\neq\emptyset$。

(ii) 特に、$I_n=[a_n,b_n]$ とするとき $\lim(b_n-a_n)=0$ ならば、共通点を一点持つ：$\cap_{n=1}^{\infty}I_n=\{\alpha\}$。

1.3　数列とその極限、級数

定義 1.1 (数列とは何か？) 自然数 $n\in\mathbb{N}$ から実数 a_n への写像のことを数列といい、数列 $\{a_n\}$ と表す。

注意：ある集合と別の集合との対応関係を**写像**と言う。例えば、相合傘印の中に A 子さんと B 男君を書けば男性の集合と女性の集合の一部に対応関係を勝手に定めたことになる。この写像が well-defined、即ち誰かから文句を言われないものであるかどうか等は、一介の数学者には勿論分らない。

[1] この同等性の証明はどうしたらよいか。杉浦光夫「解析入門 I」東京大学出版会の 27 ページ参照

定義 1.2 数列 $\{a_n\}$ がある数 α に収束する（或いは、数列 $\{a_n\}$ の極限が α である）を記号で

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha, \quad a_n \to \alpha\ (n\to\infty),\ \text{或いは}\ a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha$$

等と記述する。「厳密な定義」では

$$(\forall\epsilon>0)(\exists N)(\forall n)(n>N \Longrightarrow |a_n-\alpha|<\epsilon),$$

どんな $\epsilon>0$ をとっても、ある数 N があって n が $n>N$ ならば $|a_n-\alpha|<\epsilon$ となることをいう。

この極限の定義に使われた論法を、$\epsilon-N$ 論法という。直感的には、「目には見えにくい存るもの」をこの論法で説明できたら、「目に見えたがごとく存る」としようというキマリ！

これは物事を理解したとする一つのキマリであって少なくとも万古不変の表現形態ではない[2]！実際、こうした方がもっと無限小や無限大が見えたようになるという試みが、超準解析（non-standard analysis）と称して存在しているが、まだ信者数獲得が第１位とはなっていない。

定理 1.1 の証明　定理の「仮定」(上に有界な単調増加数列) の意味は、数列 $\{a_n\}$ が与えられたとき、

(i) ある数 C があって任意の n に対して $a_n \le C$ となる、

(ii) 任意の n に対して $a_n \le a_{n+1}$ となる、

である。すると、集合 $A=\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ は上に有界なのだから、「実数の連続性」より、ある数 α があって

$$(a)\ a_n \le \alpha, \quad (b)\ \forall\epsilon>0, \exists N \text{ s.t. } \alpha-\epsilon \le a_N \qquad \text{(s.t.=such that)}$$

仮定 (ii) より $j\ge N$ ならば $a_j \le a_N$ となるから、結局、

$$\forall\epsilon>0, \exists N \text{ s.t. } |a_j-\alpha|<\epsilon\ (j>N).$$

これは $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ を意味する。

前回の講義録及び本日の講義で数列 $e_n=(1+n^{-1})^n$ が単調増加で上に有界を示したので、定理 1.1 より e_n の極限の存在が保証され、それを e と書くことにし、Napier[3]数と命名したのである。この極限は有理数ではないこと、実は、どんな代数方程式の根ともならない、超越数である[4]ことが示される。

実は、『$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$』[5]となることが、証明される（今日の講義では説明しかった）：任意に自然数 p をとり $b_p=\sum_{n=0}^{p}\frac{1}{n!}$ と定める。$n>p$ ならば、先程の $(1+n^{-1})^n$ の計算から

$$\begin{aligned} e_n=(1+n^{-1})^n &= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{p!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{n}\right) \\ &\qquad +\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \\ &> 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{p!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{p-1}{n}\right)=b_p \end{aligned}$$

[2] ここのところが面白い！「欧米人は日本人のことを権威主義的であるとしばしばいう。権威主義的とは威張っているということではない。自分以外の権威に依存して生きていることをいうのである」（阿部謹也）governability とか従順性とも呼ばれるものか？例：マッカーサーが来ると完全にすりよってしまった国民と、武力制圧された直後に反米デモをするイラク国民を、文化人類学的に比較せよ

[3] 1550-1617

[4] 1873 年 Hermite(1822-1901)。前回講義録の付録

[5] これを用いると、e は有理数とはなり得ないことが示されるが、それは後のお楽しみとしよう

となる。この不等式 $a_n > b_p$ において p を固定して $n \to \infty$ とすると、左辺は収束するのだから $e \geq b_p$ となる。一方、$b_p > a_p$ だから $e \geq b_p > a_p$ となる。ここで、p は任意に固定していたことを思い出し、そこで $p \to \infty$ とすると、$e \geq \lim_{p\to\infty} b_p \geq e$ となる。故に、$e = \displaystyle\lim_{p\to\infty} \sum_{n=0}^{p} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ となった。 □

ここで、『級数の収束』を用いてしまったが、その定義は、「級数の部分和」$s_p = \sum_{n=0}^{p} a_n$ が数列 $\{s_p\}$ として $p \to \infty$ のとき収束すればそれを級数の値と言い $s_\infty = s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ と書く。これは来週もう一度講義でする。

また、定理 1.1 の証明は講義で説明したし、もしすっきり分かった気がしなければ教科書 10 ページに記してあるので見て欲しい。もしそれでも分からなければ、質問して欲しい。

注意：数年前の講義では、何人もから、『$a \leq b$ の意味が分からない』という質問があったことは前回述べた。$a \leq b$, $a \leqq b$, $a \leqslant b$ 等色々な書き方があるが、実数の大小関係を表している限りどれも同じである。また、大小関係はあるが等しくは無いことを強調する仕方として $a \lneq b$, $a \lneqq b$ 等がある。

注意：二つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が与えられ $a_n < b_n$ と言うことが分かっているとする。もしその数列がそれぞれ $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$, $\beta = \lim_{n\to\infty} b_n$ に収束するときその極限値の間にはどういう関係があるのか？これは $\alpha \leq \beta$ となる。即ち、$\alpha > \beta$ となることは決して起こらないということである。ここで、『$\alpha > \beta$ となることは決して起こらない』[6]ということを背理法を用いて証明して欲しい！

定義 1.3 (級数の収束) 数列 $\{a_n\}$ に対して、形式的に $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ を級数と言う。「級数の部分和」$s_p = \sum_{n=0}^{p} a_n$ が数列 $\{s_p\}$ として $p \to \infty$ のとき収束すればそれを級数の値と言い $s_\infty = s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ と書く。

問題１：以下を証明するか、値を求めよ。

$$(i)\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = 0, \quad (ii)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty, \quad (iii)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\ \text{を求めよ},$$
$$(iv)\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{n!} = 1, (v)\ \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e, \quad (vi)\ \lim_{n\to\infty} n^k x^n\ \text{を求めよ}\ (x > 0, k > 0).$$

上の幾つかは、既知の事柄を色々組み合わせただけではできないかもしれないが、あと数回のうちにはできるようになるはずである。但し、差し当たり以下の事柄を認めて（勿論各自で証明してもよい）示してみよ[7]。

$$\begin{aligned}
&(a)\ \lim_{n\to\infty} a_n = \ell \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \ell. \\
&(b)\ a_n > 0,\ \lim_{n\to\infty} a_n = \ell \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \ell. \\
&(c)\ a_n > 0,\ \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell.
\end{aligned} \tag{1}$$

上に述べた事実 (a) はそれでも何とはなしに確からしいと思うだろう。それでは

$$\exists\{a_n\};\ \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \to \alpha(n \to \infty) \not\Longrightarrow a_n \to \alpha(n \to \infty)$$

となる数列 $\{a_n\}$ を見つけられるだろうか？

この「与えられた数列を平均したものは収束しやすくなる」、という事実は 19 歳の劣等生[8]Fejér によって巧に用いられた。Fourier 級数に関わる事柄なので、専門課程で説明されるかもしれないので、楽しみに。

1.4 Bolzano-Weierstrass の補題と Cauchy 列

上で述べた「事柄」:「収束する数列の算術平均は同じ極限に収束する」の逆は一般には成立しないということである。しかし、次の事実が成立する。

[6]各自示しておく事
[7]自分の証明に自信がなかったら、付録を見よ
[8]試験の結果とか立ち居振る舞いから、周りの教師が勝手にそう思っていたのか？本人はどう思っていたのか？

定義 1.4 (部分列) 自然数の値をとる数列 $\{n(k)\}_{k\in\mathbf{N}}$（これを $\{n_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ とも書く）が狭義単調増加のとき、数列 $\{a_{n(k)}\}$（これを $\{a_{n_k}\}$ とも書く）を数列 $\{a_n\}$ の部分列という。

すなわち、数列とは、自然数全体を定義域とし値域を実数とする関数である。ある数列の部分列とは、与えられた数列の定義域を自然数の一部に制限したものである。$\{a_n\}$ に対し $\{n'\} \subset \mathbb{N}$ とし、部分列を $\{a_{n'}\}$ 等とも表記する。

定義 1.5 (Cauchy 列、基本列) 数列 $\{a_n\}$ が *Cauchy* 列（基本列ともいう）であるとは、任意の ϵ に対して、ある数 N があって、$m, n \geq N$ なるどんな m, n に対しても $|a_n - a_m| \leq \epsilon$ となることである。

$$\iff (\forall\epsilon)(\exists N)(\forall m)(\forall n)(m, n \geq N \Longrightarrow |a_n - a_m| \leq \epsilon)$$

演習問題 1.2 以下を示せ：

1. 「収束する数列は *Cauchy* 列をなす」
2. 「収束する数列の任意の部分列は同じ極限に収束する」
3. 「数列があって、それの収束する任意の部分列が同じ極限に収束するならば、その数列自身がその極限に収束する」
4. 「*Cauchy* 列は有界である」
5. 「もし数列が収束するならば、その極限は唯一つである」

重要な注意:「収束する数列は Cauchy 列をなす」の逆が成立する。即ち、

定理 1.2 「収束する数列は *Cauchy* 列をなす」$\iff$「*Cauchy* 列は収束する」

この定理の $\Longleftarrow$ の証明には、次の補題を使うが、ここに記しておくが、今回の講義では説明できなかった。

補題 1.1 (Bolzano-Weierstrass の補題) 有界な数列は収束する部分列を持つ。

補題の証明 [区間縮小法]：$\{a_n\}$ を有界、すなわち $q_1 \leq p_1$ があって任意の n に対し $q_1 \leq a_n \leq p_1$ とする。$I_1 = [q_1, p_1]$ とし、この区間を中点で分け $\{a_n\}$ の項を無限個含むほう[9]を $I_2 = [q_2, p_2]$ とする。I_2 を中点で分け $\{a_n\}$ の項を無限個含むほうを $I_3 = [q_3, p_3]$ とし、これを続け区間 $I_n = [q_n, p_n]$ を定める。すると、$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$ より、

$$q_1 \leq q_2 \leq \cdots \leq q_n \leq \cdots \leq p_n \leq \cdots \leq p_2 \leq p_1$$

となっている。数列 $\{q_n\}$ と $\{p_n\}$ は上に有界な単調増加列と下に有界な単調減少列だから、それぞれ極限を持ち $\lim_{n\to\infty} q_n = \alpha$、$\lim_{n\to\infty} p_n = \beta$ となる。I_{n+1} の長さは I_n の半分だから

$$p_n - q_n = (p_1 - q_1)/2^{n-1}.$$

故に、$p_n - q_n \to 0$。すなわち、$\alpha - \beta = 0$、$\alpha = \beta$ となる。

さて、収束する部分列を作ろう。$a_{n_1} \in I_1$ を任意にとる。I_2 の中には無限個の項があるから $a_{n_2} \in I_2$ となる $n_2 > n_1$ がある。これを続け、$a_{n_k} \in I_k$ を満たす $n_1 < n_2 < \cdots n_k < \cdots$ が取れる。取り方から $p_k \leq a_{n_k} \leq p_k$ であり、$a_{n_k} \to \alpha$ となることが分かる。すなわち、収束する部分列 $\{a_{n_k}\}$ が求められた。注意すべきは、このようにして取り出した収束する部分列は一つとは限らないことである。 □

[9]両方ともに無限個含むときは、どちらか一方気に入る方を取る

『基本列は収束する』の証明の概略を述べる。次回もう一度説明するが、この『基本列は収束する』の証明は次の手順でする：
(i) 『基本列は有界である』,
(ii) Bolzano-Weierstrass の補題により『収束する部分列がある』, これで収束するとしたらそれが何になるか、という極限の候補を作った,
(iii) 基本列ならば（単なる有界数列より多くの情報を持っているので）上で探した極限に収束している.

============== 付録 =============

A　実数の 10 進展開について

定理 A.1 任意の実数 x に対し

$$a_n = [x] + \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10^2} + \cdots + \frac{x_n}{10^n}, \quad x_j \in \{0, 1, \cdots, 9\}$$

の形の有理数列 $\{a_n\}_n$ で x に収束するものが存在する。

ここで、

定理 A.2 任意の実数 a に対し

$$n \leq a < n + 1$$

を満たす整数 n が唯一つ存在する（この整数 n を *Gauss* 記号 $[a]$ で表す）。

注意：ここの議論は少々同義語反復に近く感じられるかもしれない。もっとクリアーに理解したい人は、まずは杉浦光夫「解析入門 I」pp.29-30 を見られることを勧める。

B　代数方程式の有理根の存在、非存在

B.1　3 次方程式の有理根の存在、非存在

定理 B.1 一つの作図問題において与えられた数を有理数体に添えて得られる体を K とし、作図しようとする数が K 上の *3* 次方程式

$$f(x) = x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0 \tag{2}$$

を満たすとする。このとき、この作図が可能ならば $f(x) = 0$ の少なくも 1 根は K に含まれる。

証明：$x = y - a_1/3$ とおいて (2) を変形すれば

$$y^3 + py + q = 0 \quad (p, q \in K) \tag{3}$$

の形となる。x が作図可能ならば y も作図可能である。よって、上式の 3 根のうちに作図可能なものがあれば、少なくとも 1 根は K に含まれる事を云う。

上式の 3 根 y_1, y_2, y_3 のうち y_1 が作図可能とする。このとき 適当に実平方根 $\sqrt{\theta_1}, \sqrt{\theta_2}, \cdots$ を K に添加した拡大体

$$K_0 = K, K_1 = K_0(\sqrt{\theta_1}), \cdots, K_m = K_{m-1}(\sqrt{\theta_m})$$

を作り、K_m になって始めて y_1 が含まれるようにできる。$y_1 \in K$ ならば、これは作図できるから、 $y_1 \notin K$ 即ち $m \geq 1$ と仮定しよう。K_m の数は $\lambda + \mu\sqrt{\theta_m}(\lambda, \mu \in K_{m-1})$ の形に表されるから

$$y_1 = \lambda + \mu\sqrt{\theta_m} \quad (\lambda, \mu \in K_{m-1}; \mu \neq 0)$$

とする（$\mu = 0$ ならば $y_1 \in K_{m-1}$ となることに注意)。これを、(3) に代入して整理すると

$$(\lambda^3 + 3\lambda\mu^2\theta_m + p\lambda + q) + (3\lambda^2\mu + p\mu)\sqrt{\theta_m} = 0$$

この式の 2 つの括弧中の数は K_{m-1} に含まれ、 θ_m は K_{m-1} の数の 2 乗に等しくはないから、2 つの括弧中の数は 0 に等しくなければならない。故に、

$$(\lambda^3 + 3\lambda\mu^2\theta_m + p\lambda + q) - (3\lambda^2\mu + p\mu)\sqrt{\theta_m} = 0$$

であり、$\lambda - \mu\sqrt{\theta_m}(\neq y_1)$ もまた、(3) の根である。 そこでこれを y_2 とすれば、$y_1 + y_2 = 2\lambda$。ところで、根と係数の関係から $y_1 + y_2 + y_3 = 0$ だから、 $y_3 = -2\lambda$ となり、 $y_3 \in K_{m-1}$ が分かる。

$y_3 \in K$ ならば、定理は示されているから、y_3 が $K_1, \cdots, K_{m-1}$ のうち $K_\ell(1 \leq \ell < m)$ に至り初めて含まれているとする。$y_3 = \lambda' + \mu'\sqrt{\theta_\ell}(\lambda', \mu' \in K_{\ell-1}; \mu' \neq 0)$ のように書けば、上と同様にして y_1, y_2 のうち一方が $\lambda' - \mu'\sqrt{\theta_\ell}$ に等しく、他は $-2\lambda'$ に等しい。これは、y_1 が初めて K_m に含まれるという仮定に矛盾する。

以上で y_1, y_2, y_3 の少なくとも一つは K に含まれなければならない。 □

定理 B.2 有理係数の *3* 次方程式が有理根をもたなければ、その根はいずれも有理数体 $\mathbb{Q}$ から出発したのでは作図することができない。

証明：ポイントは $p + q\sqrt{w}$ が根ならば $p - q\sqrt{w}$ も根であること。

B.2 立方体倍積不能性

立方体倍積問題は与えられた立方体の一稜を 1 とすると

$$x^3 - 2 = 0 \qquad (**)$$

なる方程式を解くことになる。この方程式は有理根をもたず、従って作図できない。

証明：もし、有理根があるとし、それを既約分数 p/q (p, q: 互いに素な整数) で表すとすると、

$$p^3 - 2q^3 = 0$$

を満たす。よって、p は偶数でなければならない。$p = 2p'$ (p' は整数) とおけば、$4p'^3 - q^3 = 0$ となり、q も偶数でなければならない。これは p, q が互いに素な整数という仮定に矛盾する。 □

B.3 正 7 角形の作図不能性

これは、方程式 $x^7 - 1 = 0$ の 1 ならざる有理根の非存在を示すことに帰着される。

証明：複素数平面の単位円周を 7 等分する。第 1 分点に対応する複素数 $z = \cos(2\pi/7) + i\sin(2\pi/7)$ についてみる。$z^7 - 1 = 0$ から、

$$z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

を得る。$\tau = z + z^{-1}$ とおくと、これは第 1 分点の横座標 $\cos(2\pi/7)$ の 2 倍に等しく、

$$\tau^3 + \tau^2 - 2\tau - 1 = 0$$

となる。これらが有理根を持たないことは正 3 角形の作図不能性の場合と同様に示される。 □

演習問題 B.1 正 *9* 角形の作図不能性を証明せよ。

B.4　正 5 角形の作図

まず、与えられた数の有理演算の作図 と平方根の作図を、Courant-Robbins から借用しよう。さて、正 10 角形を作図することを考える。正 10 角形が半径 1 の円に内接しているとすると図で示される。

その辺の長さを x とすると、x に対する円の中心角は $36°$ であるから、$\angle OAB = \angle OBA = 72°$ となる。故に $\angle OAB$ の 2 等分線は半径と点 C で交わり、3 角形 OAB は 2 個のいずれも長さ x の等しい辺を有する 2 等辺 3 角形に分ける。3 角形 OAB は 3 角形 ABC と相似だから $1/x = x/(1-x)$ 即ち $x^2 + x - 1 = 0$ となり、x は正だから $x = (\sqrt{5}-1)/2$ となる。$\sqrt{5}$ は長さ 1 と 2 の長方形の対角線だから作図可能で、この長さ x を円周上にとれば正 10 角形が作図できる。正 5 角形はとびとびの点を 5 個取れば良い。

B.5　正 17 角形の作図可能性

［Gauss による証明[10]、作図法を実際に与えたものではない］：複素数平面の単位円周を 17 等分し、第 1 分点に対応する複素数 $z = \cos(2\pi/17) + i\sin(2\pi/17)$ について考察する。作図可能かどうかは $z + z^{-1}$ 即ち、第 1 分点の横座標の 2 倍が 1 に四則と実開平を行って得られることを確かめれば良い。

$z^{17} - 1 = 0$ から、

$$z^{16} + z^{15} + \cdots + z^2 + z + 1 = 0 \tag{4}$$

となる。いま、

$$y_0 = z + z^{-8} + z^{-4} + z^{-2} + z^{-1} + z^8 + z^4 + z^2,$$
$$y_1 = z^3 + z^{-7} + z^5 + z^{-6} + z^{-3} + z^7 + z^{-5} + z^6$$

とおいて、$z^{17} - 1 = 0$ 及び (4) 式を用いて計算すれば

$$y_0 y_1 = 4(y_0 + y_1) = -4.$$

よって y_0, y_1 は 2 次方程式

$$y^2 + y - 4 = 0 \tag{5}$$

の 2 根である。次ぎに

$$u_0 = z + z^{-4} + z^{-1} + z^4,$$
$$u_1 = z^3 + z^5 + z^{-3} + z^{-5},$$
$$u_2 = z^{-8} + z^{-2} + z^8 + z^2 u_3 = z^{-7} + z^{-6} + z^7 + z^6$$

とおけば同様にして

$$u_0 + u_2 = y_0, \quad u_1 + u_3 = y_1,$$
$$u_0 u_2 = u_1 u_3 = -1.$$

よって u_0, u_2 は 2 次方程式

$$u^2 - y_0 u - 1 = 0 \tag{6}$$

の 2 根である。そして u_1, u_3 は 2 次方程式

$$u^2 - y_1 u - 1 = 0 \tag{7}$$

の 2 根である。そこで更に

$$v_1 = z + z^{-1}, \quad v_2 = z^4 + z^{-4}$$

[10]「窪田」から収録

とおけば

$$v_1+v_2=u_0,\quad v_1v_2=u_1$$

となって v_1,v_2 は 2 次方程式

$$v^2-u_0v+u_1=0 \tag{8}$$

の 2 根である。

z^κ と $z^{-\kappa}$ は共役であるから、上の $y_0,y_1,u_0,u_1,u_2,u_3,v_1,v_2$ はすべて実数である。故に、2 次方程式 (5), (6), (7), (8) はいずれも四則と実開平で解かれる。(5) によって、y_0,y_1 を求め、そして (6), (7) から u_0,u_1,u_2,u_3 を求め、更に (8) から v_1,v_2 を求めれば、$v_1=z+z^{-1}$ が 1 に四則と実開平を行って得られることが分かる。
□

著者自らが作図法を考え出す可能性は少ないし、実際の作図は何人かの方法[11]があるようだが、それらを LaTeX で翻訳し印刷するのも大変なので、ここには収録しないことにする[12]。

C　論理について

ここで「背理法を用いる」といったが、ある命題の否定命題が分からないと、何をして良いか分からないことになる。そこで、以下の事を述べたが、これはあと数回は述べる機会があろうから、最初は何かわけの分からないことをいっているなー、と思っていて構わない。

命題論理について:『数列 $\{a_n\}$ が α に収束する』の否定命題『数列 $\{a_n\}$ は α に収束しない』とはどういうことか考えてみよう。

$$\text{数列 } \{a_n\} \text{ は } \alpha \text{ に収束しない。} \Longleftrightarrow (\exists\epsilon)(\forall N)(\exists n)\neg(n\geq N \Longrightarrow |a_n-\alpha|\leq\epsilon).$$

ところで、$(n>N \Rightarrow |a_n-\alpha|<\epsilon)$ の否定が $(n>N$ かつ $|a_n-\alpha|\geq\epsilon)$ となることは、以下の記号論理学の記述[13]を見ると推定できるであろう：まず、$(\neg\mathfrak{A})\vee\mathfrak{B}$ を $\mathfrak{A}\Rightarrow\mathfrak{B}$ と記述することにする。

$$(\neg\mathfrak{A})\vee\mathfrak{B}\equiv(\mathfrak{A}\Rightarrow\mathfrak{B}),\quad \neg(\mathfrak{A}\Rightarrow\mathfrak{B})\equiv\neg((\neg\mathfrak{A})\vee\mathfrak{B})\equiv\mathfrak{A}\wedge(\neg\mathfrak{B}),$$
$$\neg(\neg(\mathfrak{A}\Rightarrow\mathfrak{B}))\equiv\neg(\mathfrak{A}\wedge(\neg\mathfrak{B}))\equiv(\neg\mathfrak{A})\vee\mathfrak{B}\equiv(\mathfrak{A}\Rightarrow\mathfrak{B}).$$

質問：（論理式の読み方と論理式の否定について）『$(\mathfrak{A}\Rightarrow\mathfrak{B})$ の否定が $(\mathfrak{A}\wedge(\neg\mathfrak{B}))$ となることは良く分かったが、論理式『$(\forall\epsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in U)(\forall y\in U)(|x-y|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\epsilon)$』の否定が何故『$(\exists\epsilon>0)(\forall\delta>0)(\exists x\in U)(\exists y\in U)(|x-y|<\delta$ かつ $|f(x)-f(y)|\geq\epsilon)$』となるかが分からないという質問。もっともである、説明が足りなかったのだから。以下に、例で説明する』：例えば自然数全体 $\mathbb{N}$ の中で以下の『論理式』を考える。

$$(\forall x)(\exists y)(x<y)\quad \text{i.e. 任意の自然数 } x \text{ に対し、ある自然数 } y \text{ があって } x<y \text{ となる}$$

このとき、上の y は x ごとに変わったものをとってよい。実際、$y=x+1$ ととればよい。

この論理式の否定は

$$(\exists x)(\forall y)(y\leq x)\quad \text{i.e. ある自然数 } x \text{ があって、すべての自然数 } y \text{ に対し } y\leq x \text{ となる}$$

となる。しかし、これは偽な命題。上では「x が、個々の y に無関係にまず存在して、すべての y より大きい」という主張なのだから、間違っている（「論理式を用いて表現できていれば、その論理式の内容は正しい」とはならない）。

[11] von Staudt(1842), Richmond(1909), Gérard(1896)
[12] 例えば「窪田」を見よ
[13] 以下の命題は集合論との比較で納得し易いだろう。集合論の方はこれは図視化できる、ベン図とかいうのでは？

「実数の連続性」と定理 1.1 の同等性の証明について、杉浦光夫「解析入門 I」東京大学出版会の 27 ページには、以下のようなことが書いてある。まだ説明していない事柄については、もし時間が余ったら説明する予定である。

$$\begin{aligned}&\text{「連続性の公理」}\Longrightarrow\text{「有界単調増加列の収束」}\Longrightarrow\text{「アルキメデスの原理」}+\text{「区間縮小法」}\\&\Longrightarrow\text{「アルキメデスの原理」}+\text{「Boltzano-Weierstrass の補題」}\\&\Longrightarrow\text{「アルキメデスの原理」}+\text{「Cauchy の収束条件」}\Longrightarrow\text{「連続性の公理」}\end{aligned}$$

問題：「アルキメデスの原理」＋「区間縮小法」から直接「連続性の公理」が証明できないだろうか？

========== インターネットで見つけた勉強の仕方（参考になれば） ==========

有名中学・高校・大学受験合格法

慶応医・京大医に三流高校から現役合格したドクター瀧です

まずは教科書で、天下り的知識を得る。
→ 基礎プリを使って、「こういう時にはこうする」という「技」を覚える。
→ その解法を自分で使ってみるために、標準レベルの問題で演習する。
→ 必要に応じて、ハイレベルな問題に挑戦する。
→ 過去問を同じやり方でやってみる。
という流れで行けば、入試までに十分に間に合うと思います。解法確認の段階では何のことやら分からずに覚えていたことも、演習として問題をやっていく中で、自分が勘違いしていたことを発見し、「あ、そういうことだったのか。知らずに使ってた … 恥ずかしい。」という経験を積み重ねます。むしろ、最初から本質をしっかり理解しようと頑張ることの方が効率が悪い。さくらのプリントにも書いてありますよね。「数学は基礎の”つみなおし”」だと。この方法が間違っていると思われるなら、１年生のうちから学校の教科書を捨てて、専門書で勉強すればいいです。最初から本質を逐一理解することは不可能です。始めは意味不明だったことも、全体像をつかんでしまえば、すっきり分かるということもよくあります。

大学の数学は、それをやらずに、最初から厳密にぬかりなく議論を展開しようとするから、きわめて分かりにくい。だから結局、よく分からないまま先に進んで、後から戻ってみたら、「あ、そういうことだったのか。」と分かるわけです。解析学の最初で出てくる「有界な数列は集積点をもつ」とか、実数の完備性などは、何が重要なのか、というより、こんなことをしｑて何が嬉しいのかさっぱり分からないわけだけれども、位相空間論でコンパクト性の概念を学び、関数解析で、色んな関数空間を学んで、１年生の時にやったことの御利益が見えてくる。そしてこれらの概念によって微分方程式の解の存在定理が得られることを知って初めて、その理論の重要性を体感する。大学でも高校でも、教科書や参考書を作っている人は、そういった「目標地点」を分かった上で、既成事実を配列しているわけだから、最初から全部分かるはずがないということは、当然のことです。だから「最初は分からなくてもいい」ということもままあるわけです。そういう時には、とりあえず、先人の知恵を「そんなものかなあ」と受け入れることも大事だと思います。（ただし当然ながら、書いてあることの論理的正当性は確認しないと駄目。それをやらないと、「わけも分からず丸暗記」になってしまう。）

================

メモ：講義室の後の方には空席があったが、前に詰めて座っているし、多くの質問があった。このまま興味を持ち続けてくれると嬉しいことである。

多くの質問に一応答えたが、次回の講義で復習として繰り返す部分で再度答えることになるので、その折にもし分からなければまた質問して欲しい。また予習しているらしい Cauchy の平均値の定理についての質問には、２、３回後の講義で説明する予定であるが、吹田ー新保「微分積分学」pp.51-52 を何度か読み直しているうちに「分かってしまう」こともあるのだが！と答えたい。また、３時過ぎに私の所に質問にくると言っていた人には、部屋や筋向かいの部屋 (H317) で待っていたのだが会えなくて残念だった。質問を書いてメールしてくれるとすぐに答えられるのだが。