例題 1.　p，q を互いに素な自然数とする．

$$\left[\frac{q}{p}\right]+\left[\frac{2q}{p}\right]+\left[\frac{3q}{p}\right]+\cdots+\left[\frac{(p-1)q}{p}\right]$$

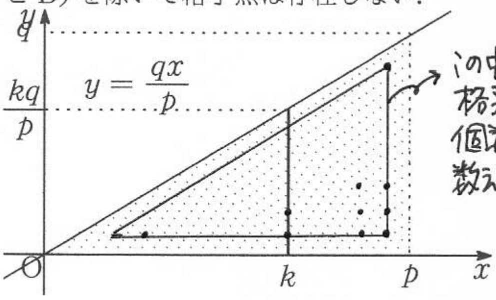
を p，q で表せ．

うーん 計算できるとは とても思えません

考え方　どうすればよいのか全く分かりませんが，ガウス記号の中身が $\dfrac{qx}{p}$ の x に 1 から $p-1$ まで代入した形になっていること，それと前述の格子点のイメージがあれば，直線 $y=\dfrac{q}{p}x$ のグラフと格子点の関係が思い浮かんでくるはずです．

浮かんでません

解　4 点 O(0, 0)，A(p, 0)，B(p, q)，C(0, q) で囲まれた長方形を考えると，p，q は互いに素だから，対角線 OB 上には，両端の点（すなわち O と B）を除いて格子点は存在しない．



この中の格子点の個数を数えます

対角線 OB の方程式は $y=\dfrac{qx}{p}$ である．

上図の点線部分（ただし境界線は含まない）に含まれる格子点の個数を数える．

直線 $x=1$ 上にある格子点は $\left[\dfrac{q}{p}\right]$ 個，

直線 $x=2$ 上にある格子点は $\left[\dfrac{2q}{p}\right]$ 個，

………

直線 $x=p-1$ 上にある格子点は $\left[\dfrac{(p-1)q}{p}\right]$ 個

よって，これらの総和は，

$$\left[\frac{q}{p}\right]+\left[\frac{2q}{p}\right]+\left[\frac{3q}{p}\right]+\cdots+\left[\frac{(p-1)q}{p}\right]$$

こんな風に数えるのか… 数学は発想力やね

お見事!!

と表され，これは長方形 OABC の内部（周上は含まない）に含まれる格子点の個数 $(p-1)(q-1)$ の半分である．したがって，

$$\sum_{k=1}^{p-1}\left[\frac{kq}{p}\right]=\frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

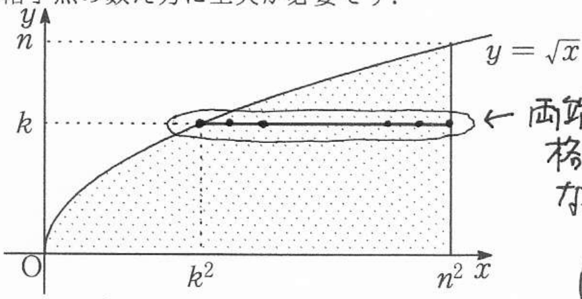
これはスゴいわ

感動…　■

例題 2.　$\displaystyle\sum_{m=1}^{n^2}[\sqrt{m}]$ を求めよ．

［1999 年大阪大後期］

考え方　いかにもムズそうですが，先ほどと同様に考えると，あるグラフとその下部に含まれる格子点がイメージできるはずです．ただし，今回の場合は格子点の数え方に工夫が必要です．



← 両端が格子点になっています

だから横で切ったのね

解　$\displaystyle\sum_{m=1}^{n^2}[\sqrt{m}]$ は図の点線部分（境界線は含まない）に含まれる格子点の総和を表している．

$y=k$ 上の格子点の個数は n^2-k^2+1 個なので，

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{n^2}[\sqrt{m}]&=\sum_{k=1}^{n}(n^2-k^2+1)\\&=n^3-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+n\\&=\frac{4n^3-3n^2+5n}{6}\end{aligned}$$

■

注　先ほどの **例題 1.** では領域を縦切り（$x=k$）したのに対し，今回は横切り（$y=k$）しています．なぜだかわかるでしょうか．今回の場合を縦切りすると，切る箇所によって $y=\sqrt{x}$ 上に格子点にあったり，なかったりするので，統一して数えられないからです．横に切れば，$y=\sqrt{x}$ 上が必ず格子点になるので数えることができます．

とても大切な考え方です

このように，関数の種類に応じて切る方向を検討する必要があるので注意しよう．

OK

4　応用問題

ちょっとムズいで

例題 3.　実数 r に対して，$n \leqq r < n+1$ となる整数 n を $[r]$ と表すことにする．正の整数 m について，$f(m)=[m-\log_2(m+1)]$ とおく．

(1)　$m+1=2^s$ となる整数 s があれば，$f(m+1)=f(m)$ となることを示せ．

(2)　$m+1=2^s$ となる整数 s がなければ，$f(m+1)=f(m)+1$ となることを示せ．

［2010 年大阪市立大］

サッパリわからん

ムリ〜

実は文系の問題

考え方 この問題もガウス記号を不等式で考える典型的な問題．不等式にしてしまえば，ガウス記号なんて関係ないねえ．ちなみに文系の問題です．

解 (1) $m+1=2^s$ のとき，

m−s が整数だから

$f(m)=[m-\log_2 2^s]=[m-s]=m-s$

次に，$f(m+1)=\underline{[m+1-\log_2(m+2)]}$ を考える．

整数ではない．よって整数でハサむ．

$m+1=2^s$ より，$m+2=2^s+1$．

$2^s<2^s+1<2^{s+1}$ なので，$2^s<m+2<2^{s+1}$．

よって，$s<\log_2(m+2)<s+1$．

$$(m+1)-(s+1)<(m+1)-\log_2(m+2)<(m+1)-s$$

連続する2整数でハサめました

よって，

$\underline{m-s}<m+1-\log_2(m+2)<\underline{(m-s)+1}$

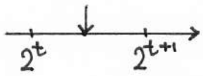
$\therefore\ f(m+1)=[m+1-\log_2(m+2)]=m-s$

したがって，$f(m+1)=f(m)$ が成立する．

成功!!

(2) $m+1=2^s$ となる整数 s がなければ，ある整数 t について

$$2^t<m+1<2^{t+1}$$



このとき，$t<\log_2(m+1)<t+1$ より

同じく．連続する2整数でハサむ

$$\underline{m-(t+1)}<m-\log_2(m+1)<\underline{m-t}$$

よって，$f(m)=[m-\log_2(m+1)]=m-t-1$．

次に，$f(m+1)=[m+1-\log_2(m+2)]$ を考える．

$2^t+1<m+2<2^{t+1}+1$ より，

$2^t<m+2\leqq 2^{t+1}$ であるから，

$$t<\log_2(m+2)\leqq t+1$$

$$(m+1)-(t+1)\leqq(m+1)-\log_2(m+2)<(m+1)-t$$

同じくハサむ

よって，

$\underline{m-t}\leqq m+1-\log_2(m+2)<\underline{(m-t)+1}$

$\therefore\ f(m+1)=[m+1-\log_2(m+2)]=m-t$

したがって，$f(m+1)=f(m)+1$ が成立する．

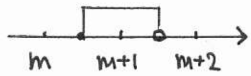
とにかく，ひたすら不等式でハサんでいます　そうやね ■

例題 4.　$[x]+\left[x+\dfrac{1}{2}\right]=[2x]$ を示せ．

シンプルな式やけどどこから手をつけてよいやら…　うーん

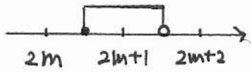
考え方 このままではどうしようもないので，とりあえず $\underline{[x]=m}$ とでもおくと，ガウス記号の定義より $m\leqq x<m+1$ となります．このとき，

$$m+\frac{1}{2}\leqq x+\frac{1}{2}<m+\frac{3}{2}$$



なので，$\left[x+\dfrac{1}{2}\right]=m$ または $m+1$ の可能性があります．また，

$$2m\leqq 2x<2m+2$$



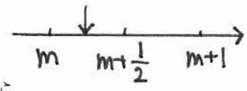
なので，$[2x]=2m$ または $2m+1$ の可能性があります．

だから場合分けするのネ　どっちになるのかわからん

この場合分けが証明のカギとなります．

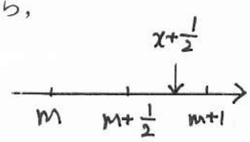
解 $[x]=m$ とすると，$m\leqq x<m+1$．この区間を 2 等分して考える．

(i) $m\leqq x<m+\dfrac{1}{2}$ のとき，



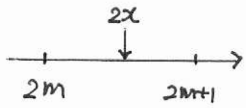
$m+\dfrac{1}{2}\leqq x+\dfrac{1}{2}<m+1$ だから，

$$\left[x+\frac{1}{2}\right]=m$$



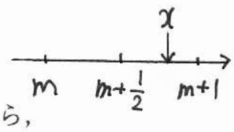
$2m\leqq 2x<2m+1$ だから，

$$[2x]=2m$$



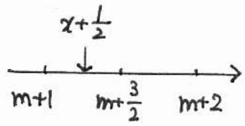
$$\therefore\ [x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$$

(ii) $m+\dfrac{1}{2}\leqq x<m+1$ のとき，



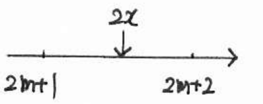
$m+1\leqq x+\dfrac{1}{2}<m+1+\dfrac{1}{2}$ だから，

$$\left[x+\frac{1}{2}\right]=m+1$$



$2m+1\leqq 2x<2m+2$ だから，

$$[2x]=2m+1$$



$$\therefore\ [x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$$

■

きちんと数直線をイメージすれば大丈夫

参考 一般に次のことが成り立ちます．

> n を 2 以上の自然数とするとき，
>
> $$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx]$$
>
> が成立する．

そう言われても…

$n=2$ の場合の証明をそのまま一般化します．つまり，$[x]=m$ として，区間 $m\leqq x<m+1$ を n 等分します．意欲的な人は証明に挑戦してみよう．

はーい