1章 非線形解析における応力と歪

物体の変形理論は、微小変形理論と有限変形理論に大別される。前者では、文字通り変形が微小であるとの前提の下に、力の釣合を近似的に変形前の状態について考えるので、解析が比較的簡単になる。これに対して、後者の有限変形理論では、前提条件は何ら課していない代わりに、力の釣合を厳密に変形後の未知状態において考えるため、たとえ材料が線形弾性体であると仮定したとしても、非線形方程式を解かねばならなくなる。このような非線形性を、幾何学的非線形性と呼ぶ。

実際の物体は、原子のレベル迄考えれば、隙間だらけの構造をしている。力学の世界では、そんな物体を扱うために、三次元空間において物体の表面で囲まれた連続な領域を物体そのものであると見做す。この連続領域を連続体と言う。連続体の表面から内側には、物体の性質を備えた物質点が、連続的に充填配置されているとする。物質点は、3次元座標と一対一に対応付けられるものとする。物質点は、体積が無限小の点であるが、分子・原子の事ではなく、架空の便宜的な概念だと考えて欲しい。物質点の空間における集合状態を物体の配置と呼ぶ。物質点の運動・変形を記述するために、ある基準時刻t_0における物体の配置を基準配置と呼び、現在時刻tにおける配置を現(在)配置と呼ぶ。

テンソルについて。良くテンソルは、ベクトルの親玉のように説明する事がある。また指標(添字)を使って数式を簡単に表すための単なる表記法であると誤解される面があるように思われる。しかし有限変形理論を理解するときには、その説明では足りない。

初等幾何学が成立する曲がってない空間、即ち3次元 Euclid 空間の中の任意のベクトル$\boldsymbol{b}$を考えたとき、それは或る大きさと方向を持った矢印として視覚的に理解されるとおり、座標系に依存しない存在である。よく線形代数において$\boldsymbol{b}$を成分表示して$\{b_1,b_2,b_3\}$のように書くが、その意味は

$$\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{e_1}+b_2\boldsymbol{e_2}+b_3\boldsymbol{e_3}=\sum_{i=1}^{3}b_i\boldsymbol{e_i} \qquad (1.1)$$

のように、$\boldsymbol{b}$を直交デカルト座標に沿う単位ベクトル、つまり正規直交基底ベクトル$\boldsymbol{e_i}$(i=1～3)によって分解した際の係数の事である。この段階でベクトルの表示は、座標系に依存したものとなる。もし異なる基底ベクトル$\bar{\boldsymbol{e}}_i$を持つ直交デカルト座標系を新たに取ると、今度は$\boldsymbol{b}$は、

$$\boldsymbol{b}=\sum_{i=1}^{3}\bar{b}_i\bar{\boldsymbol{e}}_i \qquad (1.2)$$

のように分解され、成分$\{\bar{b}_1,\bar{b}_2,\bar{b}_3\}$を持つ事になる。重要な点は、ベクトルは、座標系とは独立な$\boldsymbol{b}$という「存在」を指している、という事である。

但し、もう一つ明確にしなければならぬ事は、その「存在」が$\boldsymbol{b}$と観測された事に基づき、以上の議論がなされている点である。観測者(observer)が異なれば、同じベクトルや以下に述べるテンソルも、前記の座標系の意味ではなく、異なって観測される。一例として地球は太陽の回りを公転しているし、自転もしているのに、その上に乗っている人間は静止していると認識している。また、飛行機の乗客は飛行機が動いている事を意識しないのに、地上で飛行機を見る人は、動いているものと認識している。観測者は基準枠(reference frame)とも呼ばれ、テンソルの客観性(objectivity)を論じる上で重要な概念となる。これは超弾性等の議論で再び登場する。

次にテンソルの概念に再び戻るが、一例として図1-1のように、応力の分布する連続体に、外向き単位法線ベクトルが$\boldsymbol{n}$であるような仮想的な断面を取った場合を考えてみる。ここで配置は、現配置とする。

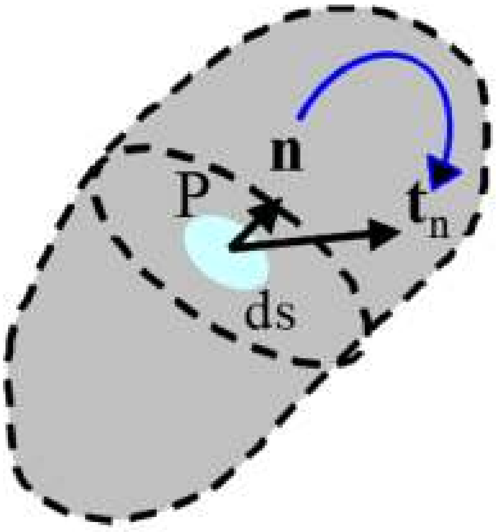

図1-1 Cauchy 応力テンソルの概念

断面上に在る点Ｐを囲む微小面積dsに作用する力がベクトル$d\boldsymbol{f}_n$で表されたとすると、点Pでの応力ベクトル$\boldsymbol{t}_n$は、

$\boldsymbol{t}_n = d\,\boldsymbol{f}_n/ds\,(ds \to 0)$ (1.2.2)

で定義される。次に、もし点Ｐを通り、異なる向き$\boldsymbol{n}'$の断面を取ると、今度はそれに応じた応力ベクトル$\boldsymbol{t}_n{}'$が得られる筈である。このようにベクトル$\boldsymbol{n}$に対してベクトル$\boldsymbol{t}_n$を定める($\boldsymbol{n}$を$\boldsymbol{t}_n$に変換する)何かが存在するから、それを

$\boldsymbol{t}_n = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{n})$ (1.3)

と表す。この変換$\boldsymbol{T}$には線形性があり、

$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n}+\boldsymbol{n}') = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{n}) + \boldsymbol{T}(\boldsymbol{n}')$と (1.4)

$\boldsymbol{T}(c\boldsymbol{n}) = c\boldsymbol{T}(\boldsymbol{n})$ (1.5)

が成立する(これは線形性の定義である。証明略)。cは実定数である。一般に、ベクトルからベクトルへの線形変換をテンソルと定義し、この例における$\boldsymbol{T}$はCauchy 応力テンソルと呼ばれる。

次に変形勾配テンソルについて述べる。物質点の運動(=時間と共に変化する物体から領域への写像)を記述するために、ある基準時刻t_0における物体の配置を基準配置とし、各物質点の位置ベクトルを$\boldsymbol{X}$とする。物質点の現時刻tにおける位置ベクトルを$\boldsymbol{x}$とすると、

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t)$ (1.6)

は物質点$\boldsymbol{X}$の運動を表す。ところで基準時刻t_0における量は常に大文字で表し、現時刻tにおける量は常に小文字で表す。

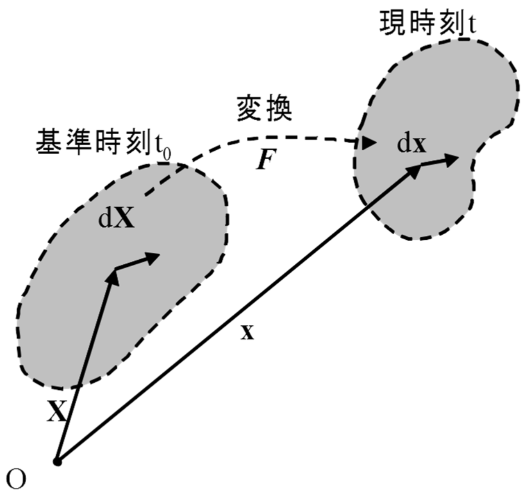

図1-2 物質点の運動と変形勾配テンソル$\boldsymbol{F}$の概念

時刻$t_0 = 0$の基準配置における物質点$\boldsymbol{X}$及びその近傍の点$\boldsymbol{X} + d\boldsymbol{X}$は、現時刻$\boldsymbol{t}$において$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t)$及び$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X} + d\boldsymbol{X}, t)$の位置を占める。$d\boldsymbol{X}$が微小であれば、

$$d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X} + d\boldsymbol{X}, t) - \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t) \tag{1.7}$$

は$d\boldsymbol{X}$に対して線形の関係にあると考えられるから、線形変換

$$d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{X} \tag{1.8}$$

を定義する事ができる。そして$\boldsymbol{F}$を変形勾配テンソルと呼ぶ。$\boldsymbol{F}$の表現行列は正則(=正方でかつ逆行列が存在する)である。よって

$$d\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F}^{-1} \cdot d\boldsymbol{x} \tag{1.8.2}$$

変形勾配テンソルは、変形の一つの表現と考えられる。

1.1 Cauchy 応力テンソルの対称性

結論から言えば対称である。最も単純な説明は、連続体内部の任意部分に対する力のモーメントの釣合条件から、非対角項については、$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} (i, j = 1,2,3)$が成立し、Cauchy 応力テンソルは対称テンソルである事が示される。もう少し詳しい説明をすると、例えば$\sigma_{12} > \sigma_{21}$のような事があると、点 P を$x_3$軸回りに回転させる力のモーメントが発生する事になるが、それは Cauchy の応力原理に反する。

ここで Cauchy の応力原理について説明する。詳細は文献[10]を詳細して頂くとして、ここでは簡単に説明する。第1章の第5段落(p. 7)で、Cauchy 応力テンソルを定義したが、その時の説明は、Cauchy 応力テンソルを定義するだけの物であった。ここでは、先ず点Pの回りの力のモーメントを$d\boldsymbol{M}_{\mathrm{P}}$とする。そして以下の命題も成り立つとする。

$$d\boldsymbol{M}_{\mathrm{P}} = \boldsymbol{0} (ds \to 0) \tag{1.8.3}$$

式(1.2.2)と式(1.8.3)を合わせてコーシーの応力原理と言う。

