楕円型連立半線形偏微分方程式の解に対する精度保証付き数値計算法

関根　晃太 *

* 早稲田大学 応用数理学科

概要． 楕円型連立半線形偏微分方程式の解は，様々な反応拡散方程式の定常解を記述する．しかし楕円型連立半線形偏微分方程式の解は解析的に得ることは難しく，コンピュータを利用した近似解を得ることで現象の理解に繋げている．本講演では，楕円型連立半線形偏微分方程式の解に対する精度保証付き数値計算法について紹介する．前半では楕円型連立線形-半線形偏微分方程式の精度保証付き数値計算法について述べる．後半では，より一般的なクラスの方程式について述べる．

1. はじめに

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ を有界な多角形領域する．本講演では次のような非線形 Dirichlet 境界値問題

$$
\begin{cases}
-\Delta u = f_1(u, v) & \text{in } \Omega, \\
-\Delta v = f_2(u, v) & \text{in } \Omega, \\
u = v = 0 & \partial\Omega,
\end{cases}
\tag{1.1}
$$

の近似解 $\hat{u}, \hat{v}$ と真の解 u^*, v^* の誤差をコンピュータを用いて厳密に評価することが目的である。この様な 2 階楕円型偏微分方程式の境界値問題の精度保証付き数値計算法は 1988 年に中尾充宏によって初めて提唱された [1]．特徴的な点は Sobolev 空間論の導入と不動点定理に基づく解の検証アルゴリズムの開発などがあげられる．詳しくは最新の手法まで丁寧にまとめてある和書 [2] を是非参照されたい．中尾の研究を皮切りに 1991 年に Plum [3]，1995 年に大石 [4] がそれぞれ偏微分方程式を見据えた精度保証付き数値計算法を考案している．詳しくは Plum [5]，大石 [6, 7] をそれぞれ参照されたい．

本講演では，楕円型連立半線形偏微分方程式 (1.1) の解の精度保証付き数値計算法について解説する．特に難しいとされる線形化作用素の逆作用素のノルム評価について集中して解説する．

本要項の構成は以下のようにした．2 章に偏微分方程式の精度保証付き数値計算に必要となる基本事項をまとめた．これは対象としている楕円型連立半線形偏微分方程式以外でもよく用いられる関数空間の設定や定理である．3 章は楕円型連立線形-半線形偏微分方程式である定常 FitzHugh-Nagumo 方程式について述べている．4 章では特に評価が難しいといわれる線形化作用素の正則性とその逆作用素のノルムの評価法を詳しく解説している．5 章では一般的な楕円型連立半線形偏微分方程式の解に対する精度保証付き数値計算法について簡単に紹介している．

2. 準備

2.1 関数空間の定義

$L^p(\Omega)$, $p \in [1,\infty)$ は Lebesgue p 乗可積分可能な関数空間とする．$p = 2$ について，内積 $(u,v)_{L^2} := \int_\Omega u(x)v(x)dx$ とし，内積から誘導されるノルムを $\|\cdot\|_{L^2} := \sqrt{(\cdot,\cdot)_{L^2}}$ とする．正のある実数 s について $H^s(\Omega)$ は s 階の L^2-Sobolev 空間とする．

σ を $\sigma \geq 0$ を満たす実数とする．関数空間 $H^1_0(\Omega)$ を $H^1_0(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$ とし，その内積を

$$(\cdot,\cdot)_{H^1_\sigma} := (\nabla\cdot,\nabla\cdot)_{L^2} + \sigma(\cdot,\cdot)_{L^2} \tag{2.1}$$

とする．また，内積から誘導されるノルムを $\|\cdot\|_{H^1_\sigma} := \sqrt{(\cdot,\cdot)_{H^1_\sigma}}$ とする．$H^{-1}(\Omega)$ を $H^1_0(\Omega)$ の共役空間とする．$T \in H^{-1}(\Omega)$ と $u \in H^1_0(\Omega)$ について，$\langle T,u\rangle$ によって共役対を表す．また，$T \in H^{-1}(\Omega)$ のノルムを

$$\|T\|_{H^{-1}_\sigma} := \sup_{u\in H^1_0(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{|\langle T,u\rangle|}{\|u\|_{H^1_\sigma}}$$

とする．特に関数空間 $H^1_0(\Omega)$ と $H^{-1}(\Omega)$ でどの内積を導入したか重要となる場合のみ $H^1_{0,\sigma}(\Omega)$ と $H^{-1}_\sigma(\Omega)$ と表記する．$L^\infty(\Omega)$ を Ω 上で本質的に有界となる関数の全体とし，そのノルムを $\|u\|_{L^\infty} := \operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega}|u(x)|$ とする．X, Y を Banach 空間とする．$L(X,Y)$ を有界線形作用素の集合とし，そのノルムを $\|\mathcal{T}\|_{L(X,Y)} := \sup_{u\in X\setminus\{0\}} \|\mathcal{T}u\|_Y/\|u\|_X$, $\mathcal{T} \in L(X,Y)$ とする．

2.2 Sobolev の埋め込み定理

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ から Sobolev の埋め込み定理より $p \in [2,\infty)$ において $H^1_0(\Omega)$ は $L^p(\Omega)$ に埋め込まれ，

$$\|u\|_{L^p} \leq C_{p,\sigma}\|u\|_{H^1_\sigma} \text{ for } u \in H^1_0(\Omega) \tag{2.2}$$

を満たす定数 $C_{p,\sigma}$ が存在する．定数 $C_{p,\sigma}$ は [5] の Lemma1 を利用して定量的に計算できる．

2.3 有限次元部分空間への直交射影とその性質

X_h を有限要素基底関数に基づく $H^1_0(\Omega)$ の有限次元部分空間とする．メッシュサイズ $h(0 < h < 1)$ に依存した直交射影 $\mathcal{P}_{h,\sigma} : H^1_0(\Omega) \to X_h$ を，任意の $u \in H^1_0(\Omega)$ に対し

$$(u - \mathcal{P}_{h,\sigma}u, \phi_h)_{H^1_\sigma} = 0,\ \phi_h \in X_h \tag{2.3}$$

を満たす作用素と定義する．$\mathcal{P}_{h,\sigma}$ について，

$$\|u - \mathcal{P}_{h,\sigma}u\|_{H^1_\sigma} \le C_{h,\sigma}\|(\Delta + \sigma)u\|_{L^2},\ \forall u \in H^1_0(\Omega) \tag{2.4}$$

を満たす定数 $C_{h,\sigma}$ が存在する．定数 $C_{h,0}$ の定量的な評価法は，Ω が有界凸領域上で区分一次有限要素法では [8, 9] があり，Ω が有界な多角形領域上では [10] がある．この定数 $C_{h,0}$ を利用することで $C_{h,\sigma}$ は評価できる．また，Aubin-Nitsche の技巧から

$$\|u - \mathcal{P}_{h,\sigma}u\|_{L^2} \le C_{h,\sigma}\|u - \mathcal{P}_{h,\sigma}u\|_{H^1_\sigma},\ \forall u \in H^1_0(\Omega) \tag{2.5}$$

も満たす．

2.4　使用する作用素の定義とその性質

σ を $\sigma \ge 0$ を満たす実数とする．線形作用素 $\mathcal{A}_\sigma : H^1_0(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ を

$$\langle \mathcal{A}_\sigma \cdot, \cdot \rangle := (\nabla \cdot, \nabla \cdot)_{L^2} + \sigma(\cdot, \cdot)_{L^2} \tag{2.6}$$

とする．$\mathcal{A}_\sigma$ は等長同型写像であり，実際に次の性質を持つ:

$$\|\mathcal{A}_\sigma u\|_{H^{-1}_\sigma} = \|u\|_{H^1_\sigma},\ \forall u \in H^1_0(\Omega).$$

また，この性質より A^{-1}_σ は逆作用素を持ち，その作用素ノルムは

$$\|\mathcal{A}^{-1}_\sigma\|_{L(H^{-1}_\sigma, H^1_\sigma)} = 1 \tag{2.7}$$

となる．

埋め込み恒等作用素 $\mathcal{I} : L^2(\Omega) \to H^{-1}_\sigma(\Omega)$ を

$$\langle \mathcal{I}_\sigma \cdot, \cdot \rangle := (\cdot, \cdot)_{L^2} \tag{2.8}$$

とする．この埋め込み恒等作用素 $\mathcal{I}$ の作用素ノルムは Cauchy-Schwarz の不等式と $p = 2$ の場合における Sobolev 不等式 (2.2) を利用して

$$\|\mathcal{I}_\sigma\|_{L(L^2, H^{-1}_\sigma)} \le C_{2,\sigma}. \tag{2.9}$$

と評価できる．

2.5　Plum の解の存在定理

X, Y を Banach 空間とする．非線形作用素 $\mathcal{F} : X \to Y$ は Fréchet 微分可能とする．次の非線形方程式を満たす解 $u \in X$ を求める問題を考える:

$$\text{Find } u \in X \text{ satisfying } \mathcal{F}(u) = 0. \tag{2.10}$$

このとき，Plum によって次の解の存在定理が示された:

定理 2.1 (Plum [5]) X, Y を Banach 空間とする．$\hat{u} \in X$ とする．$W \subset X$ を中心ゼロ，半径 ρ の閉球とする:$W := \{w \in X : \|w\|_X \leq \rho\}$. $\mathcal{F} : X \to Y$ を (2.10) を満たす非線形作用素とする．$\mathcal{F}$ の Fréchet 微分 $\mathcal{F}'[\hat{u}]$ は正則で

$$\|\phi\|_X \leq K\|\mathcal{F}'[\hat{u}]\phi\|_Y,\ \forall\phi \in X \tag{2.11}$$

を満たす正の定数 K が存在すると仮定する．δ を

$$\|\mathcal{F}(\hat{u})\|_Y \leq \delta \tag{2.12}$$

を満たす正の定数とする．$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ とする．非線形関数 $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ と $G : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ は，それぞれ

$$\sup_{w\in W}\left\|\mathcal{F}'[\hat{u} + w] - \mathcal{F}'[\hat{u}]\right\|_{L(X,Y)} \leq g(\rho), \tag{2.13}$$

と

$$\sup_{w\in W}\left\|\int_0^1 (\mathcal{F}'[\hat{u} + tw] - \mathcal{F}'[\hat{u}])\, wdt\right\|_Y \leq G(\rho) \tag{2.14}$$

を満たすと仮定する．もし，定数 ρ が

$$K\delta \leq \frac{\rho}{K} - G(\rho) \quad \text{and} \quad Kg(\rho) < 1, \tag{2.15}$$

を満たすなら，そのとき $\mathcal{F}(u) = 0$ を満たす解 $u^* \in \hat{u} + W$ は存在し，$\hat{u} + W$ 内で局所一意である．

定理 2.1 の仮定である (2.11) と (2.12) の定数 K, δ と，(2.13) と (2.14) の非線形関数 $g(\rho), G(\rho)$ を定量的に得ること，及び (2.15) の条件を満たすことをコンピュータで確かめることで精度保証付き数値計算が可能となる．

2.6 劉・大石による Laplace 作用素の無限次元固有値評価法

劉・大石の定理は次に示すような Laplace 作用素の固有値評価に関する定理である:

定理 2.2 (劉・大石 [10]) $\{\lambda_i\}$ を Laplace 作用素の固有値問題

$$\text{Find } \lambda \in \mathbb{R} \text{ and } u \in H_0^1(\Omega) \text{ s.t. } (\nabla u, \nabla v)_{L^2} = \lambda(u, v)_{L^2},\ v \in H_0^1(\Omega) \tag{2.16}$$

を満たす固有値とする．$\{\lambda_i^h\}$ を (2.16) を離散化した問題

$$\text{Find } \lambda^h \in \mathbb{R} \text{ and } u \in X_h \text{ s.t. } (\nabla u_h, \nabla v_h)_{L^2} = \lambda^h(u_h, v_h)_{L^2},\ v \in X_h$$

を満たす固有値とする．$C_{h,0}$ を $\sigma = 0$ とした (2.4) を満たす定数とする．そのとき，固有値 λ_i は

$$\frac{\lambda_i^h}{1 + C_{h,0}^2 \lambda_i^h} \le \lambda_i \le \lambda_i^h$$

を満たす．

3. 定常 FitzHugh-Nagumo 方程式

定常 FitzHugh-Nagumo 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u = f(u) - \delta v & \text{in } \Omega, \\ -\Delta v = u - \gamma v & \text{in } \Omega, \\ u = v = 0 & \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

の解に対する精度保証付き数値計算法を考える．ここで Ω は $\mathbb{R}^2$ の有界な多角形領域とする．$\varepsilon \neq 0$, γ, δ は実数のパラメータとする．非線形作用素 $f : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ は $f(u) = u + u^2 + \cdots$ のような多項式を想定し，このとき f は Fréchet 微分可能である．

(3.1) に対する精度保証付き数値計算法は渡部により開発されている [11]．[11] では次の示すように線形楕円型偏微分方程式の境界値問題と半線形楕円型偏微分の境界値問題に分けて考えている: もし $-\gamma$ が Laplace 作用素の固有値と一致せず，さらに u が既知関数とすると，線形境界問題

$$\begin{cases} -\Delta v = u - \gamma v & \text{in } \Omega, \\ v = 0 & \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.2}$$

は Riesz の表現定理より唯一解を持つ．有界線形作用素 $B : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ を (3.2) の解作用素とすると，v は

$$v = Bu \tag{3.3}$$

として与えられる．(3.3) を (3.1) に代入するすると

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u = f(u) - \delta Bu & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.4}$$

を得る．半線形楕円型境界値問題 (3.4) は Bu という項を持つことが特徴である．[11] では (3.2) と (3.4) の両方ともに中尾理論 (例えばまとまっている文献として [2, 12]) に基づく精度保証法を提案している．

本講演では (2.11) を経由する手法について紹介する．$g(u) := (f(u) - \delta Bu)/\varepsilon^2$ とすると，(3.4) は

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.5}$$

となる．ここで f が Fréchet 微分可能なため，非線形作用素 $g : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ は Fréchet 微分可能であり，$\hat{u} \in H_0^1(\Omega)$ における Fréchet 微分を $g'[\hat{u}]$ と記述する．また，$\|f'[\hat{u}]\|_{L^\infty} < \infty$ を仮定する．さらに，(3.5) の弱形式は次のようになる:

$$\text{Find } u \in H_0^1(\Omega) \text{ satisfying } (\nabla u, \nabla w)_{L^2} = (g(u), w)_{L^2},\ \forall w \in H_0^1(\Omega). \tag{3.6}$$

任意の $u \in H_0^1(\Omega)$ について，非線形作用素 $\mathcal{N}_\sigma : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ を

$$\langle \mathcal{N}_\sigma(u), w \rangle := (g(u) + \sigma u, w)_{L^2},\ \forall w \in H_0^1(\Omega) \tag{3.7}$$

とする．$\mathcal{A}_\sigma$ を (2.6) で定義される線形作用素であることに注意する．さらに，非線形作用素 $\mathcal{F} : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ を

$$\mathcal{F}(u) := \mathcal{A}_\sigma u - \mathcal{N}_\sigma(u) \tag{3.8}$$

と定義する．そのとき，次の問題は (3.6) と同一である:

$$\text{Find } u \in H_0^1(\Omega) \text{ satisfying } \mathcal{F}(u) = 0. \tag{3.9}$$

この (3.9) に定理 2.1 を適用する．ここで，$\hat{u} \in H_0^1(\Omega)$ における $\mathcal{N}_\sigma$ と $\mathcal{F}$ の Fréchet 微分をそれぞれ $\mathcal{N}'_\sigma[\hat{u}]$ と $\mathcal{F}'[\hat{u}]$ と記述する．本講演では，特に (2.11) を満たす定数 K の評価方法と作用素 $\mathcal{F}'[\hat{u}]$ の正則性を保証する定理を紹介する．

4. $\mathcal{F}'[\hat{u}]$ の正則性と定数 K の評価方法

楕円型偏微分方程式における定理 2.1 の (2.11) を満たす定数 K の評価法は数多く存在する (例えば [3, 4, 13–16])．大きく分類すると [3, 16] は無限次元固有値評価に基づく手法であり，[4, 13–15] はノルム評価に基づく手法である．また，作用素の定義域の違いからも分類でき，作用素が $H^{-1}(\Omega)$ から $H_0^1(\Omega)$ であれば [3, 4, 13, 16]，$L^2(\Omega)$ から $H_0^1(\Omega)$ であれば [14, 15] に分類できる．これらの選択は精度保証結果に直接影響があるため重要である．

今回対象としている方程式 (3.9) は (3.3) を満たすような解作用素 B が含まれることが特徴であり，困難な点である．まずは，(3.8) で定義された作用素 $\mathcal{F}$ の $\hat{u} \in H_0^1(\Omega)$ における Fréchet 微分 $\mathcal{F}'[\hat{u}]$ の正則性を検証する定理を示す．この定理は大石によって [4] で Fredholm の交代定理に基づいて証明されている．

定理 4.1 (大石 [4]) $\mathcal{F}$ を (3.8) で定義された非線形作用素し，$\mathcal{F}$ の $\hat{u} \in H_0^1(\Omega)$ における Fréchet 微分を $\mathcal{F}'[\hat{u}]$ とする．もし，

$$\|u\|_{H^1_\sigma} \le K \|\mathcal{F}'[\hat{u}]u\|_{H^{-1}_\sigma},\ \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

を満たす正定数 K が存在するならば，$\mathcal{F}'[\hat{u}]$ は正則である．

定理 4.1 から，定理 2.1 の (2.11) を満たす定数 K の存在がわかれば，作用素 $\mathcal{F}'[\hat{u}]$ の正則性が保証される．本講演では定理 2.1 の (2.11) を満たす定数 K の求め方について [13] に基づく方法と，無限次元固有値評価に基づく方法について述べる．

4.1　中尾・橋本・渡部による定数 K の評価法

中尾・橋本・渡部による K の評価法は次ようになる:

定理 4.2 (中尾・橋本・渡部 [13]) ν_1, ν_2, ν_3 をそれぞれ次を満たす正の定数とする:

$$\|\mathcal{P}_{h,\sigma}\mathcal{A}_\sigma{}^{-1}\mathcal{N}'_\sigma[\hat{u}]u_c\|_{H^1_\sigma} \le \nu_1\|u_c\|_{H^1_\sigma},\ \forall u_c \in H^1_0(\Omega) \setminus X_h, \tag{4.1}$$

$$\|(g'[\hat{u}] + \sigma)u\|_{L^2} \le \nu_2\|u\|_{H^1_\sigma},\ \forall u \in H^1_0(\Omega), \tag{4.2}$$

$$\|(g'[\hat{u}] + \sigma)u_c\|_{L^2} \le \nu_3\|u_c\|_{H^1_\sigma},\ \forall u_c \in H^1_0(\Omega) \setminus X_h. \tag{4.3}$$

さらに，作用素 $\mathcal{P}_{h,\sigma}(I - \mathcal{A}_\sigma{}^{-1}\mathcal{N}'_\sigma[\hat{u}])|_{X_h} : X_h \to X_h$ は正則で，次を満たす正定数 τ が存在すると仮定する:

$$\left\|\left(\mathcal{P}_{h,\sigma}(I - \mathcal{A}_\sigma{}^{-1}\mathcal{N}'_\sigma[\hat{u}])|_{X_h}\right)^{-1}\right\|_{L(H^1_\sigma, H^1_\sigma)} \le \tau. \tag{4.4}$$

$\kappa := C_{h,\sigma}(\nu_1\tau\nu_2 + \nu_3)$ とする．もし，$\kappa < 1$ を満たすなら，次の不等式を満たす定数 K が存在する:

$$\|u\|_{H^1_\sigma} \le K\|\mathcal{F}'[\hat{u}]u\|_{H^{-1}_\sigma},\ \forall u \in H^1_0(\Omega)$$

ただし

$$K = \left\|\begin{pmatrix} \tau\left(1 + \frac{C_{h,\sigma}\nu_1\tau\nu_2}{1-\kappa}\right) & \frac{\tau\nu_3}{1-\kappa} \\ \frac{C_{h,\sigma}\nu_2\tau}{1-\kappa} & \frac{1}{1-\kappa} \end{pmatrix}\right\|_2,$$

ここで，$\|\cdot\|_2$ は有限次元のユーグリッドノルムとする．

定理 4.2 から，定数 ν_1, ν_2, ν_3 及び τ が得られれば，定数 K が評価できる．それぞれの定数の求め方について述べる

(4.1) を満たす定数 ν_1 の求め方

$\forall u_c \in H^1_0(\Omega) \setminus X_h$ について

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{P}_{h,\sigma}\mathcal{A}_\sigma{}^{-1}\mathcal{N}'_\sigma[\hat{u}]u_c\|^2_{H^1_\sigma} \\
&= (\mathcal{P}_{h,\sigma}\mathcal{A}_\sigma{}^{-1}\mathcal{N}'_\sigma[\hat{u}]u_c, \mathcal{P}_{h,\sigma}\mathcal{A}_\sigma{}^{-1}\mathcal{N}'_\sigma[\hat{u}]u_c)_{H^1_\sigma} \\
&= (\mathcal{A}_\sigma{}^{-1}\mathcal{N}'_\sigma[\hat{u}]u_c, \mathcal{P}_{h,\sigma}\mathcal{A}_\sigma{}^{-1}\mathcal{N}'_\sigma[\hat{u}]u_c)_{H^1_\sigma} \\
&= (\nabla\mathcal{A}_\sigma{}^{-1}\mathcal{N}'_\sigma[\hat{u}]u_c, \nabla\mathcal{P}_{h,\sigma}\mathcal{A}_\sigma{}^{-1}\mathcal{N}'_\sigma[\hat{u}]u_c)_{L^2} + \sigma(\mathcal{A}_\sigma{}^{-1}\mathcal{N}'_\sigma[\hat{u}]u_c, \mathcal{P}_{h,\sigma}\mathcal{A}_\sigma{}^{-1}\mathcal{N}'_\sigma[\hat{u}]u_c)_{L^2} \\
&= ((g'[\hat{u}] + \sigma)u_c, \mathcal{P}_{h,\sigma}\mathcal{A}_\sigma{}^{-1}\mathcal{N}'_\sigma[\hat{u}]u_c)_{L^2} \\
&\le \|(g'[\hat{u}] + \sigma)u_c\|_{L^2}\|\mathcal{P}_{h,\sigma}\mathcal{A}_\sigma{}^{-1}\mathcal{N}'_\sigma[\hat{u}]u_c\|_{L^2} \\
&\le C_{2,\sigma}\nu_3\|u_c\|_{H^1_\sigma}\|\mathcal{P}_{h,\sigma}\mathcal{A}_\sigma{}^{-1}\mathcal{N}'_\sigma[\hat{u}]u_c\|_{H^1_\sigma}
\end{aligned}$$

となる．よって

$$\|\mathcal{P}_{h,\sigma}\mathcal{A}_{\sigma}{}^{-1}\mathcal{N}'_{\sigma}[\hat{u}]u_c\|_{H^1_\sigma} \le C_{2,\sigma}\nu_3\|u_c\|_{H^1_\sigma}$$

から，

$$\nu_1 := C_{2,\sigma}\nu_3$$

となり，Poincaré 定数 $C_{2,\sigma}$($p = 2$ の場合における不等式 (2.2) を満たす定数) と定数 ν_3 によって求められる．

(4.2) を満たす定数 ν_2 の求め方

$\forall u \in H^1_0(\Omega)$ について，不等式 (2.2) より

$$\begin{aligned}
\|(g'[\hat{u}]+\sigma)u\|_{L^2} &= \frac{1}{\varepsilon^2}\|(f'[\hat{u}]-\delta B+\varepsilon^2\sigma)u\|_{L^2} \\
&\le \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\|(f'[\hat{u}]+\varepsilon^2\sigma)u\|_{L^2}+|\delta|\|Bu\|_{L^2}\right) \\
&\le \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\|f'[\hat{u}]+\varepsilon^2\sigma\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2}+C_{2,0}|\delta|\|Bu\|_{H^1_0}\right) \\
&\le \frac{1}{\varepsilon^2}\left(C_{2,\sigma}\|f'[\hat{u}]+\varepsilon^2\sigma\|_{L^\infty}\|u\|_{H^1_\sigma}+C_{2,0}|\delta|\|B\|_{L(L^2,H^1_0)}\|u\|_{L^2}\right) \\
&\le \frac{C_{2,\sigma}}{\varepsilon^2}\left(\|f'[\hat{u}]+\varepsilon^2\sigma\|_{L^\infty}+C_{2,0}|\delta|\|B\|_{L(L^2,H^1_0)}\right)\|u\|_{H^1_\sigma}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

となる．[*1] よって

$$\nu_2 := \frac{C_{2,\sigma}}{\varepsilon^2}\left(\|f'[\hat{u}]+\varepsilon^2\sigma\|_{L^\infty}+C_{2,0}|\delta|\|B\|_{L(L^2,H^1_0)}\right)$$

とすればよい．

(4.3) を満たす定数 ν_3 の求め方

[*1] $\gamma \ge 0$ の場合，定義 (2.6) と (2.8) を利用することで $B := \mathcal{A}_\gamma^{-1}\mathcal{I}_\gamma$ と定義できる．この場合，(4.5) の B の項の評価は Cauchy-Schwarz の不等式と，σ と γ における $p = 2$ の不等式 (2.2) を利用することで，$\forall u \in H^1_0(\Omega)$ について，

$$\begin{aligned}
\|Bu\|^2_{L^2} &= \|\mathcal{A}_\gamma^{-1}\mathcal{I}_\gamma u\|^2_{L^2} \le C^2_{2,\gamma}\|\mathcal{A}_\gamma^{-1}\mathcal{I}_\gamma u\|^2_{H^1_\gamma} \\
&= C^2_{2,\gamma}(\mathcal{A}_\gamma^{-1}\mathcal{I}_\gamma u, \mathcal{A}_\gamma^{-1}\mathcal{I}_\gamma u)_{H^1_\gamma} = C^2_{2,\gamma}(u, \mathcal{A}_\gamma^{-1}\mathcal{I}_\gamma u)_{L^2} \\
&\le C^2_{2,\gamma}\|u\|_{L^2}\|\mathcal{A}_\gamma^{-1}\mathcal{I}_\gamma u\|_{L^2} \le C^2_{2,\gamma}C_{2,\sigma}\|u\|_{H^1_\sigma}\|Bu\|_{L^2}
\end{aligned}$$

を得る．よって $\|Bu\|_{L^2} \le C^2_{2,\gamma}C_{2,\sigma}\|u\|_{H^1_\sigma}$ から，

$$\nu_2 := \frac{C_{2,\sigma}}{\varepsilon^2}(\|f'[\hat{u}]+\varepsilon^2\sigma\|_{L^\infty}+|\delta|C^2_{2,\gamma}) \tag{4.6}$$

と評価できる．

$\forall u_c \in H_0^1(\Omega) \setminus X_h$ について，不等式 (2.5) より

$$
\begin{aligned}
\|(g'[\hat{u}] + \sigma)u_c\| &= \frac{1}{\varepsilon^2}\|(f'[\hat{u}] - \delta B + \varepsilon^2\sigma)u_c\|_{L^2} \\
&\le \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\|f'[\hat{u}] + \varepsilon^2\sigma\|_{L^\infty}\|(I - \mathcal{P}_{h,\sigma})u\|_{L^2} + C_{2,0}|\delta|\|Bu_c\|_{H_0^1}\right) \\
&\le \frac{C_{h,\sigma}}{\varepsilon^2}\left(\|f'[\hat{u}] + \varepsilon^2\sigma\|_{L^\infty} + C_{2,0}|\delta|\|B\|_{L(L^2,H_0^1)}\right)\|u_c\|_{H_\sigma^1}
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

となる．[*2] よって

$$
\nu_3 := \frac{C_{h,\sigma}}{\varepsilon^2}\left(\|f'[\hat{u}] + \varepsilon^2\sigma\|_{L^\infty} + C_{2,0}|\delta|\|B\|_{L(L^2,H_0^1)}\right)
$$

とすればよい．

ノルム $\|B\|_{L(L^2,H_0^1)}$ の求め方

ν_2, ν_3 の計算は $\gamma \ge 0$ の場合は (4.6) と (4.8) になる．しかし，γ が一般的な場合ノルム $\|Bu\|_{L(L^2,H_0^1)}$ の計算が必要になる．ここではノルム $\|B\|_{L(L^2,H_0^1)}$ の計算方法を示す．解作用素 $B : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ を

$$
B = (\mathcal{A}_0 + \gamma)^{-1}\mathcal{I}_0
$$

と書ける．そのとき，不等式 (2.9) から

$$
\|B\|_{L(L^2,H_0^1)} \le \|(\mathcal{A}_0 + \gamma)^{-1}\|_{H_0^{-1},H_0^1}\|\mathcal{I}_0\|_{L^2,H_0^{-1}} \le C_{2,0}\|(\mathcal{A}_0 + \gamma)^{-1}\|_{L(H_0^{-1},H_0^1)}
$$

となり，$\|(\mathcal{A}_0 + \gamma)^{-1}\|_{L(H_0^{-1},H_0^1)}$ を評価すればよい．これは Laplace 作用素の固有値 λ の精度保証付き数値計算法である定理 2.2 を利用すれば計算ができる．実際に

$$
\begin{aligned}
\|(\mathcal{A}_0 + \gamma)^{-1}\|_{L(H_0^{-1},H_0^1)} &= \sup_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\|u\|_{H_0^1}}{\|(\mathcal{A}_0 + \gamma)u\|_{H_0^{-1}}} = \sup_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\|u\|_{H_0^1}}{\|\mathcal{A}_0{}^{-1}(\mathcal{A}_0 + \gamma)u\|_{H_0^1}} \\
&\le \max_{\mu \in \mathrm{Spec}(\mathcal{A}_0{}^{-1}(\mathcal{A}_0+\gamma))}\left|\frac{1}{\mu}\right| = \max_{\lambda \in \mathrm{Spec}(\Delta)}\left|\frac{\lambda}{\lambda + \gamma}\right|
\end{aligned}
$$

[*2] ν_3 も ν_2 と同様に，$\gamma \ge 0$ の場合，定義 (2.6) と (2.8) を利用することで $B := \mathcal{A}_\gamma^{-1}\mathcal{I}_\gamma$ と定義できる．この場合，(4.7) の B の項の評価は Cauchy-Schwarz の不等式と，σ と γ における $p = 2$ の不等式 (2.2) 及び不等式 (2.5) を利用することで，$\forall u_c \in H_0^1(\Omega) \setminus X_h$ について，

$$
\begin{aligned}
\|Bu_c\|_{L^2}^2 &= \|\mathcal{A}_\gamma^{-1}\mathcal{I}_\gamma u_c\|_{L^2}^2 \le C_{2,\gamma}^2\|\mathcal{A}_\gamma^{-1}\mathcal{I}_\gamma u_c\|_{H_\gamma^1}^2 \\
&= C_{2,\gamma}^2(\mathcal{A}_\gamma^{-1}\mathcal{I}_\gamma u_c, \mathcal{A}_\gamma^{-1}\mathcal{I}_\gamma u_c)_{H_\gamma^1} = C_{2,\gamma}^2(u_c, \mathcal{A}_\gamma^{-1}\mathcal{I}_\gamma u_c)_{L^2} \\
&\le C_{2,\gamma}^2\|u_c\|_{L^2}\|\mathcal{A}_\gamma^{-1}\mathcal{I}_\gamma u_c\|_{L^2} \le C_{2,\gamma}^2 C_{h,\sigma}\|u_c\|_{H_\sigma^1}\|Bu_c\|_{L^2}
\end{aligned}
$$

を得る．よって $\|Bu_c\|_{L^2} \le C_{2,\gamma}^2 C_{h,\sigma}\|u_c\|_{H_\sigma^1}$ から，

$$
\nu_3 := \frac{C_{h,\sigma}}{\varepsilon^2}\left(\|f'[\hat{u}] + \varepsilon^2\sigma\|_{L^\infty} + |\delta|C_{2,\gamma}^2\right) \tag{4.8}
$$

と評価できる．

となる．よって $\gamma < 0$ の場合，$\lambda > 0$ より $|\gamma|$ に最も近い Laplace 作用素の固有値 λ を探し出せばよい．定理 2.2 を使えば固有値 λ の上限と下限が得られる．λ は区間で得られるため，$\lambda + \gamma$ の計算結果は区間となる．$\lambda + \gamma$ の計算結果の区間が 0 を含む場合，作用素 $\mathcal{A}_0 + \gamma$ の正則性が保証できないため，精度保証失敗と判断する．

(4.4) を満たす定数 τ の求め方

ϕ_i を次を満たす区分的基底関数とする：

$$X_h = \mathrm{span}\{\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n\} \subset H_0^1(\Omega),$$

ここで，$n := \dim(X_h)$ とする．$\mathbf{u}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ を実ベクトルとし，$u_h, w_h \in X_h$ を次を満たすとする:

$$\mathbf{u} := (u_1, u_2, \cdots, u_n)^T,\ u_h = (\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n) \cdot \mathbf{u},$$
$$\mathbf{w} := (w_1, w_2, \cdots, w_n)^T,\ w_h = (\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n) \cdot \mathbf{w}.$$

G, D を次を満たす $n \times n$ の実行列とする:

$$G_{ij} := (\nabla\phi_j, \nabla\phi_i)_{L^2} - (g'[\hat{u}]\phi_j, \phi_i)_{L^2},$$
$$D_{ij} := (\nabla\phi_j, \nabla\phi_i)_{L^2} + \sigma(\phi_j, \phi_i)_{L^2},$$

ここで，$1 \le i \le n$ と $1 \le j \le n$ とする．もし，D が正定値行列ならば，D は Cholesky 分解可能で $D = HH^T$ とする．そのとき，$u_h \in X_h$ について

$$\|u_h\|_{H^1_\sigma}^2 = \mathbf{u}^T D\mathbf{u} = \mathbf{u}^T HH^T\mathbf{u} = (H^T\mathbf{u})^T(H^T\mathbf{u}) = \|H^T\mathbf{u}\|_2^2$$
$$\Leftrightarrow \|u_h\|_{H^1_\sigma} = \|H^T\mathbf{u}\|_2. \tag{4.9}$$

もし，G が正則ならば，$\mathcal{A}_\sigma$ の正則性より $\mathcal{P}_{h,\sigma}(I - \mathcal{A}_\sigma{}^{-1}\mathcal{N}'_\sigma[\hat{u}])|_{X_h}$ は正則である．$w_h \in X_h$ を次を満たすとする:

$$(u_h, \phi_i)_{H^1_\sigma} = ((\mathcal{P}_{h,\sigma}(I - \mathcal{A}_\sigma{}^{-1}\mathcal{N}'_\sigma[\hat{u}])|_{X_h})^{-1} w_h, \phi_i)_{H^1_\sigma},\ 1 \le i \le n. \tag{4.10}$$

(4.10) を変形すると

$$((I - \mathcal{A}_\sigma{}^{-1}\mathcal{N}'_\sigma[\hat{u}]))u_h, \phi_i)_{H^1_\sigma} = (w_h, \phi_i)_{H^1_\sigma},\ 1 \le i \le n \tag{4.11}$$

となる．(4.11) の左辺について，

$$\begin{aligned}
&((I - \mathcal{A}_\sigma{}^{-1}\mathcal{N}'_\sigma[\hat{u}])u_h, \phi_i)_{H^1_\sigma} \\
&= (u_h, \phi_i)_{H^1_\sigma} - (\mathcal{A}_\sigma{}^{-1}\mathcal{N}'_\sigma[\hat{u}]u_h, \phi_i)_{H^1_\sigma} \\
&= (\nabla u_h, \nabla\phi_i)_{L^2} + \sigma(u_h, \phi_i)_{L^2} - \left(\left(\nabla\mathcal{A}_\sigma{}^{-1}\mathcal{N}'_\sigma[\hat{u}]u_h, \nabla\phi_i\right)_{L^2} + \sigma\left(\mathcal{A}_\sigma{}^{-1}\mathcal{N}'_\sigma[\hat{u}]u_h, \phi_i\right)_{L^2}\right) \\
&= (\nabla u_h, \nabla\phi_i)_{L^2} + \sigma(u_h, \phi_i)_{L^2} - ((g'[\hat{u}] + \sigma)u_h, \phi_i)_{L^2} \\
&= (\nabla u_h, \nabla\phi_i)_{L^2} - (g'[\hat{u}]u_h, \phi_i)_{L^2} \\
&= \sum_{j=1}^{n} G_{ij}u_j.
\end{aligned}$$

(4.11) の右辺について，

$$
\begin{aligned}
(w_h, \phi_i)_{H^1_\sigma} &= \sum_{j=1}^{n} (\phi_j, \phi_i)_{H^1_\sigma} w_j \\
&= \sum_{j=1}^{n} D_{ij} w_j.
\end{aligned}
$$

よって

$$
\mathbf{u} = G^{-1} D \mathbf{w} \tag{4.12}
$$

となる．さらに，(4.9) と (4.12) から，

$$
\begin{aligned}
\|(\mathcal{P}_{h,\sigma}(I - \mathcal{A}_\sigma{}^{-1}\mathcal{N}'_\sigma[\hat{u}])|_{X_h})^{-1}\|_{L(H^1_\sigma, H^1_\sigma)} &= \sup_{w_h \in X_h \setminus \{0\}} \frac{\|(\mathcal{P}_{h,\sigma}(I - \mathcal{A}_\sigma{}^{-1}\mathcal{N}'_\sigma[\hat{u}])|_{X_h})^{-1} w_h\|_{H^1_\sigma}}{\|w_h\|_{H^1_\sigma}} \\
&= \sup_{w_h \in X_h \setminus \{0\}} \frac{\|u_h\|_{H^1_\sigma}}{\|w_h\|_{H^1_\sigma}} \\
&= \sup_{w_h \in X_h \setminus \{0\}} \frac{\|H^T \mathbf{u}\|_2}{\|H^T \mathbf{w}\|_2} \\
&= \sup_{w_h \in X_h \setminus \{0\}} \frac{\|H^T G^{-1} D \mathbf{w}\|_2}{\|H^T \mathbf{w}\|_2} \\
&= \sup_{w_h \in X_h \setminus \{0\}} \frac{\|H^T G^{-1} H H^T \mathbf{w}\|_2}{\|H^T \mathbf{w}\|_2} \\
&\le \|H^T G^{-1} H\|_2 = \tau.
\end{aligned}
$$

即ち，行列 G の正則性の検証，Cholesky 分解，2 ノルムの精度保証付き数値計算が行えれば浮動小数点数を利用して計算可能である．

4.2　無限次元固有値評価を利用した K の評価法

　ここでは定理 2.2 に基づく系を利用することで，定数 K を求める手法を示す．まず，(2.11) を固有値問題に書き直す: $\forall u \in H^1_0(\Omega)$ について

$$
\begin{aligned}
\frac{\|u\|_{H^1_\sigma}}{\|\mathcal{F}'[\hat{u}]u\|_{H^{-1}_\sigma}} = \frac{\|u\|_{H^1_\sigma}}{\|(\mathcal{A}_\sigma - \mathcal{N}'_\sigma[\hat{u}])u\|_{H^{-1}_\sigma}} &= \frac{\|u\|_{H^1_\sigma}}{\|\mathcal{A}_\sigma^{-1}(\mathcal{A}_\sigma - \mathcal{N}'_\sigma[\hat{u}])u\|_{H^1_\sigma}} \\
&\le \sup_{\mu \in \mathrm{Spec}(\mathcal{A}_\sigma^{-1}(\mathcal{A}_\sigma - \mathcal{N}'_\sigma[\hat{u}]))} \frac{1}{|\mu|} =: K
\end{aligned} \tag{4.13}
$$

となり，

$$
\text{Find } \mu \in C \text{ and } u \in H^1_0(\Omega) \text{ s.t. } (\mathcal{A}_\sigma - \mathcal{N}'_\sigma[\hat{u}])u = \mu \mathcal{A}_\sigma u, \tag{4.14}
$$

を考えればよい．さらに (4.14) を書き換えることで，

$$\text{Find } \eta \in C \text{ and } u \in H_0^1(\Omega) \text{ s.t. } \mathcal{A}_\sigma u = \eta \mathcal{N}'_\sigma[\hat{u}]u, \tag{4.15}$$

を得る．ここで，μ と η の関係は

$$\frac{1}{\mu} = \frac{\eta}{\eta - 1} \tag{4.16}$$

となる．(4.15) に定理 2.2 を利用するには μ が固有値になること，d 内積の定義と σ の条件について述べる．

作用素 $\mathcal{A}_\sigma{}^{-1}\mathcal{N}_\sigma{}'[\hat{u}]$ のコンパクト性

ここでは μ が固有値になることを示す．これは作用素 $\mathcal{A}_\sigma{}^{-1}\mathcal{N}_\sigma{}'[\hat{u}]$ がコンパクト作用素になることを示せばよい．まず，作用素 $\mathcal{N}_\sigma{}'[\hat{u}]$ は定義 (3.7) と (2.8) を利用すると

$$\mathcal{N}_\sigma{}'[\hat{u}] = \mathcal{I}_\sigma(g'[\hat{u}] + \sigma)$$

と書ける．ここで，$\mathcal{I}_\sigma$ はコンパクト作用素である．よって，$g'[\hat{u}] + \sigma$ が有界作用素であれば，作用素 $\mathcal{N}_\sigma{}'[\hat{u}]$ はコンパクト作用素となる．実際に $\forall u \in H_0^1(\Omega)$ について

$$\varepsilon^2\|(g'[\hat{u}] + \sigma)u\|_{L^2} \le \|f'[\hat{u}]u - \delta Bu\|_{L^2} + \varepsilon^2\sigma\|u\|_{L^2} \le \|f'[\hat{u}]\|_{L^\infty}\|u\|_{L^2} + \delta\|Bu\|_{L^2} + \varepsilon^2\sigma\|u\|_{L^2}$$

よって，仮定 $\|f'[\hat{u}]\|_{L^\infty} < \infty$ と作用素 B の有界性より，$g'[\hat{u}] + \sigma : H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ が有界作用素である．さらに，(2.7) より作用素 $\mathcal{A}_\sigma{}^{-1} : H^{-1}(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ は有界作用素であるため，作用素 $\mathcal{A}_\sigma{}^{-1}\mathcal{N}_\sigma{}'[\hat{u}] : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ はコンパクト作用素となる．よって，スペクトル η は固有値となり，よってスペクトル μ も固有値となる．

σ の条件と d 内積の定義

ここでは，σ の条件と d 内積の定義をする．まず，固有値問題 (4.15) を $L^2(\Omega)$ の空間で書き直すと

$$\text{Find } \eta \in \mathbb{R} \text{ and } u \in H_0^1(\Omega) \text{ s.t. } (\nabla u, \nabla w)_{L^2} + \sigma(u, w)_{L^2} = \eta\left((g'[\hat{u}] + \sigma)u, w\right)_{L^2}$$

となる．このとき，左辺と右辺それぞれが内積の公理を満たしていることが重要であり，σ は内積の公理を満たすように設定する．左辺については $\sigma \ge 0$ で $(u, w)_{H_\sigma^1} = (\nabla u, \nabla w)_{L^2} + \sigma(u, w)_{L^2}$ となるため，明らかである．右辺については $g'[\hat{u}]$ が自己共役作用素であるため

$$(g'[\hat{u}]u, u)_{L^2} + \sigma(u, u)_{L^2} \ge 0, \ \forall u \in H_0^1(\Omega) \tag{4.17}$$

を満たせば $(g'[\hat{u}]u,u)_{L^2}+\sigma(u,u)_{L^2}$ は内積となる．実際に，$\forall u\in H_0^1(\Omega)$ について

$$
\begin{aligned}
(g'[\hat{u}]u,u)_{L^2}+\sigma(u,u)_{L^2} &= \left(\left(\frac{1}{\varepsilon^2}f'[\hat{u}]+\sigma\right)u,u\right)_{L^2}-\frac{\delta}{\varepsilon^2}(Bu,u)_{L^2}\\
&\geq \left(\left(\frac{1}{\varepsilon^2}f'[\hat{u}]+\sigma\right)u,u\right)_{L^2}-\frac{|\delta|}{\varepsilon^2}\frac{(Bu,u)_{L^2}}{(u,u)_{L^2}}(u,u)_{L^2}\\
&\geq \left(\left(\frac{1}{\varepsilon^2}f'[\hat{u}]+\sigma\right)u,u\right)_{L^2}-\frac{|\delta|}{\varepsilon^2}\frac{\|Bu\|_{L^2}}{\|u\|_{L^2}}(u,u)_{L^2}\\
&\geq \left(\left(\frac{1}{\varepsilon^2}f'[\hat{u}]+\sigma\right)u,u\right)_{L^2}-\frac{C_{2,0}|\delta|}{\varepsilon^2}\|B\|_{L(L^2,H_0^1)}(u,u)_{L^2}
\end{aligned}
$$

となる．よって

(4.18)
$$\varepsilon^2\sigma \geq -(\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} f'[\hat{u}]-C_{2,0}|\delta|\|B\|_{L(L^2,H_0^1)})$$

を満たせば，$(g'[\hat{u}]u,u)_{L^2}+\sigma(u,u)_{L^2}$ が内積となる条件 (4.17) が満たされ，

$$(\cdot,\cdot)_d := (g'[\hat{u}]\cdot,\cdot)_{L^2}+\sigma(\cdot,\cdot)_{L^2}$$

として d 内積を定義する．

拡張版:劉-大石の定理

定理 4.3 内積 $(\cdot,\cdot)_{H^1_\sigma}$ と $(\cdot,\cdot)_d$ をそれぞれ (2.1) と (4.17) とし，内積から誘導されるノルムをそれぞれ $\|\cdot\|_{H^1_\sigma}$ と $\|\cdot\|_d$ と表記する．但し，σ は不等式 (4.18) を満たしているとする．X_h を有限要素基底関数に基づく $H_0^1(\Omega)$ の有限次元部分空間とし，X_h の次元を n とする．問題:

(4.19)
$$\text{Find } \eta\in\mathbb{R} \text{ and } u\in H_0^1(\Omega) \text{ s.t. } (u,w)_{H^1_\sigma}=\eta\,(u,w)_d\,,\ \forall w\in H_0^1(\Omega)$$

のスペクトル η は固有値となり，$\{\eta_i\}_{i=1}^\infty$ とする．また，(4.19) の離散化された固有値問題

$$\text{Find } \eta^h\in\mathbb{R} \text{ and } u_h\in X_h \text{ s.t. } (u_h,w_h)_{H^1_\sigma}=\eta^h\,(u_h,w_h)_d\,,\ \forall w_h\in X_h$$

の固有値を $\{\eta_i^h\}_{i=1}^n$ とする．直交射影 $\mathcal{P}_{h,\sigma}: H_0^1(\Omega)\to X_h$ は (2.3) を満たすとする．定数 $C_{h,d}$ は不等式

$$\|v-\mathcal{P}_{h,\sigma}v\|_d \leq C_{h,d}\|v-\mathcal{P}_{h,\sigma}v\|_{H^1_\sigma},\ \forall v\in H_0^1(\Omega)$$

を満たすとする．そのとき，$i\leq n$ となる整数 i 番目の固有値 η_i は

$$\frac{\eta_i^h}{1+C_{h,d}^2\eta_i^h}\leq \eta_i\leq \eta_i^h$$

を満たす．

この定理から有限次元の固有値 η^h と定数 $C_{h,d}$ を求めれば，η_i の上限と下限が得られる．そのうえで，(4.16) の関係を利用し，(4.13) を満たす定数 K を求めれば良い．

定数 $C_{h,d}$ のの求め方

$\forall v \in H_0^1(\Omega)$ について

$$\begin{aligned}
\|v\|_d^2 &= (v,v)_d = (g'[\hat{u}]v, v)_{L^2} + \sigma(v,v)_{L^2} \\
&\leq \left| \left(\left(\frac{f'[\hat{u}]}{\varepsilon^2} + \sigma \right) v, v \right)_{L^2} \right| + \frac{|\delta|}{\varepsilon^2} \frac{|(Bv,v)_{L^2}|}{(v,v)_{L^2}} \|v\|_{L^2}^2 \\
&\leq \left\| \frac{f'[\hat{u}]}{\varepsilon^2} + \sigma \right\|_\infty \|v\|_{L^2}^2 + \frac{|\delta| C_{2,0}}{\varepsilon^2} \|B\|_{L(L^2,H_0^1)} \|v\|_{L^2}^2 \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\left\| f'[\hat{u}] + \varepsilon^2 \sigma \right\|_{L^\infty} + C_{2,0}|\delta| \|B\|_{L(L^2,H_0^1)} \right) \|v\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

から，

$$\|v - \mathcal{P}_{h,\sigma} v\|_d \leq \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} \left\| f'[\hat{u}] + \varepsilon^2 \sigma \right\|_{L^\infty} + C_{2,0}|\delta| \|B\|_{L(L^2,H_0^1)}} \|v - \mathcal{P}_{h,\sigma} v\|_{L^2}$$

となる．さらに，(2.5) から，

$$\|v - \mathcal{P}_{h,\sigma} v\|_d \leq C_{h,\sigma} \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} \left\| f'[\hat{u}] + \varepsilon^2 \sigma \right\|_{L^\infty} + C_{2,0}|\delta| \|B\|_{L(L^2,H_0^1)}} \|v - \mathcal{P}_{h,\sigma} v\|_{H_\sigma^1}$$

となる．よって，定数 $C_{h,d}$ は

$$C_{h,d} := C_{h,\sigma} \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} \left\| f'[\hat{u}] + \varepsilon^2 \sigma \right\|_{L^\infty} + C_{2,0}|\delta| \|B\|_{L(L^2,H_0^1)}}$$

とすればよい．

5.　一般的な楕円型連立半線形偏微分方程式

ここでは一般的な楕円型連立半線形偏微分方程式

$$\begin{cases} -\Delta u = f_1(u,v) & \text{in } \Omega, \\ -\Delta v = f_2(u,v) & \text{in } \Omega, \\ u = v = 0 & \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.1}$$

の解に対する精度保証付き数値計算法の概要を述べる．非線形作用素 $f_1, f_2 : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to L^2(\Omega)$ は多項式を想定し，f_1, f_2 は Fréchet 微分可能である．このとき，定理 2.1 を利用するためにどの様にして (2.10) に書き換えるかが重要である [*3]．

[*3] 本講演では省略するが (5.1) の場合，(2.13) と (2.14) の評価が非常に面倒である．そのため，(2.13) と (2.14) を” ある意味潰した”Newton-Kantorovich の定理のほうが利用しやすい場合がある．

直積空間 $V := H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ とし，V に導入する内積を

$$\left(\left(\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array}\right),\left(\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \end{array}\right)\right)_V = (u_1,v_1)_{H^1_{\sigma_1}} + (u_2,v_2)_{H^1_{\sigma_2}},\ u_1,u_2,v_1,v_2 \in H_0^1(\Omega)$$

とし，内積から誘導されるノルムを $\|\cdot\|_V$ と表記する．直積空間 $X := L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$ とし，X に導入する内積を

$$\left(\left(\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array}\right),\left(\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \end{array}\right)\right)_X = (u_1,v_1)_{L^2} + (u_2,v_2)_{L^2},\ u_1,u_2,v_1,v_2 \in L^2(\Omega)$$

とし，内積から誘導されるノルムを $\|\cdot\|_X$ と表記する．直積空間 $V^* := (H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega))^*$ とする．

任意の $u,v\in H_0^1(\Omega)$ について，非線形作用素 $\mathcal{N}_{1,\sigma_1},\mathcal{N}_{2,\sigma_2} : H_0^1(\Omega)\to H^{-1}(\Omega)$ をそれぞれ

$$\langle \mathcal{N}_{1,\sigma_1}(u,v),w\rangle := (f_1(u,v)+\sigma_1 u, w)_{L^2},\ \forall w\in H_0^1(\Omega)$$
$$\langle \mathcal{N}_{2,\sigma_2}(u,v),w\rangle := (f_2(u,v)+\sigma_2 v, w)_{L^2},\ \forall w\in H_0^1(\Omega)$$

と定義する．線形作用素 $A_{\sigma_1,\sigma_2} : V\to V^*$ と非線形作用素 $N_{\sigma_1,\sigma_2} : V\to V^*$ をそれぞれ

$$A_{\sigma_1,\sigma_2} := \left(\begin{array}{cc} \mathcal{A}_{\sigma_1} & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_{\sigma_2} \end{array}\right),\ N_{\sigma_1,\sigma_2}(u,v) := \left(\begin{array}{c} \mathcal{N}_{1,\sigma_1}(u,v) \\ \mathcal{N}_{2,\sigma_2}(u,v) \end{array}\right)$$

と定義する．そのとき，$\forall z\in V$ について非線形作用素 $F : V\to V^*$ を $F(z) := A_{\sigma_1,\sigma_2}z - N_{\sigma_1,\sigma_2}(z)$ と定義すると，(5.1) は

$$\text{Find } z\in V \text{ satisfying } F(z)=0$$

と書き直せる．そこで，定理 2.1 の空間を V と V^* として考えればよい．また，Section 2 準備で紹介した様々な定理は空間 V,X,V^* 上に拡張が可能である．(2.11) を満たす定数 K について注意が必要である．特に非線形作用素 F の Fréchet 微分 F' は多くの場合非自己共役作用素となるため，Section 4.2 のような無限次元固有値に基づく評価は現状難しい．

謝辞　本講演を行う機会を頂いた早稲田大学大石進一教授に感謝致します．また日頃，多くの助言を下さる早稲田大学柏木雅英教授，東京女子大学荻田武史准教授，早稲田大学高安亮紀助教にもこの場を借りて感謝を申し上げます．日常の議論を通じて多くのご指摘を下さいました大石研究室博士学生の南畑淳史さん，水口信さん，田中一成さんに感謝します．

参考文献

[1] M.T. Nakao: A numerical approach to the proof of existence of solutions for elliptic problems, Japan J. Indust. Appl. Math. 5, pp.313–332 (1988).

[2] 中尾充宏, 渡部善隆: 実例で学ぶ精度保証付き数値計算:理論と実装, サイエンス社 (2011).

[3] M. Plum: Computer-assisted existence proofs for two-point boundary value problems, Computing. 46, pp.19–34 (1991).

[4] S. Oishi: Numerical verification of existence and inclusion of solutions for nonlinear operator equations, J. Comput. Appl. Math. 60, pp.171–185 (1995).

[5] M. Plum: Computer-assisted proofs for semilinear elliptic boundary value problems, Japan J. Indust. Appl. Math. 26, 2-3, pp.419-442 (2009).

[6] 大石進一: 非線形解析入門, コロナ社 (1997).

[7] 大石進一: 精度保証付き数値計算, コロナ社 (2000).

[8] F. Kikuchi and X. Liu: Estimation of interpolation error constants for the p0 and p1 triangular finite elements, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 196, pp.3750-3758 (2007).

[9] K. Kobayashi: On the interpolation constants over triangular elements, RIMS Kokyuroku, 1733, pp.58-77 (2011).

[10] X. Liu and S. Oishi: Verified eigenvalue evaluation for the Laplacian over polygonal domain of arbitrary shape, SIAM J. Numer. Anal, 51, pp.1634-1654 (2013).

[11] Y. Watanabe: A numerical verification method for two-coupled elliptic partial differential equations, Japan J. Indust. Appl. Math., 26, pp.419–442 (2009).

[12] M.T. Nakao and Y. Watanabe: Numerical verification methods for solutions of semilinear elliptic boundary value problems, Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE, 2. 1, pp.2–31 (2011).

[13] M.T. Nakao, K. Hashimoto, and Y. Watanabe: A numerical method to verify the invertibility of linear elliptic operators with applications to nonlinear problems, Computing., 75, pp. 1–14 (2005).

[14] Y. Watanabe, T. Kinoshita, and M.T. Nakao: A Posteriori Estimates of Inverse Operators for Boundary Value Problems in Linear Elliptic Partial Differential Equations, Mathematics of Computation, 82, 283, pp. 1543–1557 (2013).

[15] T. Kinoshita, Y. Watanabe, and M.T. Nakao: An Improvement of the Theorem of A Posteriori Estimates for Inverse Elliptic Operators, Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE, 5, 1, pp. 47–52 (2014).

[16] K. Tanaka, A. Takayasu, X. Liu, and S. Oishi: Verified norm estimation for the inverse of linear elliptic operators using eigenvalue evaluation, Japan J. Indust. Appl. Math, 31, 3, pp.665–679 (2014).