Applications du lemme de Sperner pour les triangles

Donald Violette
Université de Moncton

INTRODUCTION

La topologie combinatoire est un domaine important de la topologie algébrique et est toujours en plein essor. L'intérêt de ce domaine réside dans la possibilité de faire amplement appel à l'intuition géométrique et dans les nombreuses applications qui en découlent. Ainsi, il est assez facile de visualiser certains théorèmes en ayant recours à la géométrie et l'intuition. C'est notamment le cas du lemme de Sperner pour les triangles, lemme bien connu dans la littérature, en particulier pour son utilité dans des problèmes de points fixes. Le résultat central dans cet article est un corollaire de ce lemme. Ce problème nous a été exposé pour la première fois en 1979 par le professeur Gilles Fournier, mais nous n'y avons jamais donné suite. Nous tenons maintenant à combler cette lacune en donnant une démonstration fort simple de ce résultat, dont l'idée a été proposée par le professeur Fournier. Cet article met en lumière une discussion informelle qui eut lieu alors que nous en étions à nos premiers balbutiements dans le programme de doctorat en mathématiques pures à l'Université de Sherbrooke. En conséquence, l'article revêt une importance non seulement mathématique mais également historique, en plus de rendre hommage encore une fois à ce mathématicien de génie que fut le professeur Gilles Fournier.

1. **Le lemme de Sperner pour les triangles**

   Avant de rappeler le lemme de Sperner pour les triangles, nous allons tout d'abord définir ce qu'on entend par la notion de triangulation.

   Définition : Une *triangulation* d'un triangle T est une subdivision de T en un nombre fini de petits triangles (on divise T en petits triangles) telle que l'intersection de toute paire de triangles est une arête, un sommet ou bien est vide.

   Exemple :

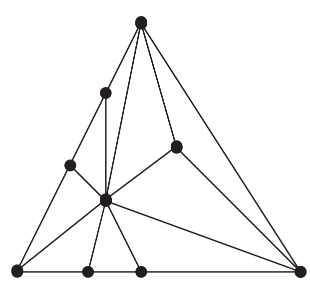

FIGURE 1

Numérotage de Sperner

i) Les sommets de la triangulation sont numérotés en se servant des chiffres 1, 2 et 3.

ii) Tout d'abord, on numérote les sommets du triangle original de façon à ce qu'on attribue à chaque sommet un numéro différent.

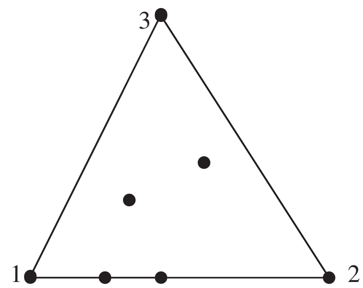

FIGURE 2

iii) Ensuite, les sommets appartenant à la frontière du triangle original sont numérotés comme suit : l'ensemble des numéros d'une nouvelle arête est un sous-ensemble des numéros de l'ancienne arête à laquelle elle appartient.

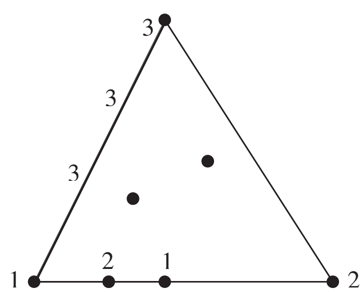

FIGURE 3

iv) Enfin, les sommets de l'intérieur du triangle original sont numérotés de façon quelconque.

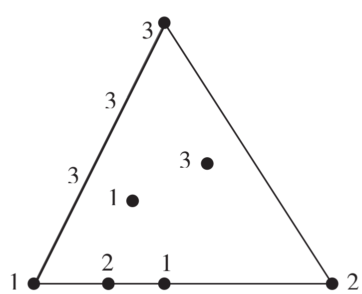

FIGURE 4

Définition : Un numérotage satisfaisant aux quatre conditions précédentes est appelé un *numérotage de Sperner*.

Lemme 1 (Lemme de Sperner pour les triangles) :

Soit T un triangle quelconque et considérons une triangulation de T ayant un numérotage de Sperner. Il existe alors un nombre impair de triangles de la triangulation qui sont également numérotés 1, 2 et 3 (et par conséquent au moins un triangle de la triangulation reçoit les numéros 1, 2, 3).

Dans l'exemple précédent, il y a exactement trois triangles de la triangulation qui sont numérotés 1, 2 et 3. Ces triangles sont appelés des *triangles complètement numérotés.*

2. **Corollaire du lemme de Sperner pour un triangle**

Nous allons maintenant donner un corollaire du lemme de Sperner pour les triangles. Ce corollaire est le résultat principal de cet article.

Lemme 2 (Corollaire du lemme 1) :

Soit un triangle T dont les sommets sont numérotés 1, 2 et 3, et considérons une triangulation de T. Si on numérote de façon quelconque, à l'aide des chiffres 1, 2 et 3, les sommets de la triangulation, alors on a au moins l'une des possibilités suivantes :

1) un sommet du triangle original a le même numéro qu'avant ;
2) une arête d'un nouveau triangle, c.-à-d. d'un triangle de la triangulation, appartenant à une arête du triangle original, a les mêmes numéros que cette dernière ;
3) il existe un petit triangle, c.-à-d. un triangle de la triangulation, complètement numéroté.

Démonstration : Pour démontrer ce lemme, on construit tout d'abord un grand triangle, incluant le triangle original, auquel nous allons appliquer le lemme de Sperner pour les triangles.

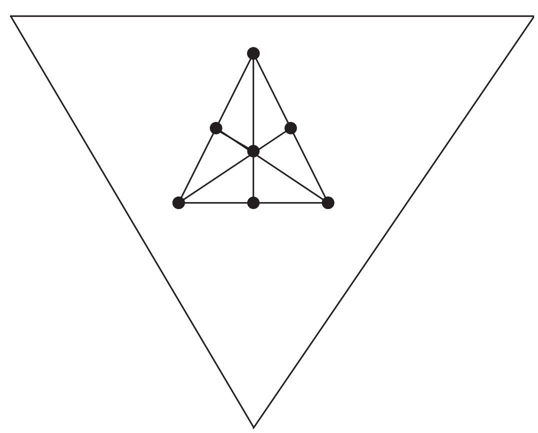

FIGURE 5

On rejoint maintenant, à l'aide de segments de droite, chaque sommet d'une arête quelconque du triangle original au sommet opposé appartenant au grand triangle.

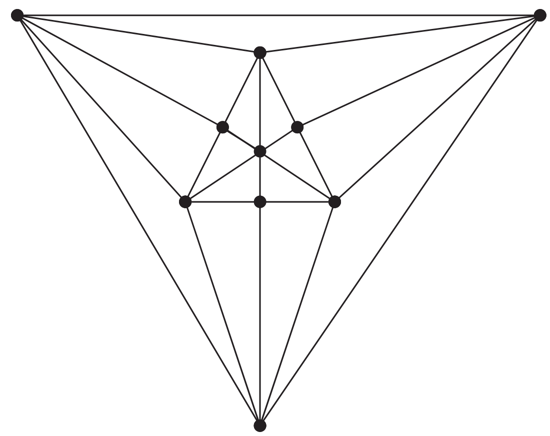

FIGURE 6

Les nouveaux triangles qui résultent de cette construction sont de deux types :

a) Type I : les triangles n'ont qu'un seul sommet en commun avec le grand triangle.

b) Type II : les triangles ont exactement deux sommets du grand triangle.

Effectuons maintenant un numérotage de Sperner au grand triangle en se servant des chiffres 1, 2 et 3, de sorte que chaque sommet du petit triangle porte le même numéro que le sommet du grand triangle qui lui est le plus éloigné, comme il est indiqué dans la figure. En vertu du lemme de Sperner pour les triangles, il existe au moins un triangle, noté T_0, numéroté 1, 2 et 3. De plus, ce triangle est soit à l'intérieur du triangle original, soit à l'extérieur. On a alors trois cas à distinguer.

Cas 1 : Le triangle T_0 est à l'intérieur du triangle original et on a la troisième possibilité.

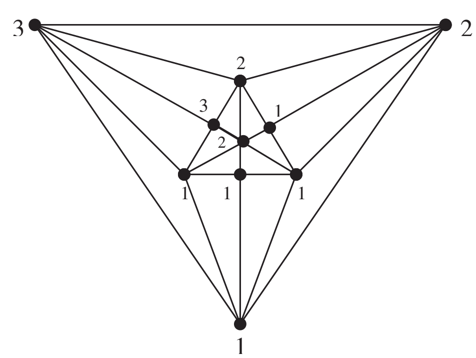

FIGURE 7

Cas 2 : Le triangle T_0 est à l'extérieur du triangle original et il est de type I. T_0 n'a donc qu'un seul sommet en commun avec le grand triangle et comme il est numéroté 1, 2 et 3, l'arête opposée à ce sommet doit nécessairement avoir les mêmes numéros que l'arête du triangle original à laquelle il appartient, d'où la deuxième possibilité.

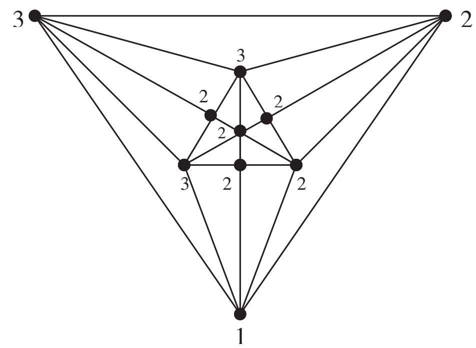

FIGURE 8

Cas 3 : Le triangle T_0 est à l'extérieur du triangle original et il est de type II. T_0 possède alors exactement deux sommets du grand triangle et comme il est numéroté 1, 2 et 3, un sommet du triangle original a le même numéro qu'avant. On a alors la première possibilité.

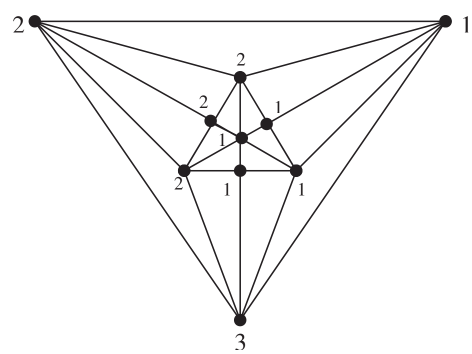

FIGURE 9

Ceci achève la démonstration.

3. Application du lemme de Sperner à la théorie du point fixe

Il existe une très jolie application du lemme de Sperner dans la théorie du point fixe, à savoir le théorème de Brouwer. Mais avant d'énoncer et de démontrer ce théorème, nous allons rappeler quelques notions connues dans le but de bien situer le lecteur, et nous donnerons diverses notations utilisées afin d'en rendre le contenu plus clair.

Définition : Une figure topologique X, tel un disque fermé, possède la *propriété du point fixe* si toute application continue f de X dans X admet un point fixe, c'est-à-dire il existe $x \in X$ tel que $f(x) = x$.

Définition : Supposons que X possède une certaine propriété. Si tout espace homéomorphe à X a également cette propriété, alors celle-ci est appelée une *propriété topologique*. Ainsi une propriété topologique est une propriété conservée par tout homéomorphisme, c.-à-d. une application continue inversible dont la réciproque est continue.

Remarque : La propriété du point fixe est une propriété topologique.

Définition : Un *champ de vecteurs*, noté V, sur un triangle T est une application qui associe à chaque point P de T un vecteur lié dans le plan dont P est le point origine.

Notation : $V : T \to T$ $P \mapsto V(P)$ où $V(P)$ est le vecteur lié de point origine P.

Sans perte de généralité, on peut supposer que le point origine du vecteur $V(P)$ est l'origine. Remarquons que tout vecteur lié à l'origine est entièrement déterminé par son point extrémité et donc peut être décrit par les coordonnées de son extrémité. Si $g(P)$ est le point extrémité du vecteur $V(P)$, il est clair que $g(P) = P + V(P)$. Il s'ensuit que l'application g est continue si et seulement si V l'est. Soit P un point de T tel que $g(P) = P$, alors $P + V(P) = P$ et on a $V(P) = 0$. Réciproquement, si P est tel que $V(P) = 0$, alors $g(P) = P$. Par conséquent, l'étude des points fixes de l'application g se ramène à celle des zéros de l'application V.

Rappelons qu'une application $f : T \to T$ est *continue* si pour toute suite $\{P_n\}$ dans T qui converge vers $P \in T$, la suite $\{f(P_n)\}$ converge vers le point $f(P)$. Un sous-ensemble de R^2 est *compact* s'il est fermé et borné. Dans un ensemble compact, toute suite possède une suite extraite convergente, et dans un ensemble fermé, toute suite convergente converge vers un point de cet ensemble.

Nous allons maintenant démontrer le théorème de point fixe de Brouwer à l'aide du lemme de Sperner pour les triangles.

Théorème 1 (Théorème de point fixe de Brouwer) :

Toute application continue $f : D \to D$ où $D = \{(x, y)/x^2 + y^2 \leq 1\}$, a au moins un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe un point $x \in D$ tel que $f(x) = x$.

Démonstration : Il est suffisant de montrer que tout triangle dans le plan R^2 possède la propriété du point fixe car tout triangle est homéomorphe à un disque fermé et que la propriété du point fixe est une propriété topologique.

Pour des besoins d'écriture et à des fins de simplification, choisissons un triangle T de façon à ce que sa base soit portée par l'axe horizontal et sa hauteur soit située sur l'axe vertical.

Soit une application continue g de T dans T. Pour faciliter la démonstration, nous allons considérer seulement trois directions possibles : le sud, le nord-est et le nord-ouest. Ces directions sont déterminées respectivement par le demi-plan inférieur et par les premier et deuxième quadrants. Tout vecteur non nul se dirige au moins vers l'une de ces directions alors que le vecteur nul pointe dans toutes les directions en même temps.

En associant 1 à tout vecteur pointant vers le nord-est, 2 à tout vecteur pointant vers le nord-ouest et finalement 3 à tout vecteur se dirigeant vers le sud (voir la figure 9), nous pouvons effectuer à T une triangulation ayant un numérotage de Sperner.

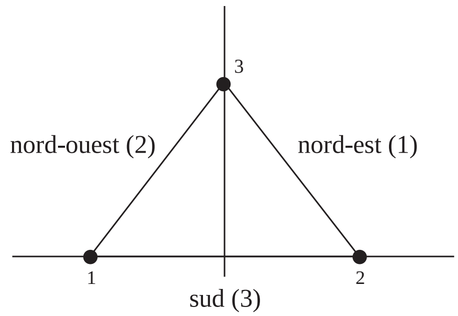

FIGURE 10

En vertu du lemme de Sperner pour les triangles, il existe au moins un triangle de cette triangulation qui est complètement numéroté et tous les vecteurs dans ce triangle pointent nécessairement dans l'une des trois directions retenues (voir la figure 10).

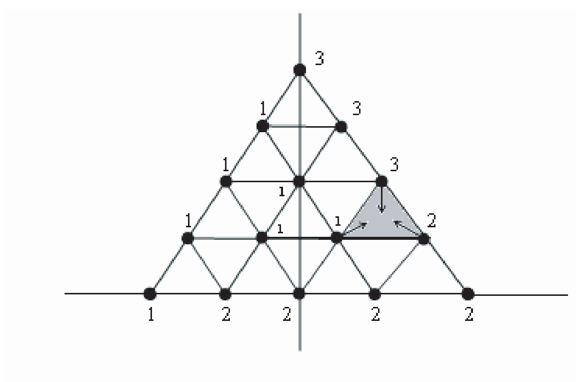

FIGURE 11

En continuant ce procédé indéfiniment, T va contenir des triangles complètement numérotés de diamètre aussi petit que l'on veut. En effet, nous obtenons une suite de triangulations de T ayant un numérotage de Sperner dont les diamètres de ces triangles tendent vers 0. Mais dans chacune de ces triangulations, il y a au moins un triangle complètement numéroté. Par suite, T contient une suite de triangles T_n complètement numérotés dont les sommets sont désignés par v_n, w_n et z_n, que l'on numérote 1, 2 et 3. De plus, $\lim_{n\to\infty} d(T_n) = 0$ où $d(T_n) = \sup\{\|t_n - s_n\|/t_n, s_n \in T_n\}$ est le diamètre de T_n .

Comme T est compact, la suite $\{v_n\}$ possède une suite extraite qui converge vers un point $P \in T_n$. Puisque $\lim_{n\to\infty} d(T_n) = 0$, on peut extraire des suites de $\{w_n\}$ et $\{z_n\}$ qui convergent également vers P. Mais l'application $V : T \to T$ est continue car l'application g définie par $g(P) = P + V(P)$ l'est et donc les suites $\{V(v_n)\}, \{V(w_n)\}$ et $\{V(z_n)\}$ possèdent des suites extraites qui convergent toutes vers le vecteur $V(P)$ associé à P. Par suite, $V(P)$ pointe dans la direction nord-est car la suite $\{V(v_n)\}$ est contenue dans le premier quadrant qui est fermé. Idem, $V(P)$ pointe dans la direction nord-ouest ainsi que dans la direction sud. On en conclut que $V(P) = 0$ car le vecteur nul est le seul vecteur qui pointe dans les trois directions en même temps et donc $g(P) = P$. Par conséquent, T possède la propriété du point fixe et l'application $f : D \to D$ admet au moins un point fixe. Ceci achève la démonstration.

CONCLUSION

Les arguments utilisés dans la démonstration du lemme 2 sont simples et augmentent l'intérêt de ce lemme. C'est un joli résultat de la topologie combinatoire qui apporte une certaine contribution à ce domaine des mathématiques. L'application du lemme en théorie du point fixe met en évidence l'intérêt et la pertinence de ce lemme.

RÉFÉRENCE BIBLIOGRAPHIQUES

Bondy, J. A. et Murty, U.S.R. (1976). *Graph Theory with Applications*. North-Holand.

Henle, M. (1979). *A combinatorial introduction to topology*. San Francisco (CA), W.H. Freeman.

Honsberger, R. (1970). *Ingenuity in Mathematics*. MAA.

Massey, W. S. (1967). *Algebraic Topology*. New-York, Harcourt, Brace and World Inc.

Spanier, E. H. (1966). *Algebraic Topology*. San Francisco, McGraw-Hill Series in Higher Mathematics.

Willard, S. (1970). *General Topology*. Don Mills, Ontario, Addison-Wesley Publishing Company.