第 4 章　正則関数

4.1　Cauchy-Riemann の方程式

複素変数 $z = x + iy$ の関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ について

$$\frac{\partial\, u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial\, v(x,y)}{\partial y}, \qquad \frac{\partial\, u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial\, v(x,y)}{\partial x} \tag{4.1}$$

を **Cauchy-Riemann の方程式** という。

Cauchy-Riemann の方程式は，複素関数の微分可能性を調べるのにしばしば用いられる。

定理 4.1　Cauchy-Riemann の方程式と微分可能性１

関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が点 $z = x + iy$ で微分可能であるとき，
(1) 導関数は次の式で与えられ

$$\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial\, u(x,y)}{\partial x} + i\,\frac{\partial\, v(x,y)}{\partial x} \tag{4.2}$$

$$= \frac{\partial\, v(x,y)}{\partial y} - i\,\frac{\partial\, u(x,y)}{\partial y} \tag{4.3}$$

(2) 偏導関数に対して Cauchy-Riemann の方程式が成り立つ。

注意１：　逆は必ずしも成り立たない。

注意２：　実際には，この定理を直接用いるよりも，この定理の対偶を用いて微分不可能であることを示すことが多い。すなわち，関数 $f(z)$ に対して点 z において Cauchy-Riemann の方程式が成り立たないとき，その点において微分不可能である。

証明　まず，$f(z)$ の増分 Δw を求める。関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ は，２つの実変数 x, y の関数であるから，$f(z)$ の増分は

$$\begin{aligned}\Delta w &= f(z + \Delta z) - f(z)\\ &= u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) + i\left[v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y)\right]\end{aligned}$$

となる。ここで，実部については，$u(x, y+\Delta y)$ を引いて同じものを加え，虚部については，$u(x+\Delta x, y)$ を引いて同じものを加える。

$$
\begin{aligned}
\Delta w &= \Big(u(x+\Delta x, y+\Delta y)-u(x, y+\Delta y)\Big)+\Big(u(x, y+\Delta y)-u(x, y)\Big) \\
&+ i\Big[\Big(v(x+\Delta x, y+\Delta y)-v(x, y+\Delta y)\Big)+\Big(v(x, y+\Delta y)-v(x, y)\Big)\Big].
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

仮定より，関数 $f(z)$ は点 $z=x+iy$ で微分可能である。すなわち，$\Delta z=\Delta x+i\Delta y$ をいかなる向きから 0 にしても

$$
\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}
$$

が存在する（同一の極限値をもつ）。いま，$\Delta y=0$ として $\Delta x\to 0$ の極限をとると (4.4) から

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z} &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x, y)-u(x, y)]+i\,[v(x+\Delta x, y)-v(x, y)]}{\Delta x} \\
&= \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}+i\,\frac{\partial v(x, y)}{\partial x}
\end{aligned}
$$

となり，(4.2) が得られる。一方，$\Delta x=0$ として $\Delta y\to 0$ の極限をとると (4.4) から

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z} &= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{[u(x, y+\Delta y)-u(x, y)]+i\,[v(x, y+\Delta y)-v(x, y)]}{i\,\Delta y} \\
&= -i\,\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}+\frac{\partial v(x, y)}{\partial y}
\end{aligned}
$$

となり，(4.3) が得られる。

導関数を表す上の 2 つの式は等しい。すなわち，2 つの式の実部は等しく，2 つの式の虚部は等しい。よって，$u(x, y)$ と $v(x, y)$ の偏導関数が Cauchy-Riemann の方程式を満たすことが導かれる。

簡単な例　複素関数 $f(z)=z^2$ は z 平面上の全ての点で微分可能である。

$$
f(z)=(x+i\,y)^2=x^2-y^2+2ixy
$$

より，$f(z)=u(x, y)+i\,v(x, y)$ の実部 $u(x, y)$ と虚部 $v(x, y)$ は

$$
u(x, y)\;=\;x^2-y^2, \qquad v(x, y)\;=\;2xy
$$

である。それぞれの偏導関数を計算すると

$$
\frac{\partial u}{\partial x}\;=\;2x, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}\;=\;-2y, \qquad \frac{\partial v}{\partial x}\;=\;2y, \qquad \frac{\partial v}{\partial y}\;=\;2x
$$

であり，Cauchy-Riemann の方程式を満たしている。

定理 4.2　Cauchy-Riemann の方程式と微分可能性２

関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が次の３つの条件を満たすとき，
$f(z)$ は点 $z = x + iy$ で微分可能である。

(1)　関数 $f(z)$ が点 $z = x + iy$ の近傍で定義される。

(2)　$u(x, y)$, $v(x, y)$ の偏導関数

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}$$

が点 $z = x + iy$ の近傍で存在して，連続である。

(3)　(2) の偏導関数に対して Cauchy-Riemann の方程式が成り立つ。

証明　$\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z) = \Delta u + i\Delta v$ とおく。このとき，

$$\begin{aligned}\Delta u &= u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) \\ \Delta v &= v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y)\end{aligned}$$

である。また，(2) より u, v の偏導関数は連続であるから，

$$\begin{aligned}\Delta u &= \frac{\partial u}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\Delta y + \varepsilon_1\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}, \qquad \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_1 = 0 \\ \Delta v &= \frac{\partial v}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\,\Delta y + \varepsilon_2\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}, \qquad \lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \varepsilon_2 = 0\end{aligned}$$

が成り立つ。この式と Cauchy-Riemann の方程式 (4.1) より

$$\begin{aligned}\Delta w &= \frac{\partial u}{\partial x}\,(\Delta x + i\Delta y) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}\,(\Delta x + i\Delta y) + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta z + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)\,|\,\Delta z\,|\end{aligned}$$

よって

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)\,\frac{|\,\Delta z\,|}{\Delta z}$$

が得られる。従って，

$$\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}$$

が成り立つ。

Cauchy-Riemann の方程式の極座標表示　物理学では，直角座標 (x, y) の代わりに，平面極座標を用いた方が便利な場合がある。

> 平面極座標 r, θ （$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$）を用いると，関数 $f(z) = u + iv$ に対する Cauchy-Riemann の方程式は
>
> $$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r} \tag{4.5}$$
>
> と表される。

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ の r, θ に関する偏導関数は

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial r} &= \cos\theta & \frac{\partial y}{\partial r} &= \sin\theta \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} &= -r\sin\theta & \frac{\partial y}{\partial \theta} &= r\cos\theta \end{aligned}$$

であるので，関数 u の r, θ に関する偏導関数は

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{\partial u}{\partial x} r\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial y} r\cos\theta \end{aligned} \tag{4.6}$$

となる。同様に u を v で置き換えた関係式も成り立つ。

ここで，直角座標による Cauchy-Riemann の方程式 (4.1) を用いると，

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial v}{\partial y}\cos\theta - \frac{\partial v}{\partial x}\sin\theta \\ &= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial y} r\cos\theta - \frac{\partial v}{\partial x} r\sin\theta\right) \\ &= \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} &= -\frac{\partial v}{\partial y} r\sin\theta - \frac{\partial v}{\partial x} r\sin\theta \\ &= -r\left(\frac{\partial v}{\partial y}\sin\theta + \frac{\partial v}{\partial x}\cos\theta\right) \\ &= -r\frac{\partial v}{\partial r} \end{aligned}$$

が得られる。

なお，(4.6) を x と y に関する偏導関数についての連立方程式であるとして解くと，

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r} \end{aligned} \tag{4.7}$$

が得られる。同様の式が関数 v についても成り立つ。

4.2 正則関数

関数 $f(z)$ が点 $z = z_0$ のみならず，z_0 のある近傍のすべての点において微分可能であるとき，関数 $f(z)$ は z_0 において **正則** であるという。

点集合 S のすべての点で関数 $f(z)$ が正則であるとき，$f(z)$ は S で正則であるという。

複素平面上の任意の点で正則な関数を **整関数** という。

注意１： $z = z_0$ で微分可能であっても，$z = z_0$ で正則とは限らない。

注意２： 連続性や Cauchy-Riemann の方程式は正則であるための必要条件であるが，十分条件ではない。十分条件は定理 3.2 で与えられる。

注意３： 正則関数の定義域は普通は領域（連結した開集合）である。しかし，たとえば，閉集合 $|z| \leq 1$ で正則な関数ということがある。このような場合は，$|z| \leq 1$ を含む適当な領域で正則であることを意味する。

注意４： $f(z)$ が z_0 では正則でないが，z_0 の任意の近傍を取っても，その中の少なくとも１点では正則であるとき，z_0 は $f(z)$ の **特異点** であるという。

微分公式の定理 3.10，合成関数の微分公式の定理 3.11 から次の定理が導かれる。

定理 4.3　正則性の定理

$$f(z), g(z) \text{ は領域 } S \text{ で正則} \implies \left\{ \begin{array}{l} f(z) \pm g(z) \\ f(z)\,g(z) \\ \dfrac{f(z)}{g(z)} \quad (g(z) \neq 0) \end{array} \right\} \text{ は } S \text{ で正則}$$

定理 4.4　合成関数の正則性

正則関数の合成関数は正則である。

実関数について成り立つ次の定理が複素関数についても成り立つ。

定理 4.5

$$\text{領域 } S \text{ で } \frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z} = 0 \implies S \text{ で } f(z) = \text{定数}$$

証明　$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ とおく。領域 S の各点で

$$0 = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

である。複素数が 0 となるのは，その実部と虚部がともに 0 のときであるから，

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

である。これより，$u =$ 定数，$v =$ 定数，よって，$f(z) =$ 定数 である。

定理 4.6　2 つの実変数 x, y の複素関数 $f(x,y) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ において，$u(x,y)$ と $v(x,y)$ が Cauchy-Riemann の方程式を満たすならば，z と $\overline{z}$ を独立な変数とみなしたとき，$f = u + i\,v$ は z のみの関数 $f(z)$ である。

このとき，$u(x,y)$ か $v(x,y)$ のどちらかが与えられると，$f(z)$ は付加定数を除いて一意的に定まる。

証明（前半）　$z = x + i\,y$, $\overline{z} = x - i\,y$ から

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad y = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

であるので，独立変数による偏導関数は

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{\partial x}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2i}, \qquad \frac{\partial y}{\partial \overline{z}} = -\frac{1}{2i}$$

である。従って，$f = u + i\,v$ の $\overline{z}$ に関する偏導関数は,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} &= \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\Big(u + i\,v\Big) \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial \overline{z}} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\,\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial \overline{z}} \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\,\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]
\end{aligned}$$

と表せる。右辺の偏導関数に Cauchy-Riemann の方程式を用いて

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$$

を得る。すなわち，f は $\overline{z}$ を含まず，z だけの関数である。

証明（後半）　いま，実部 $u(x,y)$ が与えられたとする。これに対応する虚部 $v(x,y)$ として 2 つの $v_1(x,y)$，$v_2(x,y)$ が存在すると仮定すると，これらは Cauchy-Riemann の方程式を満たすので

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v_1}{\partial x} = -\frac{\partial v_2}{\partial x}$$

すなわち,

$$\frac{\partial(v_1 - v_2)}{\partial x} = \frac{\partial(v_1 - v_2)}{\partial y} = 0$$

が成り立つ。これは，$v_1 - v_2$ は x も y も含まない定数であることを表しており，従って，$v(x,y)$ は定数を除いて一意的に定まり，$f(z)$ も定数を除いて一意的に定まる。$v(x,y)$ が与えられたときも，全く同様である。

4.3　調和関数

２実変数 x, y の関数 $h(x,y)$ が領域 S で次の２つの条件を満たすとき，$h(x,y)$ は領域 S で **調和関数** であるという。

(1)　１階，２階の偏導関数が連続である。

(2)　**Laplace の方程式**

$$\frac{\partial^2 h(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h(x,y)}{\partial y^2}=0 \tag{4.8}$$

を満たす。

定理 4.7

領域 S で関数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ が正則

.　$\Longrightarrow$　$u(x,y)$, $v(x,y)$ は S で調和関数

注意： $u(x,y)$, $v(x,y)$ がともに調和関数であっても，$u(x,y)+i\,v(x,y)$ が正則とは限らない。

証明　$f(z)=u+iv$ が領域 S で正則であるとき，u と v は連続な偏導関数をもち，Cauchy-Riemann の方程式が成り立つ。Cauchy-Riemann の方程式を x，または y で偏微分して

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}$$

が得られる。ところで，偏導関数が連続であるとき，微分の順序に関係なく

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x},\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x}$$

が成り立つ。従って，

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial y\,\partial x}-\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}=0\\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= -\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=0\end{aligned}$$

となり，Laplace の方程式を満たしていることがわかる。

共役調和関数　領域 S において２つの調和関数 $u(x,y)$, $v(x,y)$ が Cauchy-Riemann の方程式を満たすとき，v は u の **調和共役** である，あるいは，v は u の **共役調和関数** であるという。

定理 4.8

領域 S で関数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ が正則

.　$\Longleftrightarrow$　$v(x,y)$ は S において $u(x,y)$ の共役調和関数

証明 $\Longrightarrow$ $f(z) = u + iv$ が正則であるならば，u と v は Cauchy-Riemann の方程式を満たし，また，定理 4.7 より調和関数である。よって，v は u の共役調和関数である。

証明 $\Longleftarrow$ v が領域 S で u の共役調和関数であるならば，共役調和関数の定義から u と v は，その１階，及び２階の偏導関数が S の各点で連続であり，また，Cauchy-Riemann の方程式を満たす。よって，定理 4.2 より，$f(z)$ は S で正則である。

Laplace の方程式の極座標表示 は

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} = 0 \tag{4.9}$$

で与えられる。

r と θ に関する偏導関数 (4.6) を $\partial/\partial x$，$\partial/\partial y$ について解くと

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin\theta\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\,\frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned} \tag{4.10}$$

となる。これを直角座標で表した Laplace の微分演算子に代入して

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

を得る。

調和関数の応用

静電ポテンシャルと電気力線

電荷密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ が与えられたとき，静電ポテンシャル $u(\boldsymbol{r})$ は方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) u(\boldsymbol{r}) \;=\; \rho(\boldsymbol{r})$$

を満たす。このとき，点 $\boldsymbol{r}$ における電場 $\boldsymbol{E}$ は静電ポテンシャル $u(\boldsymbol{r})$ の勾配で与えられる。

$$\boldsymbol{E} \;=\; -\operatorname{grad} u(\boldsymbol{r}) \;=\; -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) u(\boldsymbol{r})$$

電場ベクトル $\boldsymbol{E}$ を連続的につなぎあわせたものが電気力線である。

電荷がない領域で，しかも静電ポテンシャルが z 座標に依らないとき，静電ポテンシャル $u(x, y)$ が満たす方程式は２次元の Laplace の方程式である。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) u(x, y) \;=\; 0$$

すなわち，静電ポテンシャル $u(x,y)$ は調和関数である。このとき，電場の x 成分 E_x と y 成分 E_y は次の式で与えられる。

$$E_x = -\frac{\partial}{\partial x}u(x,y), \qquad E_y = -\frac{\partial}{\partial y}u(x,y)$$

ここで，調和関数 $u(x,y)$ を実部とする正則関数を考える。その虚部を $v(x,y)$ と表すと，Cauchy-Riemann の関係式が成り立つ。

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}v(x,y), \qquad \frac{\partial}{\partial y}u(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x}v(x,y)$$

$u(x,y)$ の導関数は電場を表すので，この関係式は

$$\frac{\partial}{\partial x}v(x,y) = E_y \qquad \frac{\partial}{\partial y}v(x,y) = -E_x$$

と書き直せる。すなわち，虚部 $v(x,y)$ の勾配は電場ベクトルに直交している。従って，$v(x,y) =$ 一定 の曲線が電気力線を定め，$u(x,y) =$ 一定（等電位）の曲線と直交する。$z = x + iy$ の関数

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

を複素（静電）ポテンシャルと呼ぶ。

非圧縮性のうず無し流体

空間の点 $\boldsymbol{r}$ における流体の速度を表すベクトル $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ を速度場ベクトルという。このとき，

$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$$

をうず度という。$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}) = 0$ のときうず無しの流れと言い，$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = 0$ である。このとき，速度場ベクトルは関数 Φ の勾配で表すことができる。

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{grad}\,\Phi(\boldsymbol{r})$$

これは，スカラー関数 Φ に対して $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\Phi) = 0$ が恒等的に成り立つからである。関数 Φ を速度ポテンシャルと呼ぶ。

流体を構成する物質が生成されたり消滅することはないので，連続の方程式が成り立つ。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho \boldsymbol{v}) = 0$$

ここで，ρ は密度（質量密度）であり，一般に時間 t と位置 $\boldsymbol{r}$ に依存する。特に，非圧縮性の流体の場合，$\rho =$ 一定 であるので，$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = 0$ が成り立つ。従って，速度ポテンシャルは

$$\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,\Phi) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi = 0$$

を満たす。すなわち，速度ポテンシャル Φ は Laplace 方程式の解である。

速度場ベクトル $\boldsymbol{v}$ が x と y だけに依存する 2 次元の流れを考える。このとき，速度ポテンシャルは 2 次元の Laplace の方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\varPhi = 0$$

の解であり，速度ポテンシャルから速度場ベクトルは次の式で求められる。

$$v_x = \frac{\partial\varPhi}{\partial x} \qquad v_y = \frac{\partial\varPhi}{\partial y}$$

ここで，流れの関数 $\varPsi$ を導入する。まず，空間に点 A をとる。点 A と任意の点 P を結ぶ曲線を C とする。このとき，曲線 C を横切って通過する流体の体積は，曲線 C に沿った積分

$$\varPsi(\mathrm{P}) = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{P}} v_n\,\mathrm{d}s$$

で与えられる。ここで，v_n は流体の速度ベクトルの，曲線 C に対する法線成分を表す。このように定義した流れの関数 $\varPsi$ は点 P だけで決まり，曲線 C には依らない。別の曲線 C' を考えると，C を通過して入った非圧縮性流体は必ず C' を通過して出て行くからである。流れの関数 $\varPsi$ の定義から，$\varPsi=$ 一定 となる点 P を連ねてできる曲線を考えると，この曲線を通過する流量は 0 であるから，この曲線は流線を表す。

ところで，流れの関数の定義式から，曲線 C を通過する流体の速度の法線成分は

$$v_n = \frac{\partial\varPsi}{\partial s}$$

である。法線方向に限らず，微分の方向を x 方向，及び y 方向に取ると，

$$\frac{\partial\varPsi}{\partial x} = -v_y \qquad \frac{\partial\varPsi}{\partial y} = v_x$$

であることが分かる。速度ポテンシャルを用いて表した速度場ベクトルと比較すると，速れの関数 $\varPsi$ と速度ポテンシャル $\varPhi$ は Cauchy-Riemann の方程式を満たしている。すなわち，速度ポテンシャル $\varPhi$ を実部とし，速れの関数 $\varPsi$ を虚部とする関数

$$f = \varPhi + i\varPsi$$

は複素数 $z=x+iy$ に関して正則関数である。関数 $f(z)$ を複素速度ポテンシャルと呼ぶ。流れの関数 $\varPsi$ は速度ポテンシャル $\varPhi$ と同様に調和関数である。