集合の濃度

有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ と実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の決定的な違いの一つに，それらの集合としての「大きさ」に差があるという事実がある．$\mathbb{Q}$ は可算集合であり，$\mathbb{R}$ は非可算集合であると言われる．2 章では，そのことやその周辺のことについて説明する．

集合の「大きさ」を精密に述べるために導入されるのが，集合の濃度の概念である．この概念は，大筋で，われわれが「大きさ」について持っている素朴な直観と合っていると思う．人によっては，少しずれがある（というより，濃度の概念は粗っぽい）と感じる部分もあるかもしれない．

2.1　定義と例

●濃度の相等

集合 A が有限集合である場合には，A の大きさを測るには，A の元の個数を数えればよい．困難が現れるのは，無限集合も含めて取り扱うことを考え始めたときである．

まず，「有限集合 A の元の個数を数える」というのがどういうことか反省してみよう．A の元の個数を数える行為は，A の元に番号付けをしていく行為である．「1 番目の元」，「2 番目の元」，……と決めていって，「n 番目の元」を決めたところですべての元が尽くされるとき，そのことをわれわれは，A が n 個の元からなると言うのだ（そのとき $|A| = n$ と書くことにする)．これは，言い換えれば，A と $\{1, 2, \ldots, n\}$ という 2 つの集合の間に全単射を構成しているということに他ならない：

$$|A| = n \iff \text{全単射 } f\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to A \text{ が存在する．} \tag{2.1}$$

(2.1) は $|A| = n$ であることの定義である．

すると，有限集合 A, B について，「A と B の元の個数が一致するか否か」というのは，実際に元の個数を数えなくても確かめられる．A から B への全単射が存在すれば $|A| = |B|$ となるし，その逆も正しい：

$$|A| = |B| \iff \text{全単射 } f\colon A \to B \text{ が存在する．} \tag{2.2}$$

無限集合も含めた一般の集合について考えるとき，われわれはその「元の個数」を一般には定義することができない．あるいは「元の個数は無限大」などと言ってみてもよいが，それは，無限集合同士の大きさの比較の役には立たない．そこで，「元の個数」にこだわるのはやめる．代わりに，(2.2) を参考にして，A と B の間に全単射が存在するとき，「大きさが等しい」と考えることにしよう．この立場を明確にするために，次の用語を用いる．

定義． 2 つの集合 A, B の間に全単射が存在するとき，A と B は互いに**対等である** (equipotent) といったり，A と B の**濃度が等しい** (A has the same cardinality as B) という．またこのとき $|A| = |B|$ と書く．

A や B が無限集合である場合には，われわれの立場では，$|A|, |B|$ といった記号は単独では意味を持たず，$|A| = |B|$ とか $|A| \neq |B|$ という主張にのみ意味が存在するのである．

例 2.1. 自然数全体の集合 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ と 2 以上の整数全体の集合 $A = \{2, 3, 4, \ldots\}$ は対等である．なぜなら $f\colon \mathbb{N} \to A$, $f(n) = n + 1$ という全単射が存在するからである．また、$\mathbb{N}$ と正の偶数全体の集合 $E = \{2, 4, 6, \ldots\}$ は対等である．なぜなら $g\colon \mathbb{N} \to E$, $g(n) = 2n$ という全単射が存在するからである．$\mathbb{N}$ と正の奇数全体の集合 $O = \{1, 3, 5, \ldots\}$ も対等である（なぜか？)．

例 2.2. $\mathbb{N}$ と整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ は対等である．証明は演習問題とする（問題 2.1)．

例 2.1，例 2.2 からわかるように，集合 A, B が $A \subsetneq B$ という関係にあったとしても（つまり A が B の真部分集合であったとしても)，$|A| \neq |B|$ とは限らない．

もう 1 つ例を追加しておく．

例 2.3. $\mathbb{R}$ と有界開区間 $(0,1)$ は対等である．なぜなら，たとえば

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

という $\mathbb{R}$ 上の関数 f を考えれば，f の値域は $(0,1)$ であって，f を $\mathbb{R}$ から $(0,1)$ への写像と見なすとこれは全単射だからである（問題 2.2）．

●濃度の大小

集合の「大きさが等しい」ことに相当する関係を定めるだけでなく，大小の比較も行いたい．

すでに見たように，$A \subsetneq B$ であっても $|A| = |B|$ となる場合があるから，$A \subsetneq B$ のとき $|A| < |B|$ であるとするのは不適切だ（$|A| = |B|$ と $|A| < |B|$ の両方が成立するのは気持ちが悪い）．けれども，「$A \subset B$ のとき，B の濃度は A の濃度以上である」と考えるのは許されるのではないか．

もっと一般に，単射 $f\colon A \to B$ が存在するとする．そのとき，$f'\colon A \to f(A)$, $f'(a) = f(a)$ とおけば f' は全単射で，つまり $|A| = |f(A)|$ であるから，B の濃度が $f(A)$ の濃度以上だと考えるのならば，B の濃度は A の濃度以上でもあると考えるべきだろう．

以上を念頭において，次のように定義する．

定義． 2 つの集合 A, B に対し，A から B への単射が存在するとき，B の濃度は A の濃度**以上である**といい，$|A| \leq |B|$ と表す：

$$|A| \leq |B| \iff \text{単射 } f\colon A \to B \text{ が存在する．} \tag{2.3}$$

また，B の濃度が A の濃度以上であって，しかも A と B が対等でないとき，B の濃度は A の濃度より**大きい**といい，$|A| < |B|$ と表す：

$$|A| < |B| \iff |A| \leq |B| \text{ かつ } |A| \neq |B|.$$

注 2.4. $|A| \leq |B|$ の定義には単射の代わりに全射を用いることもできる．つまり

$$|A| \leq |B| \Leftrightarrow \text{全射 } g\colon B \to A \text{ が存在する}$$

が成り立つ．なぜなら，問題 1.10 によって，「単射 $f\colon A \to B$ が存在する」および「全射 $g\colon B \to A$ が存在する」はいずれも「$g \circ f = \mathrm{id}_A$ となる 2 つの写像 $f\colon A \to B$, $g\colon B \to A$ が存在する」と同値だからである．

2.2 可算集合，非可算集合

●可算集合

無限集合の中でも基本的な存在が，自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ である．というのは，無限集合の中で $\mathbb{N}$ が「最も小さな」集合だからだ——つまり，A が無限集合ならば $|\mathbb{N}| \leq |A|$ である．これは問題 1.12 (1) の言い換えにすぎない．

定義． 集合 A が $\mathbb{N}$ と対等であるとき，A は**可算集合** (countable set) であるという．可算集合ではない無限集合は**非可算集合** (uncountable set) であるという．

また，A が有限集合であるかもしくは可算集合であることを指して，A は**高々可算な集合**である (at most countable) という．

例 2.1 はいくつかの可算集合の例を与えている．また，次の補題はほとんど明らかといってもいいだろう．

補題 2.5. (1) 可算集合に対等な集合もまた可算集合である．

(2) 可算集合の部分集合は高々可算な集合である．

［証明］ (1) B が可算集合 A に対等であるとする．仮定により，全単射 $f\colon \mathbb{N} \to A$ および $g\colon A \to B$ が存在する．合成写像 $g \circ f\colon \mathbb{N} \to B$ を考えるとこれも全単射だから，B は可算集合である．

(2) B が可算集合 A の部分集合であるとして，B が高々可算な集合であることを証明する．$A = \mathbb{N}$ と仮定して証明すれば十分である．なぜなら，A が一般の可算集合であるときは，全単射 $f\colon \mathbb{N} \to A$ が存在するが，

逆写像 $f^{-1}\colon A \to \mathbb{N}$ による B の像 $f^{-1}(B) \subset \mathbb{N}$ を考えるとこれは B に対等なので，$f^{-1}(B)$ が高々可算な集合なら (1) より B も高々可算な集合だからである．

そこで $B \subset \mathbb{N}$ とする．さらに B が有限集合でないとして，B が可算集合であることを示す．一般に，$\mathbb{N}$ の空でない部分集合には最小元が存在するのだった．B の最小元を b_1 とし，続いて $B \setminus \{ b_1 \}$ の最小元を b_2，$B \setminus \{ b_1, b_2 \}$ の最小元を b_3，……と定めていく．B が無限集合であることからこの手続きは有限ステップで終わることはなく，B は $B = \{ b_1, b_2, b_3, \dots \}$ と書き表される．$g\colon \mathbb{N} \to B$ を $g(n) = b_n$ で定義すればこれは全単射である． $\square$

注 2.6. 補題 2.5 から，A が高々可算な集合であるためには，$|A| \le |\mathbb{N}|$ が必要十分であることがわかる．必要性は明らかである．十分性を示すために単射 $f\colon A \to \mathbb{N}$ が存在すると仮定すれば，値域 $f(A)$ は補題 2.5 (2) より高々可算な集合で，一方 A は $f(A) \subset \mathbb{N}$ と対等だから，(1) より A も高々可算な集合である．

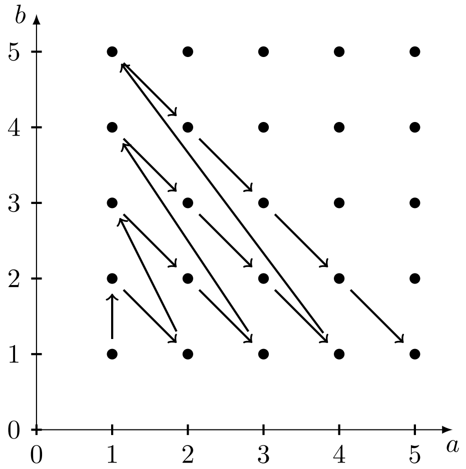
さらに可算集合の例を追加する．

命題 2.7. $\mathbb{N}^2$ $(= \mathbb{N} \times \mathbb{N})$ は可算集合である．より一般に，A と B が可算集合ならば $A \times B$ も可算集合．

［証明］ 前半．示すべきことは全単射 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ の存在である．$\mathbb{N}^2$ の各元は (a, b) $(a,\, b \in \mathbb{N})$ というペアであるが，これらを $a + b$ の値に着目して次のように並べる：

$$\underbrace{(1,1)}_{a+b=2},\ \underbrace{(1,2),\ (2,1)}_{a+b=3},\ \underbrace{(1,3),\ (2,2),\ (3,1)}_{a+b=4},\ \underbrace{(1,4),\ (2,3),\ (3,2),\ (4,1)}_{a+b=5},\ \underbrace{(1,5),\ (2,4),\ (3,3),\ (4,2),\ (5,1)}_{a+b=6},\ \dots .$$

この列の第 n 番目に現れるペアを $f(n)$ とおくことで $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ を定義すれば，f は全単射である．



後半．仮定から全単射 $f\colon \mathbb{N} \to A$, $g\colon \mathbb{N} \to B$ が存在するので，$F(a, b) = (f(a), g(b))$ と定めれば $F\colon \mathbb{N}^2 \to A \times B$ は全単射となる．$\mathbb{N}^2$ は可算集合なので，補題 2.5 (1) より $A \times B$ も可算集合． $\square$

命題 2.8. $\mathbb{Q}$ は可算集合である．

［証明］ 各有理数 $r \in \mathbb{Q}$ について，その既約分数としての表示 $r = a/b$ $(a \in \mathbb{Z},\, b \in \mathbb{N})$ が一意的に存在する（$r = 0$ に対しては $0/1$ がその「既約分数としての表示」である）．そこで

$$C = \{ (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \mid a \ne 0,\ \ a \text{ と } b \text{ は互いに素} \} \cup \{ (0, 1) \} \tag{2.4}$$

とおけば，$f\colon C \to \mathbb{Q}$, $f(a, b) = a/b$ が全単射だから C と $\mathbb{Q}$ は対等．したがって補題 2.5 (1) より C が可算集合であることを示せば十分だが，それは $\mathbb{Z}$ が可算集合であること（例 2.2），命題 2.7，それと補題 2.5 (2) から従う． $\square$

注 2.9. 式 (2.4) は単に $C = \{ (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \mid a \text{ と } b \text{ は互いに素} \}$ と書いてもよい．$b \in \mathbb{N}$ に対し，普通は「0 と b は互いに素 $\Leftrightarrow b = 1$」と定義するからである．だが，混乱を避けるため，(2.4) のように書いた．

命題 2.8 では $\mathbb{Q}$ を $\mathbb{N}^2$ にある意味で“埋め込む”ことによって可算性を証明しているのだが，その議論を参考にすると，さらに次の定理が証明できる．

定理 2.10. 集合族 $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$（添字集合 Λ は $\emptyset$ ではない）について，Λ が高々可算な集合であり，かつ各 A_λ が高々可算な集合であるならば，和集合

$$A = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$$

も高々可算な集合である．

［証明］ 仮定により，Λ はある $M \subset \mathbb{N}$ と対等である（M は $\mathbb{N}$ 自身またはその有限部分集合）．すなわち全単射 $f\colon M \to \Lambda$ が存在する．また，各 $m \in M$ に対し，$A_{f(m)}$ は，やはりある $B_m \subset \mathbb{N}$ と対等である（B_m は $\mathbb{N}$ 自身またはその有限部分集合）．すなわち全単射 $g_m\colon B_m \to A_{f(m)}$ が存在する．そこで

$$C = \{\,(m,n) \in \mathbb{N}^2 \mid m \in M,\ n \in B_m\,\}$$

とおくと，写像 $h\colon C \to A$ を $h(m,n) = g_m(n)$ によって定義することができる．この h は全射だから $|A| \le |C|$．命題 2.7 と補題 2.5 (2) より C は高々可算な集合なので，A も高々可算な集合である． □

●実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の非可算性

ここで，集合論的観点から見た $\mathbb{Q}$ と $\mathbb{R}$ の決定的な違いについて述べることができる．

定理 2.11. $\mathbb{R}$ は非可算集合である．

この事実の証明は，Cantor の対角線論法と呼ばれる有名な論法によって行われる．

実数のどのような性質に基づいて証明するのかを確認しておかなければならない．定理 2.11 の証明に用いるのは，任意の実数 α が十進小数表示を持つことである．実際には半開区間 $[0,1)$ に属する実数だけを考えればよいので $\alpha \in [0,1)$ とすると，これは

$$\alpha = 0.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots, \qquad \text{各 } a_n \text{ は 0 から 9 までの整数}$$

と表される．$0.5000\cdots = 0.4999\cdots$ のように 2 通りに表される場合もあるので，それを除外するため，「ある桁から先はすべて 9」という形の小数表示は用いないものと約束する．すると任意の $\alpha \in [0,1)$ の十進小数表示が一意的に定まる．これを，ここでは，α の**十進小数表示の正規形**と呼ぶことにしよう．

［定理 2.11 の証明］ われわれは，直接的には半開区間 $[0,1)$ が非可算集合であることを証明する．ここから開区間 $(0,1)$ も非可算集合となり（というのは $(0,1)$ が可算集合なら $[0,1)$ も可算集合になるから），例 2.3 によって $\mathbb{R}$ も非可算集合であることが従う．

それでは，半開区間 $[0,1)$ が可算集合であると仮定しよう．すなわち，全単射 $f\colon \mathbb{N} \to [0,1)$ が存在するものとする．各 $f(m)$ に対し，その十進小数表示の正規形を

$$f(m) = 0.a_{m1}a_{m2}a_{m3}\cdots a_{mn}\cdots$$

とおく．そして $b_1, b_2, b_3, \ldots$ を次のように定める：

$$b_m = \begin{cases} 0, & a_{mm} \neq 0 \text{ のとき}, \\ 1, & a_{mm} = 0 \text{ のとき}. \end{cases} \tag{2.5}$$

$\beta = 0.b_1b_2b_3\cdots b_n\cdots$ とおくと，$\beta \in [0,1)$ で，$0.b_1b_2b_3\cdots b_n\cdots$ は β の十進小数表示の正規形になっている．この β はどの $f(m)$ とも一致しない．なぜなら，小数第 m 位を比較すると $a_{mm} \neq b_m$ となっているからである．これは f の全射性に反する．ゆえに初めの仮定は誤りで，半開区間 $[0,1)$ は非可算集合である． □

つまり，$[0,1)$ に属する実数を“1 列に並べた”次のリストにおいて，対角線上の $\boxed{}$ で示した桁に着目することにより，リストにない実数 $\beta \in [0,1)$ を構成できてしまったわけである．

$$\begin{aligned}
f(1) &= 0.\ \boxed{a_{11}}\ \ a_{12}\ \ a_{13}\ \cdots a_{1n}\cdots, \\
f(2) &= 0.\ a_{21}\ \ \boxed{a_{22}}\ \ a_{23}\ \cdots a_{2n}\cdots, \\
f(3) &= 0.\ a_{31}\ \ a_{12}\ \ \boxed{a_{33}} \cdots a_{3n}\cdots, \\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

2.3　集合の濃度に関する 2 つの事実

集合の濃度についてもっと綿密な議論を展開するのは，別の機会に譲る．しかし，基本的で面白い 2 つの事実について触れておきたい．

●冪集合の濃度

Cantor の対角線論法を応用することで，さらに次の定理を証明することができる．「与えられた集合に対し，それより大きな濃度を持つ集合が存在するか」というのは自明な問いではないが，それが冪集合を用いることで解決できるというものである．

定理 2.12. 任意の集合 A に対し，その冪集合 $\mathscr{P}(A)$ の濃度は A の濃度より大きい．すなわち

$$|A| < |\mathscr{P}(A)| \tag{2.6}$$

が成り立つ．

$|A| \leq |\mathscr{P}(A)|$ の成立は簡単にわかる．たとえば，$f\colon A \to \mathscr{P}(A)$ を $f(a) = \{\, a \,\}$ と定めれば，これは単射になっている．したがって，あとは $|A| \neq |\mathscr{P}(A)|$ を示せばよい．ポイントは，定理 2.11 の証明が実質的に $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ が非可算集合であることの証明，すなわち $|\mathbb{N}| \neq |\mathscr{P}(\mathbb{N})|$ の証明を与えているということにある．それを説明して，一般の場合における定理 2.12 の証明は演習問題としよう（問題 2.8)．

定理 2.11 の証明では半開区間 $[0, 1)$ を考えたが，ここではさらに，$[0, 1)$ に属する実数のうち，十進小数表示の正規形が

$$0.a_1 a_2 a_3 \cdots a_n \cdots, \qquad \text{各 } a_n \text{ は 0 または 1} \tag{2.7}$$

となるもの全体の集合を考えて S とする．S は $[0, 1)$ の部分集合であるが，定理 2.11 の証明をそのまま用いることで，S がすでに非可算集合であることがわかる．というのは，$f\colon \mathbb{N} \to S$ を全単射とするとき，式 (2.5) を使って β を定義すると，$\beta \in [0, 1)$ だというだけでなく，実は $\beta \in S$ となるからだ．

ここで，S と $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ との間には，次の式で定義される全単射 $\Phi\colon S \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ がある：

$$\Phi(\alpha) = \{\, n \in \mathbb{N} \mid \alpha \text{ の十進小数表示 (2.7) において } a_n = 1 \,\}.$$

したがって $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ も非可算集合であることが結論される．

以上を定理 2.12 の証明の参考にするために，もう一歩踏み込んで，Φ によって S と $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ を同一視し，S の非可算性に関するわれわれの議論を，$\mathscr{P}(\mathbb{N})$ の非可算性に関する議論として完全に焼き直してしまおう．

全単射 $f\colon \mathbb{N} \to S$ は全単射 $\tilde{f} = \Phi \circ f\colon \mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ に対応する．各々の実数 $f(m) \in S$ は $\tilde{f}(m) = \Phi(f(m)) \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ に対応づけられている．ではこのとき，(2.5) で定義される β に対応する集合 $B = \Phi(\beta) \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ とはどのようなものか．a_{mm} は $f(m)$ の小数第 m 位だから $a_{mm} = 1 \Leftrightarrow m \in \Phi(f(m)) = \tilde{f}(m)$ で，また b_m は β の小数第 m 位だから $b_m = 1 \Leftrightarrow m \in \Phi(\beta) = B$ である．したがって (2.5) は次を意味する：

$$m \in B \;\Leftrightarrow\; m \notin \tilde{f}(m). \tag{2.8}$$

このことから，S を議論から完全に排除して，$\mathscr{P}(\mathbb{N})$ の非可算性を次のように証明できることがわかる．全単射 $\tilde{f}\colon \mathbb{N} \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ が存在するとしよう（これが $f\colon \mathbb{N} \to S$ に対応するとかいうことは考えない)．そして (2.8) によって $B \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ を定義する．すると B はいずれの $\tilde{f}(m)$ とも一致しない．これは $\tilde{f}$ の全射性に矛盾するから，$\mathbb{N}$ から $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ への全単射が存在するとした仮定が誤りで，$\mathscr{P}(\mathbb{N})$ は非可算集合である．

● Cantor–Bernstein の定理

次の事実は，われわれの行った $|A| \leq |B|$ の定義 (2.3) がある意味で妥当であることを示している．

定理 2.13 (Cantor–Bernstein の定理)**.** 集合 A, B に対し，$|A| \leq |B|$ かつ $|B| \leq |A|$ ならば $|A| = |B|$.

一見あたりまえに見えるかもしれないが，それは記号に惑わされているだけだ．定義に戻って考えれば，この定理の主張は「A から B への単射が存在し，また B から A への単射が存在すれば，A から B への全単射が存在する」と言い換えられる．そのように書けば，自明な主張では全然ないことがわかるだろう．

定理 2.13 の証明は面白いし，ひどく長いわけでもないが，ここではそれには立ち入らない．応用として次の事実を述べておこう．

命題 2.14. $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^2$ は対等である．

［証明］ $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}^2$ への単射は明らかに存在するから（たとえば $x \mapsto (x, 0)$ がそう），逆向きの単射の存在を示せば，定理 2.13 により $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^2$ は対等とわかる．$\mathbb{R}$ は $(0,1)$ と対等なので，単射 $f\colon (0,1)\times(0,1) \to (0,1)$ を構成すればよい．

与えられた $\alpha, \beta \in (0,1)$ に対し，それらの十進小数表示の正規形を $\alpha = 0.a_1a_2a_3\cdots$, $\beta = 0.b_1b_2b_3\cdots$ とおく．すると $0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3\cdots$ も十進小数表示の正規形になっていて，ある実数 $\gamma \in [0,1)$ を定める．さらに $\alpha, \beta \in (0,1)$ より $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = a_3 = b_3 = \cdots = 0$ ではないから，実際には $\gamma \in (0,1)$ である．

$f(\alpha, \beta) = \gamma$ と定めることで得られる写像 $f\colon (0,1)\times(0,1) \to (0,1)$ は単射になっている． $\square$

命題 2.14 が意味しているのは「次元の違いというものは，集合論的には区別できない」ということだ．この事実を発見した Cantor は，Dedekind への手紙の中で「見ることはできる，しかし信じられない (Je le vois, mais je ne le crois pas)」と書いたという．

演習問題

2.1　$\mathbb{N}$ が $\mathbb{Z}$ と対等である（つまり $\mathbb{Z}$ は可算集合である）ことを証明せよ．

2.2　$\mathbb{R}$ が有界開区間 $(0,1)$ と対等であることを証明せよ．（例 2.3 を参照．）

2.3　写像 $f\colon A \to A$ に対し，合成写像 $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n\text{ 個}}\colon A \to A$ のことを f^n と書くことにする．

次の性質を持つ全単射 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ の例を挙げよ：f, f^2, f^3, f^4, $\ldots$ はすべて異なる写像である．

2.4　$A = \{1, 2, \ldots, n\}$ とし，$f\colon A \to A$ を全単射とする．

(1)　$f^{m_1} = f^{m_2}$ を満たす相異なる整数 m_1, $m_2 \geq 1$ が存在することを証明せよ．（ヒント：A から A 自身への全単射が有限個しかないことに注意して，鳩の巣原理を用いよ．）

(2)　$f^m = \mathrm{id}_A$ を満たす整数 $m \geq 1$ が存在することを証明せよ．（ヒント：逆写像 f^{-1} を利用せよ．）

2.5　x の整数係数多項式全体の集合 $\mathbb{Z}[x]$ は可算集合である．これを証明せよ．（ヒント：定理 2.10.）

2.6　複素数 $\alpha \in \mathbb{C}$ は，0 でない整数係数多項式 $p(x) \in \mathbb{Z}[x] \setminus \{0\}$ の根になっているとき，**代数的数** (algebraic number) と呼ばれる．代数的数でない複素数を**超越数** (transcendental number) という．

代数的数全体の集合 $\overline{\mathbb{Q}}$ が可算集合であることを証明せよ．（ヒント：問題 2.5 と定理 2.10.）

2.7　無理数の存在や超越数の存在を集合論的に証明したい．

(1)　集合 A が $A = B_1 \cup B_2$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ と表され，しかも B_1 と B_2 がいずれも高々可算な集合ならば，A も高々可算な集合であることを証明せよ．（本当は $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ は不要．）

(2)　無理数全体の集合 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ が非可算集合であることを証明せよ．特に $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \neq \emptyset$.

(3)　超越数全体の集合 $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{Q}}$ が非可算集合であることを証明せよ．特に $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{Q}} \neq \emptyset$.

2.8　定理 2.12 を証明せよ．

2.9　2 つの区間 $(0,1)$ と $[0,1]$ が対等であることを証明せよ．（ヒント：定理 2.13.）

2.10　全単射 $f\colon (0,1) \to [0,1]$ の例を，具体的に一つ挙げよ．（ヒント：たとえば，問題 2.9 を定理 2.13 を用いて解いた上で，定理 2.13 の証明を調べ，それを今の場合についてよく検討してみればよい．）