

第3章

大気の状態方程式と諸量

3.1 乾燥大気の状態方程式

理想気体の混合したものとして大気を扱う。下部熱圏（～100km）以下の均質圏ではそう仮定しても構わない。そうすると、各物質毎に状態方程式

$$p_i \alpha_i = \frac{R^*}{m_i} T \quad \text{or} \quad p_i = \frac{R^*}{m_i} \rho_i T \quad \text{or} \quad p_i v = \frac{n_i}{m_i} R^* T$$

が成り立つ。ここに、 $\alpha_i = 1/\rho$ は i 番目の物質の比容（specific volume）、 m_i はその分子量、 n_i はその質量、 p_i はその分圧、 R^* は普遍気体定数（ $8.3145 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ ）（universal gas constant）、 v は全体の体積。 n_i/m_i は各気体のモル数になる。混合気体の圧力は各分圧の和に等しい、つまり

$$p = \sum p_i$$

だから、混合気体全体に対しては

$$v \sum p_i = R^* T \sum \frac{n_i}{m_i} \quad \rightarrow \quad vp = \frac{n}{\bar{m}} R^* T \quad \rightarrow \quad p\alpha = RT \quad \text{or} \quad p = \rho RT$$

ただし、

$$n \equiv \sum n_i, \quad \bar{m} \equiv \frac{n}{\sum (n_i/m_i)}, \quad R \equiv \frac{R^*}{\bar{m}}$$

であり、 \bar{m} は混合気体の平均分子量（大気は約 28.94）、 R は混合気体の気体定数（比気体定数、specific gas constant、乾燥大気で約 $287 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ ）となる。

3.2 湿潤大気の状態方程式

大気に混合している他の気体と水蒸気とを別扱いにする。その理由は、水蒸気は相変化を通じて潜熱を放出・吸収することにより大気に大きな影響を与え、また、その濃度が時間空間で大きく変化するため、常にその動向を追いかける必要があるから。水蒸気を含んだ大気を湿潤大気、含まない大気（水蒸気以外の大気成分）を乾燥大気と呼ぶ。

それ自体混合空気である乾燥大気の状態方程式に添字の d をつけ（上付きバーは省略）、水蒸気の状態方程式には w を付ける。

$$p_d v = \frac{n_d}{m_d} R^* T \quad (3.1)$$

$$e v = \frac{n_w}{m_w} R^* T \quad (3.2)$$

ただし、習慣として水蒸気圧を e で示す。これらの式から

$$(p_d + e)v = pv = \left(\frac{n_d}{m_d} + \frac{n_w}{m_w} \right) R^* T = \left(n_d + \frac{m_d}{m_w} n_w \right) R_d T = \left(n_d + \frac{n_w}{\varepsilon} \right) R_d T \approx \left(n_d + \frac{n_w}{0.622} \right) R_d T$$

ここで、

$$\varepsilon \equiv \frac{m_w}{m_d} \approx \frac{18}{28.94} = 0.622 \quad , \quad R_d \equiv \frac{R^*}{m_d}$$

である。これをもう少し使いやすい形に近似しよう。

比湿

体積 v の 1 kg の湿潤大気に s kg の水蒸気が含まれているとすると、このような s を比湿 (specific humidity) と呼ぶ。これを使うと状態方程式は

$$pv = \left(1 - s + \frac{s}{\varepsilon} \right) R_d T \approx (1 + 0.608s) R_d T$$

となる。 R_d は乾燥空気の気体定数。例えば、気圧と水蒸気圧がわかれば比湿を求めることができる。式 (3.1) と (3.2) から、

$$\frac{e}{p_d} = \frac{n_w}{m_w} \frac{m_d}{n_d} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{s}{1-s} \quad (3.3)$$

だから、

$$s = \frac{e\varepsilon}{p_d + e\varepsilon} = \frac{e\varepsilon}{p + (\varepsilon - 1)e} \approx \frac{0.622e}{p - 0.378e}$$

混合比

体積 v の 1kg の乾燥大気と q kg の水蒸気が混合しているとする。このような q を混合比と呼ぶ。このような $1 + q$ kg の空気の体積を v^* とすると、状態方程式は

$$pv^* = \left(1 + \frac{q}{\varepsilon} \right) R_d T$$

同じ空気の 1kg の体積を v とすると、

$$pv^* = pv(1+q) = \left(1 + \frac{q}{\varepsilon} \right) R_d T \rightarrow pv = \frac{1 + q/\varepsilon}{1 + q} R_d T$$

混合比も気圧と水蒸気圧がわかれば求めることができる。式 (3.3) から、

$$\frac{e}{p_d} = \frac{n_w}{m_w} \frac{m_d}{n_d} = \frac{q}{\varepsilon}$$

だから、

$$q = \frac{e\varepsilon}{p_d} = \frac{0.622e}{p - e}$$

比張

通常の大気状態では $e/p < 0.05 \sim 0.1$ なので、

$$q \approx s \approx \frac{0.622e}{p} \equiv w$$

となる。この w を比張という。

仮温度

湿潤大気の状態方程式を変形して

$$p\alpha = R_d T_v$$

ここで、

$$T_v \equiv (1 + 0.608s)T = \frac{1 + q/\varepsilon}{1 + q}T$$

この温度の次元を持つ量 T_v を仮温度 (virtual temperature) と呼ぶ。仮温度を導入すると湿潤大気の状態方程式が乾燥大気のそれと同じとなって便利。 $s < 0.05$ 程度だから、 $T_v - T < 10\text{K}$ 程度以下。