

## 量子ポテンシャル理論と確率力学

東京工業大学原子炉工学研究所

大崎 敏郎

tohsaki@nr.titech.ac.jp

### 1. 量子力学は完全か

“量子力学は完全な理論なのだろうか？”このような問いをすると、何をいまさらと言われかねないが、かの R.P. Feynman ですら、“I think I can safely say that nobody understands quantum mechanics.....”と述べている[1]。量子力学の解釈上の問題を端的に表すものとして、2重スリットによる量子の干渉問題がある。この問題においては、量子がどちらのスリットを通過したか問うことは無意味とされている。一方のスリットの直後で量子を検出しようとするすると干渉縞が消えてしまう。このような理論を完全な理論、あるいは理解可能な理論と言えるだろうか。「計算の仕方は分かっているが、どうしてこうなるかはよく分からない」というのが正直なところではないだろうか。もちろん、「計算の仕方さえ分かれば実用上問題ないのだから、量子力学は完全である」と言ってしまうまでもある。しかし、ここに、この問題の答えとなるような面白い理論がある。本解説では、これらを紹介したいと思う。いずれも 1950~60 年代に提出された理論であるが、現在でもこれらの理論について否定はされていない。

その理論の1つとして Aharonov-Bohm 効果で有名な David Bohm による量子ポテンシャル理論[2]を取り上げたい。彼が書いた標準的な量子力学の教科書[3]は有名であるが、それを書き上げた 1 年後、本人自身その内容に疑問を持ち発表した理論と言われている。もう1つは、Edward Nelson による確率力学[4]である。これは伊藤清の確率解析学[5]による定式化で、ある意味、量子ポテンシャル理論の発展型である。

第2節で量子ポテンシャル理論を取り上げ、第3節で確率力学の概説を行う。最後に第4節でいくつかコメントを述べたい。

## 2. 量子ポテンシャル理論

### 2.1 量子ポテンシャルの導出

Bohm の量子ポテンシャル理論を説明する。Schrödinger 方程式から、量子ポテンシャルを含んだ運動方程式を導く。

Schrödinger 方程式

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \nabla^2 \psi + V \cdot \psi \quad (1)$$

に、波動関数として

$$\psi = R \cdot \exp(iS/\hbar) \quad R, S : \text{Real} \quad (2)$$

を代入する。虚数部から

$$\frac{\partial R^2}{\partial t} + \nabla \left( R^2 \cdot \frac{\nabla S}{m} \right) = 0 \quad (3)$$

また、実数部から

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V - \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\nabla^2 R}{R} = 0 \quad (4)$$

を得る。

ここで、(4)式において古典的 Hamilton-Jacobi 方程式からの類推で  $S$  を Hamilton の主関数  $W$  に等しいと仮定する。すなわち、

$$W = S \quad (5)$$

すると古典的 Hamilton-Jacobi 方程式に従って、

$$p = \nabla W = \nabla S \quad (6)$$

を得る。すると、

$$H = \frac{p^2}{2m} + V - \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\nabla^2 R}{R} \quad (7)$$

とおくことにより、(4)式は

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H = 0 \quad (8)$$

となる。すなわち(4)式は量子論的 Hamilton-Jacobi 方程式とみなせる。

また標準の量子力学のとおり、

$$P = |\psi|^2 = R^2 \quad (9)$$

とすると、(6), (9)式を(3)式に代入し、

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla(P \cdot v) = 0 \quad (10)$$

を得る。ここで、

$$v = \frac{p}{m} \quad (11)$$

は量子の速度である。(10)式あるいは(3)式は連続の式と解釈できる。

更に、 $p$  の時間微分をとり(6)式を代入することにより

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + (v \cdot \nabla)p = \frac{\partial(\nabla S)}{\partial t} + \frac{\nabla(\nabla S)^2}{2m} \quad (12)$$

となる。(12),(4)式から  $S$  を消去すると、

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -\nabla \left( V - \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\nabla^2 R}{R} \right) \quad (13)$$

を得る。すなわち通常の古典的 Newton 方程式に、新たに量子ポテンシャル

$$Q = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\nabla^2 R}{R} \quad (14)$$

を追加した形になっている。

つまり、標準の量子力学では、Schrödinger 方程式の虚数部しか用いておらず確率密度のような統計的物理量しか得ていない。一方、量子ポテンシャル理論では実数部も積極的に利用しており、運動学的な情報も得ることが可能である。ここで注意して欲しいのは、量子ポテンシャル理論は Schrödinger 方程式から導き出されているので、この理論の予想する結果は標準の量子力学と同一ということである。

## 2.2 量子ポテンシャルの特徴

量子ポテンシャル理論では、(6)式、あるいは(13)式を解いて、量子の軌道を追跡することが可能となる。ここで具体的な軌跡の例を示す前に、幾つか量子ポテンシャル(14)の特徴について述べる。

a)  $\hbar \rightarrow 0$  の極限、あるいは  $m \rightarrow \infty$  の極限では、量子ポテンシャル  $Q \rightarrow 0$  となり、量子力学から古典力学へスムーズに接続する。

b) 量子ポテンシャル  $Q$  は、波動関数の振幅  $R$  の 2 階微分と  $R$  の比で決定される。即ち、量子ポテンシャルは遠くまで減衰せずに伝わる。このことは理論に非局所性を導入することになり、EPR 実験[6]等に対し説明を与える。つまり量子ポテンシャル理論は Bell の定理[7]で排除されない。

c) 量子過程の中には相互作用の確率が小さい (すなわち  $V \rightarrow$  小) ながらも、大きなエネルギーまたは運動量が移行するいわゆる量子遷移が存在する。量子ポテンシャル理論においては、 $V$  が小さくとも振幅  $R$  が小さければ、量子ポテンシャル  $Q$  は大きくなり、 $Q$

を介して大きなエネルギーまたは運動量の移行が可能と解釈される。

d) Gauss 波束は標準的な量子力学では様々な波数  $k$  の平面波の重ねあわせで表現される。そのため時間の経過と共に波束は広がる。量子ポテンシャル理論においては次のように解釈される。波動関数は

$$\psi = R \cdot \exp(-iS/\hbar) = \exp(-a \cdot r^2) \cdot \exp(-iS/\hbar) \quad (15)$$

と書けるので、量子ポテンシャル  $Q$  は

$$Q = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\nabla^2 R}{R} = \frac{\hbar^2}{2m} \cdot (-4a \cdot r^2 + 2a) \quad (16)$$

となる。すなわち波束の中心から外れる程、量子ポテンシャルにより外向きに加速されることにより、波束が広がると解釈される。

e) 定在波における量子ポテンシャルには驚くべきものがある。例えば  $L$  の距離で 2 つの無限に高い壁に囲まれた 1 次元量子の波動関数は、

$$\psi = R \cdot \exp(iS/\hbar) = \sin(\pi x/L) \cdot \exp(i0/\hbar) \quad (17)$$

と表現される。ここで  $n$  は任意の整数である。この系のエネルギー  $E$  は

$$E = \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\pi^2}{L^2} \cdot n^2 \quad (18)$$

である。量子ポテンシャル理論における量子の運動量  $p$  は波動関数が実数であるため

$$p = \nabla S = 0 \quad (19)$$

となり、量子は静止していることになる。それでは系のエネルギーはどこに存在するのかと言えば、量子ポテンシャルである。

$$Q = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\nabla^2 R}{R} = \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\pi^2}{L^2} \cdot n^2 = E \quad (20)$$

f) s 状態の束縛量子も波動関数は実数で表される。従って量子ポテンシャル理論では、この場合でも量子は静止している。通常のパテンシャル  $V$  と量子ポテンシャル  $Q$  が丁度バランスしており、量子には力が働かないと解釈される。

a)、b)、c)、d)については標準の量子力学では漠としていたものが、量子ポテンシャルの存在を仮定することにより実体として理解し易くなっている。e)、f)に関しては奇妙な感じがするが、決して矛盾はないことに注意して欲しい。e)、f)の記述は観測されていない状態についての記述である。観測にかかる場合は、観測の相互作用についてのハミルトニアンが系に追加され状態が変化すると解釈される。この変化により量子ポテンシャルからエネルギーの全部 [e)の場合] あるいは一部 [f)の場合] が、量子に移行するのである。

### 2.3 2重スリットによる干渉とトンネル効果

最後に標準の量子力学では理解し難い、2重スリットによる干渉とトンネル効果について量子ポテンシャル理論による解釈を述べる。量子ポテンシャル理論を用いれば、観測可能かは別であるが、量子の軌跡を描くことが可能となり、標準の量子力学から得られる知見以上のものが得られる。

#### a) 2重スリットによる干渉

量子ポテンシャル理論による2重スリット干渉の軌跡の計算には、Gauss型スリット[8]による近似計算[9]及び、矩形スリットによる計算[10]等がある。ここでは、後者の例を示す。

図1にスリット近傍における量子ポテンシャルを示す。図中奥が2重スリット直後、手前がスクリーン側である。

条件としては、スリットの幅が  $1\mu\text{m}$ 、2つのスリット中心間の間隔が  $5\mu\text{m}$ 、スリット面の中心から  $1\text{mm}$  の位置に  $0.2\mu\text{eV}$  の超冷中性子の点線源を設置し、スリット反対側  $1\text{mm}$  をスクリーンとした。スリット直後では確率振幅  $R$  が小さい個所が存在するため、量子ポテンシャルが大きく振動している。従ってスリット通過直後には量子ポテンシャルにより、量子に強い作用を及ぼすことが分かる。両スリットの中心には、比較的大きなピークが見られる。また、スクリーンに向かって幾つもの扇形が広がっている。扇形間の谷間では、量子に強い引力及び斥力が働くことになり、量子はこれらの谷間を短時間で横切ることになる。従って、量子ポテンシャルの谷間では、干渉パターンの谷を形成する。一方扇形の中心は平坦である。この上にある量子は、量子ポテンシャルを感じず、そこに留まることになる。すなわち干渉パターンの山を形成する。これら量子ポテンシャルの扇形は 2.2 b) で述べた性質により、スクリーンがない限り遠くまで伝播される。

この量子ポテンシャルにより形成される量子の軌跡を図2に示す。図2は、線源から見て左側のスリット一方のみからの軌跡である。この図を折り返して2つ重ねると全干

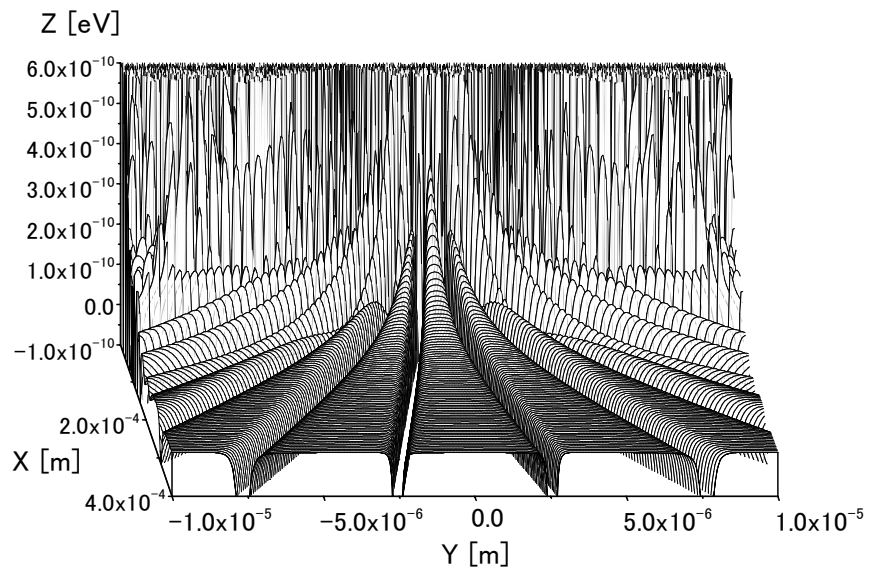


図1 2重スリット近傍の量子ポテンシャル[10]。  
奥がスリット位置で、手前がスクリーン側。  
詳細は本文参照。

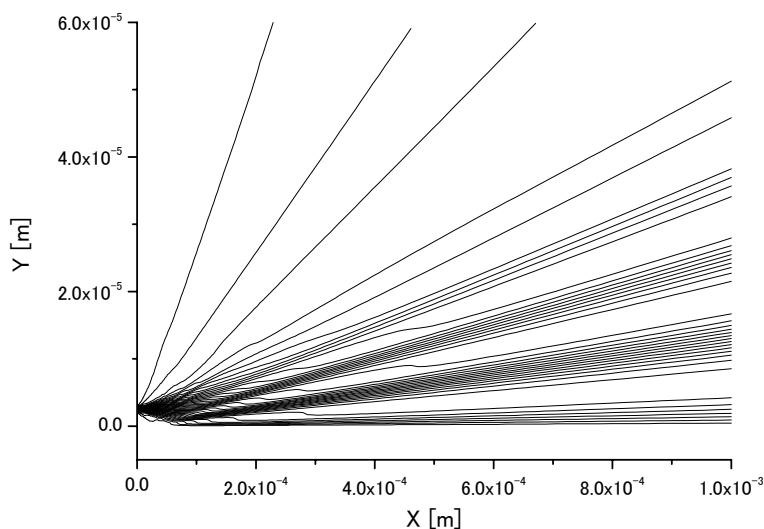


図2 2重スリットからの量子の軌跡[10]。  
一方のスリットからの軌跡のみプロット。  
量子ポテンシャル理論による計算。

渉パターンが再現できる。これから分かる最も驚くべきことは、左側のスリットを通過した量子はスクリーンの左側にしか到達しないことである。これは2つのスリットの中央にある量子ポテンシャルの比較的大きなピークによる斥力のためと解釈され、標準の量子力学からは知り得ない事柄である。量子ポテンシャル理論では標準の量子力学と異なり、量子

は2重スリットのいずれか一方を必ず通過する。この解釈上の違いは非常に大きい。非局所的な量子ポテンシャルが2つのスリットの情報を量子に伝え、その結果として干渉が起こるのである。ただ、量子ポテンシャル理論においても、通過したスリットを特定するために一方のスリット直後で量子を観測しようとするすると干渉パターンは消失する。なぜなら、検出器の設置と観測により量子ポテンシャルが大きく変化するためである。それ故、量子ポテンシャル理論は標準の量子力学と矛盾をきたさないことになる。

スリット直後では、量子ポテンシャルの大きな振動のため量子の軌跡が揺らいでいるが、スリットから離れると量子ポテンシャルが滑らかになるに従い、量子の軌跡もスムーズになっている。しかし、どの軌跡も交差していないことに注意してもらいたい。初期状態が決まれば、終状態も決定する。但し、初期状態について詳細に知り得ないため、終状態についても統計的な情報しか知り得ないとするのが量子ポテンシャル理論の主張である。その意味で、量子ポテンシャル理論は初期状態を隠れた変数とした“隠れた変数理論”であると言える。

## b) トンネル効果

1次元矩形ポテンシャルでのトンネル効果における量子の軌跡を、量子ポテンシャル理論で計算した例[11]について述べる。同一の条件で計算された標準の量子力学による結果は[12]にある。参考にされたい。

図3は Gauss 波束が、そのエネルギーの2倍の高さの矩形ポテンシャル $V$ に入射した場合の量子ポテンシャル $Q$ と $V$ との相互作用の時間発展の結果を示す。図中、時間は奥から手前に進展し、空間的には左端から Gauss 波束が右端にある矩形ポテンシャルに入射している。図3より矩形ポテンシャルが量子ポテンシャルにより、相当変形している

ことが分かる。特に矩形ポテンシャルの前面は、量子ポテンシャルにより低くなる。また矩形ポテンシャル内に、スパイクとポケットの対が生成され、その位置は時間と共に前面に移動している。更には矩形ポテンシャルの手前には周期的に山と谷が形成されている。

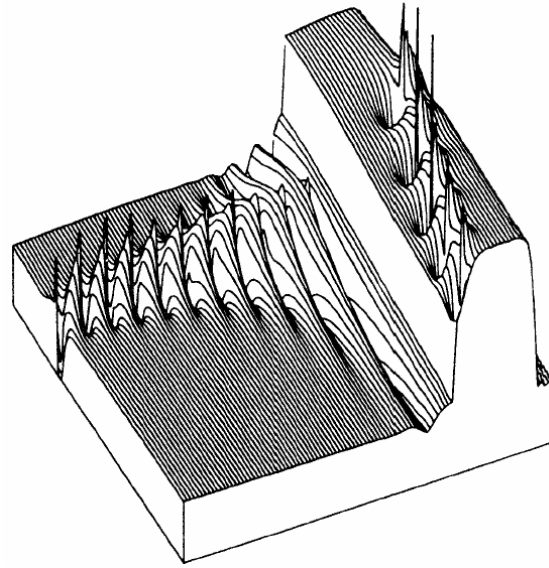


図3 トンネル効果における矩形ポテンシャルと量子ポテンシャル[11]。入射量子のエネルギーは矩形ポテンシャルの1/2。時間は奥から手前に発展、量子は左から右に入射。

図4には Gauss 波束上の各位置からの量子の軌跡を示している。図中、横軸が相対的な時間、縦軸が相対的な空間位置を示し0.5の位置が初期の Gauss 波束の中心位置となっている。矩形ポテンシャルは0.72から0.78の範囲にある。量子の初期位置

が0.67より大きい場合、いわゆるトンネル効果を起こしていることが分かる。これは2.2 d)で説明した Gauss 波束自身による量子ポテンシャルによる量子の加速効果と、量子ポテンシャルと矩形ポテンシャルの相互作用により矩形ポテンシャルが低くなったことの2つの効果により理解される。すなわち量子ポテンシャル理論では、量子は矩形ポテンシャルをトンネル効果によりしみ出て来るのではなく、量子ポテンシャルの効果により矩形

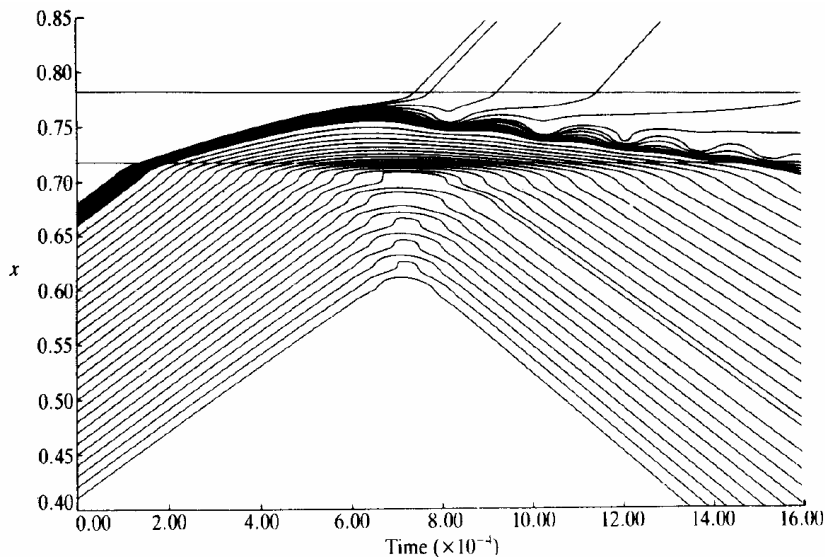


図4 トンネル効果における量子の軌跡[11]。縦軸0.5の位置が入射波束の中心。0.72~0.78の位置に矩形ポテンシャル。量子ポテンシャル理論による計算。

形ポテンシャルを乗り越えるのである。0.67の位置からの量子の軌道も興味深い。この位置では、Gauss 波束自身による量子ポテンシャルからの加速が十分でなく、矩形ポテンシャルを乗り越えられずに、その中にあるポケットに捕まる。そしてそのポケット中を前後に振動し、ある時間、矩形ポテンシャルに捕捉

されてしまう。そして最終的には矩形ポテンシャル前方に戻される。0.57 から 0.66 の間からの軌跡は、ポケットにすら到達出来ずに、矩形ポテンシャル中にある程度留まり、ある種の表皮効果を示す。波束の中心より後方からの軌跡は、矩形ポテンシャルに到達することなく、その前方にある周期的な山で反射されてしまう。そして波束の中心(0.5)からの軌跡はほぼ古典力学のままの軌跡を描く。但し矩形ポテンシャル前面ではある種の表皮効果を起こし、古典力学からのずれが存在する。

このように量子ポテンシャル理論では、Gauss 波束内の位置によりその量子の軌跡が決定され、標準の量子力学による透過率と反射率のみの記述より、かなり豊富な情報が得られる。しかしながら実際には、波束内の量子の位置を正確に知ることが出来ないで、統計的な結果しか得られないのである。

## 2.4 更に量子ポテンシャル理論について

量子ポテンシャル理論では、初期状態が不確定性原理に従う分布である場合には、終状態も不確定性原理に従う分布となることが分かっている。逆に初期状態が不確定性原理に従わない分布の場合は、終状態でも従わないことになる。この点については Pauli らにより批判がなされた[13]。また最初の分布は、どのようにして不確定性原理に則った分布になったのだろうかという疑問も生じる。この問題に対処すべく、Bohm らは揺らぎを持った流体の存在を仮定した修正版を提出した。そして、量子と流体とのランダムな衝突に起因する Brown 運動により、任意の量子の分布が不確定性原理に従う分布へと時間と共に移行することを示している[14]。このことを念頭に、次に確率力学について述べる。

## 3. 確率力学

### 3.1 確率解析学による理論

量子が不確定性原理により支配されているならば、その運動は滑らかではないはずである。従って、量子の運動は本来、微分不可能と考えられる。Schrödinger 方程式が微分方程式で記述されているのは、量子の統計的性質を表す式だからである。個々の量子を記述するためには、微分不可能な変数を扱える確率解析学[5]が不可欠と考えられる。余談であるが、確率解析学の応用範囲は実に広い。有名なものには、ノーベル経済学賞を受賞したブラック - ショールズ理論がある。その他にも、生物学、化学、物理学それに原子力工学と多岐にわたる[15]。そして量子力学に応用されたのが確率力学である。確率解析学を扱うのは正直言って筆者の手に余るのだが、Schrödinger 方程式へと至る式の変形は圧巻であるので、次に紹介する。この議論は主に文献[16]を参照した。

### 3.2 確率力学の概説

確率力学においては、位置の確率変数  $X$  についての確率微分方程式は



$$dX = b \cdot dt + \sqrt{\frac{\hbar}{2m}} \cdot dW \quad (21)$$

と表される。右辺第1項は、平均前方速度場  $b$  による運動、第2項は拡散係数  $N$

$$N = \frac{\hbar}{2m} \quad (22)$$

の量子的な揺らぎを表す項である。すなわち  $\hbar \rightarrow 0$  または  $m \rightarrow \infty$  の極限において、この揺らぎは消失する。 $W$  は Brown 運動を表す正規確率変数で、Wiener 過程と呼ばれる。

ここで正規確率変数が用いられているのは、量子揺らぎがどのような性質のものであれ平均と分散が分かっているならば、中心極限定理により、その揺らぎによる全体としての性質は正規分布で表されるからである。平均前方速度場  $b$  の性質は運動方程式

$$m \cdot \frac{1}{2} (DD_*X + D_*DX) = -\nabla \cdot V \quad (23)$$

から決定される。この方程式は Newton-Nelson の運動方程式と呼ばれる。ここで、 $D$  及び  $D_*$  は平均前方微分、平均後方微分である。 $X$  はなめらかでないので、当然

$$DX \neq D_*X \quad (24)$$

であり、(23)式の左辺は「質量×平均加速度」を表す。量子力学は可逆的であるが、Brown 運動は一般に不可逆である。そこで、Newton-Nelson の運動方程式(23)は、時間について過去と未来を対称に取り入れている。よって、平均前方速度場  $b$  を求めるためには平均後方速度場  $b_*$

$$dX = b_* \cdot dt + \sqrt{\frac{\hbar}{2m}} \cdot dW_* \quad (25)$$

も同時に求める必要がある。

ここで、 $X$  が  $d^3x$  内に存在する確率測度  $Pr$  が、

$$Pr(X \in d^3x) = P \cdot d^3x \quad (26)$$

となるような確率分布密度関数  $P$  を導入する。 $P$  と  $b$  及び  $b_*$  の間には以下のような運動学的な関係式がある。確率微分方程式(21)及び(25)からは前方及び後方 Fokker-Plank 方程式

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\nabla \cdot bP + \frac{\hbar}{2m} \cdot \nabla^2 P \quad (27)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\nabla \cdot b_*P - \frac{\hbar}{2m} \cdot \nabla^2 P \quad (28)$$

が求まる。これらの式の和及び差を求めると、

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot \frac{1}{2}(b + b_*)P = 0 \quad (29)$$

$$\frac{1}{2}(b - b_*)P = \frac{\hbar}{2m} \cdot \nabla^2 P \quad (30)$$

が得られる。これら(29)及び(30)が目的の関係式となる。

次に

$$D_*DX = D_*b \cong \frac{\partial b}{\partial t} + b_* \cdot \nabla b - \frac{\hbar}{2m} \cdot \nabla^2 b \quad (31)$$

$$DD_*X = Db_* \cong \frac{\partial b_*}{\partial t} + b \cdot \nabla b_* + \frac{\hbar}{2m} \cdot \nabla^2 b_* \quad (32)$$

として、Newton-Nelson の運動方程式(23)に代入すると、

$$m \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{1}{2} \cdot (b + b_*) + \frac{1}{2} \cdot (b \cdot \nabla b_* + b_* \cdot \nabla b) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\hbar}{2m} \cdot \nabla^2 (b - b_*) \right\} = -\nabla \cdot V \quad (33)$$

を得る。確率力学は3つの未知関数  $b$  と  $b_*$  及び  $P$  に対する3つの連立非線形偏微分方程式(29)、(30)、(33)で記述される。方程式を簡単化するため、流れ速度場  $v$  と拡散速度場  $u$

$$v = \frac{1}{2} \cdot (b + b_*) \quad (34)$$

$$u = \frac{1}{2} \cdot (b - b_*) \quad (35)$$

を導入する。 $v$ 、 $u$  を連立非線形偏微分方程式(29)、(30)、(33)に代入すると、

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot Pv = 0 \quad (36)$$

$$uP = \frac{\hbar}{2m} \cdot \nabla P \quad (37)$$

$$m \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + mv \cdot \nabla v - mu \cdot \nabla u - \frac{\hbar}{2} \cdot \nabla^2 u = -\nabla \cdot V \quad (38)$$

が求まる。(37)式から

$$u = \frac{\hbar}{2m} \cdot \nabla \cdot \ln P \quad (39)$$

となるので(38)式に代入し、 $u$  が消去可能である。

$$m \cdot \frac{\partial v}{\partial t} + mv \cdot \nabla v - \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \nabla \cdot \left( \frac{\nabla^2 \sqrt{P}}{\sqrt{P}} \right) = -\nabla \cdot V \quad (40)$$

従って、問題は2つの未知関数  $v$  と  $P$  に対する2つの連立非線形偏微分方程式(36)、(40)となった。更に量子ポテンシャル理論でも用いた(6)式

$$v = \frac{\nabla S}{m} \quad (41)$$

による変数変換を行うと、連立非線形偏微分方程式(36)、(40)は

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot \left( P \cdot \frac{\nabla S}{m} \right) = 0 \quad (42)$$

$$\nabla \left\{ \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V - \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\nabla^2 \sqrt{P}}{\sqrt{P}} \right\} = 0 \quad (43)$$

となる。

ここで変数変換(41)には、

$$S \rightarrow S + C(t) \quad (44)$$

の自由度があるので、(43)式は

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V - \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\nabla^2 \sqrt{P}}{\sqrt{P}} = 0 \quad (45)$$

としてよい。

最後に、変数変換

$$\psi = R \cdot \exp(iS/\hbar) \quad (46)$$

但し、

$$P = R^2 \quad (47)$$

を行えば、連立非線形偏微分方程式(42)、(45)は単線形偏微分方程式

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \nabla^2 \psi + V\psi \quad (48)$$

となる。これは Schrödinger 方程式である。

すなわち、確率微分方程式(21)の平均前方速度場  $b$ （及び確率微分方程式(25)の平均後方速度場  $b_*$ ）を決定する“古典力学的な” Newton-Nelson 方程式(23)は、Schrödinger 方程式なのである。確率力学も標準的な量子力学と矛盾することはない。

### 3.3 確率力学と量子ポテンシャル理論の比較

前節での式変形から明らかなように、確率力学で導かれた連立非線形偏微分方程式(42)、(45)は、量子ポテンシャル理論の式(3)、(4)と同一である。この 2 つの理論には類似点が存在し、ここで比較・検討を行う。

まず、量子ポテンシャル理論においては、量子の軌跡の微小変化  $dx$  は(6)式より

$$dx = \frac{\nabla S}{m} \cdot dt \quad (49)$$

となる。この式は、量子の運動が通常のパテンシャルと量子ポテンシャルに支配されていることを意味する。

次に確率力学について述べる。まず、Schrödinger 方程式の解である波動関数(46)を用いて確率微分方程式(21)を書き直すと、(34)、(35)、(39)、(41)式より、

$$\begin{aligned}
dX &= (v+u) \cdot dt + \sqrt{\frac{\hbar}{2m}} \cdot dW \\
&= \left( \frac{\nabla S}{m} + \frac{\hbar}{2m} \cdot \frac{\nabla P}{P} \right) \cdot dt + \sqrt{\frac{\hbar}{2m}} \cdot dW
\end{aligned}
\tag{50}$$

となる。すなわち、確率力学において量子の運動は、流れ速度場  $v$ 、拡散速度場  $u$ 、Wiener 過程  $W$  の 3 つに支配されている。その内、第 1 項の流れ速度場は、量子ポテンシャル理論による運動と同一の運動を生じさせる。残り 2 項が、確率力学で新たに導入された項である。第 2 項の拡散速度場は(50)式から分かるように、確率分布密度  $P$  が大きい場所へと量子を運動させる。そして第 3 項の Wiener 過程により量子的揺らぎが生じる。確率力学の意味することをまとめると以下ようになる。「Wiener 過程により確率分布密度の高い場所からの揺らぎが生じるが、拡散速度場による復元力で元の場所に戻され、大まかな動きとしては流れ速度場によって決定される。」そして量子ポテンシャル理論を、確率力学の言葉で述べると「Wiener 過程と拡散速度場が丁度釣り合っていると仮定して両者を無視し、流れ速度場のみで近似した統計的平均値で記述された理論」と言えるのではないだろうか。

既に述べた  $s$  状態の束縛量子の量子ポテンシャル理論による解釈では、通常のパテンシャルと量子ポテンシャルが釣り合っているため、量子は静止していた。しかし、確率力学による解釈では、その釣り合った状態に量子揺らぎが加わり量子は拡散するが、拡散速度場により引き戻される。その結果、量子は確率分布密度の高い領域の近傍を常に揺らぎ続けることになる。恐らく、大方の人は確率力学によるこの解釈の方が受け入れ易いのではないかと思う。

また確率力学は、先に述べた量子ポテンシャル理論の初期値の分布に関する問題とは無関係である。

### 3.4 2重スリットによる干渉の再考

最後に確率力学で求めた 2 重スリット干渉における量子の軌跡を示す。幾つかの文献で干渉効果が計算されているがいずれもスリット上で Gauss 分布を仮定した近似計算である[17]、[18]。ここでは、2.3 の量子ポテンシャル理論で示した計算と同一の条件の矩形スリットにより計算した軌跡を図 5 に示す。この図でも線源から見て左側のスリットからのみの軌跡を示した。量子ポテンシャル理論の場合 (図 2 参照) と異なり、軌跡全体が量子揺らぎを示している。しかしながら量子ポテンシャル理論の場合と同様に、線源から見て左側のスリットを通過した量子はスクリーンのほぼ左側に到達する。量子ポテンシャル理論では厳密にスクリーンの左側であったが、確率力学では中央の 0 次干渉ピーク近傍であればスクリーンの右側にも到達する。この傾向は、恐らく普遍的なものと思う。Maxwell 方程式を用いた光子による 2 重スリット干渉計算でも、左側のスリットを通過した量子は、スクリーンの左側にのみ到達する[19]。因みに文献[17]では、両スリッ

トの間隔が十分に小さいと近似した計算のため、一方のスリットを通過した量子のみで全干渉パターンが求められている。注意されたい。

またスリット内での量子の通過位置が決まれば、量子ポテンシャル理論ではスクリーン上での位置は一意的に決まるが、確率力学では干渉ピークをまたがって分布し一意的には決まらないのも、両理論の差異である。

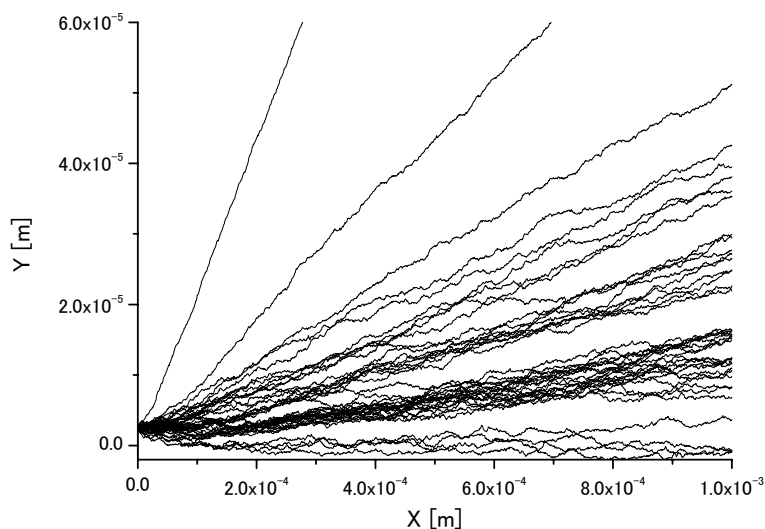


図5 2重スリットからの量子の軌跡。  
一方のスリットからの軌跡のみプロット。  
確率力学による計算。

#### 4. 最後に

筆者が量子ポテンシャル理論や確率力学に興味を持ったのは、標準の量子力学に破れがあるのではないかと考え始めたのがきっかけであった。特に2重スリットによる干渉についてである。このことについては文献[9]にある。

この解説を終えるにあたって、2つ述べておきたいことがある。1つは、量子力学の別解釈は今回紹介した2つ以外にも多数あるのは当然として、この量子ポテンシャル理論や確率力学と同等の理論を提唱した研究者は他にもいるということである。このことについては文献[2]や[4]に詳しい。特に有名なのは、Bohmの量子ポテンシャル理論より以前に、Louis de Broglieが提唱した“2重解の理論”もしくは“パイロット波理論”[20]である。しかし、第5回ソルベイ会議中にPauliに批判され放棄してしまった。後にBohmが独自に提唱した量子ポテンシャル理論で、その批判は解決された。そして、この理論もPauliらにより批判され、更にBohmが回答したのは既に述べた通りである。L. de Broglieはその後、“2重解の理論”の研究を再開している[21]。

もう1つは、量子ポテンシャル理論も確率力学も完璧ではないということである。この解説で述べた範囲では勿論、問題はないのだが、例えば量子ポテンシャル理論の相対論化は完全になされておらず、現在進行中である。詳細については、Bohmらが晩年に著した量子ポテンシャル理論の教科書[22]を参照されたい。また確率力学についても、例えばNelson自身が記したモノグラフ[23]の巻末に、未解決の問題のリストが記されている。

最後に、この解説で量子力学の別解釈の目を通して、量子力学そのものの理解が少し

深まったと思ってもらえれば幸いである。

## 参考文献

- [1] R.P. Feynman, "*The Character of Physical Law*", Cambridge, Mass (1965).
- [2] D. Bohm, *Phys. Rev.* **85**, 166,180 (1952).
- [3] D. Bohm, "*Quantum Theory*", Prentice-Hall, New York (1951).
- [4] E. Nelson, *Phys. Rev.* **150**, 1079 (1966).
- [5] K. Ito, *Memories of the Am. Math. Soc.* **4** (1951) ; J.L.Doob, "*Stochastic Processes*", Wiley, New York (1953).
- [6] A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935); D. Bohm and Y. Aharonov, *Phys. Rev.* **108**, 1070 (1957).
- [7] J.S. Bell, *Physics* **1**, 195 (1964).
- [8] R.P. Feynman and A.R. Hibbs, "*Quantum Mechanics and Path Integrals*", McGraw-Hill, New York (1965).
- [9] C. Philippidis, C. Dewdney and B.J. Hiley, *Nuovo Cimento*, **52**, 15 (1979).
- [10] 大崎 敏郎, 超冷中性子の発生と基礎物理, **KUR Report KURRI-KR-66**, 158 (2001).
- [11] C. Dewdney and B.J. Hiley, *Found. Phys.* **12**, 27 (1982).
- [12] A.Goldberg, H.M.Schey and J.L.Schwartz, *Am. J. Phys.* **35**, 177 (1967); L.I.Schiff, "*Quantum Mechanics*", McGraw-Hill, New York (1968).
- [13] J.B. Keller, *Phys. Rev.* **89**, 1040 (1953).
- [14] D. Bohm, *Phys. Rev.* **89**, 458 (1953); B. Bohm and J.P. Vigier, *Phys. Rev.* **96**, 208 (1954).
- [15] 保江 邦夫, "数値確率解析入門", 朝倉書店 (2000).
- [16] 保江 邦夫, "量子力学", 日本評論社 (2001).
- [17] K. Yasue and J.-C. Zambrini, *Ann. of Phys.* **159**, 99 (1985).
- [18] M. McClendon and H. Rabitz, *Phys. Rev. A* **37**, 3479 (1988).
- [19] R.D. Prosser, *Int. J. Theor. Phys.* **15**, 169, 181 (1976).
- [20] L. de Broglie, *Compt. Rend.* **183**, 447(1926); **184**,273(1927); **185**,380(1927).
- [21] 例えば L. de Broglie, *Found. Phys.* **1**, 5 (1970)など.
- [22] D. Bohm and B.J. Hiley, "*The Undivided Universe*", Routledge, London (1993).
- [23] E.Nelson, "*Dynamical Theory of Brownian Motion*", Princeton Univ. Press, New Jersey (1967); E.Nelson, "*Quantum Fluctuation*", Princeton Univ. Press, New Jersey (1985).