数理論理学ＩＩ

目 次

第 1 章　公理的集合論の基礎 **5**
1.1 集合論の公理 5
1.1.1 集合の存在公理 5
1.1.2 外延性公理 6
1.1.3 内包性公理 6
1.1.4 対の存在公理 6
1.1.5 和の公理 7
1.1.6 置換公理 7
1.1.7 べき集合公理 7
1.1.8 選択公理 8
1.1.9 無限公理 8
1.1.10 基礎の公理（正則性公理） 9
1.2 数学的対象と集合 9
1.2.1 関係 10
1.2.2 関数 11
1.3 順序数 11
1.4 順序数上の再帰的定義 16
1.5 基数 18

第 2 章　モデル理論の基礎 **21**
2.1 構造と同型 21
2.2 コンパクト性定理 22
2.3 公理の完全性 23
2.4 定義可能集合 25
2.5 応用例 27
2.5.1 ４色定理と無限地図 27
2.5.2 順序集合 28

第1章　公理的集合論の基礎

1.1　集合論の公理

モノの集まりを集合とよびたいが，あまり色々なものを集合とすると，簡単に矛盾が出てきてしまう．

- ラッセルのパラドクス $A = \{X : X \notin X\}$ を集合として認めると，$A \in A$ と $A \notin A$ の二つの場合がある．
  - $A \in A$: このとき，A の定義から，$A \notin A$ となり矛盾である．
  - $A \notin A$: このとき，A の定義から，$A \notin A$ でない．すなわち $A \in A$ となり，再び矛盾を得る．

このような矛盾が出ないように，集合に関する理論を作りたい．いくつかの妥当と思われる公理を考えて，それらを満たすものだけを集合として認める立場をとる．基本的な述語としては，$\in$ だけである．また変数は直感的には集合を表すと考える．変数は $x, y, \ldots$ を主に用いるが，大文字 X, Y なども適宜使う．

$$x \in y$$

の直観的な意味は，もちろん元 x が集合 y に属することであるが，x も一つの集合だと考える．我々の直観に合致するいくつかの公理を導入する．$\in$ と論理記号 $(\wedge, \vee, \neg, \to, \leftrightarrow, \forall, \exists, =)$ を使って出来上がる論理式で公理を表現する．

1.1.1　集合の存在公理

$$\exists x (x = x).$$

$x = x$ は自明に成立すると考えられるので，上の公理は集合は少なくとも一つは存在していることを意味する．

1.1.2　外延性公理

$$\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \ \rightarrow \ x = y.$$

集合 x, y が与えられたとき，それらに所属する元が全く同じときは，x と y は同じ集合と考えることを主張している．本当は，一番外側に $\forall x \forall y$ が必要だが，見にくくなるのを避けるために省略してある．以下同様な省略を用いる．

1.1.3　内包性公理

各論理式 φ に対して，

$$\exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge \varphi(z))).$$

集合 x の中で，条件 φ を満たすものだけを集めた集合 y が存在することを意味している．上の y は $\{z \in x : \varphi(z)\}$ と記述される．基本的な述語としては $\in$ だけを用いると最初に書いたが，$\{z \in x : \varphi(z)\}$ を使った命題（論理式）はそれを使わない $\in$ だけの命題に（意味を変えずに）変形できるので，このような補助的な記法を導入することは問題ない（以下の注意参照）．

φ の中には，z 以外の自由変数（ただし y とは異なる）が存在していてもよい．

注意 1. $\{z : \varphi(z)\}$（クラスと通常よばれる）を集合として認めると，ラッセルのパラドクスを導いてしまう．外延性公理では，集合の元として集めてくる z は，もともと集合として認められている x の中だけで考えている．

注意 2. $\{z \in x : \varphi(z)\}$ の形を使って作られる論理式について考える．例えば，$\forall y(y \in \{z \in x : \varphi(z)\} \rightarrow y \in w)$ は，$\forall y((y \in x \wedge \varphi(y)) \rightarrow y \in w)$ の省略形と考えることができる．

1.1.4　対の存在公理

$$\exists z(x \in z \wedge y \in z).$$

与えられた x と y を元として含む集合 z が存在する．

注意 3. 対の存在公理と内包性公理から

$$\exists z \forall w(w \in z \ \leftrightarrow \ w = x \vee w = y)$$

が示される．実際，対の存在から x, y をともに含む集合 z^* は存在するので，z^* の中で条件 $w = x \vee w = y$ を満たすもの全体（内包性から保証される）をとればよい．また，外延性の公理から，元として丁度 x, y だけを含む z はただ一つである．このような z を $\{x, y\}$ で表す．$x = y$ のときは，単に $\{x\}$ とかく．

例 4. 補助記号を用いた論理式 $z \in \{x, y\}$ は，$\in$ だけを用いた論理式 $z = x \vee z = y$ と同値である．

1.1.5　和の公理

$$\exists y \forall z \forall w \big((z \in w \wedge w \in x) \ \rightarrow \ z \in y\big).$$

与えられた x に対して，x の元の元となる z をすべて含む集合 y が存在することを主張している．対の公理の場合と同様に，内包性公理から，x の元の元となる z 全体の集合が（唯一つ）存在する．それを $\bigcup x$ で表す．

例 5. 補助記号 $\bigcup$ を用いた論理式 $z \in \bigcup x \ \rightarrow \ z = y$ は，$\in$ だけの論理式 $\forall w((z \in w \wedge w \in x) \rightarrow z = y)$ と同値である．

演習問題 6. $\bigcup\{x, y\}$ は $x \cup y$ と略記する．これは通常の表記と一致していることを確かめよ．

1.1.6　置換公理

各論理式 φ に対して，

$$\forall y \in x \exists ! z \varphi(y, z) \ \rightarrow \ \exists w(\forall y \in x \exists z \in w \varphi(y, z)).$$

ここで $\forall y \in x(\dots)$ は $\forall y(y \in x \rightarrow \dots)$ の省略形である．また $\exists ! z \psi(z)$ は

$$\exists z \psi(z) \ \wedge \ \forall z \forall z'(\psi(z) \wedge \psi(z') \rightarrow z = z')$$

の省略形，すなわち，ψ を満たす元が丁度一つあることを表している．

最初に次のことに注意する：集合 x の各元 y に対して，$\varphi(y, z)$ を成り立たせる z がただ一つ存在しているとき，一つの ‘関数’ $f : y \mapsto z$ が与えられていると思える．置換公理は（内包性公理により），f による x の像が集合として存在することを主張している．

1.1.7　べき集合公理

$$\exists y \forall z(z \subset x \rightarrow z \in y).$$

ここで，$z \subset x$ は $\forall w(w \in z \rightarrow w \in x)$ の省略形である．すなわち，z が x の部分集合であることを表現している．したがって，べき集合公理は，与えられた集合 x の部分集合をすべて含む集合が存在することを表している．内包の公理を用いると，丁度 x の部分集合全体からなる y も存在する．すなわち $\exists y \forall z(z \subset x \leftrightarrow z \in y)$ が導かれる．ここで存在が保証される（唯一の）y は $\mathcal{P}(x)$ とかかれる．

1.1.8　選択公理

選択公理を表現するために，いくつかの省略形を用意しておく．

1. $\emptyset$: 存在公理によりなんらかの集合 x が存在する．内包公理を使うと集合

$$\{y \in x : y \neq y\}$$

が存在する．この集合には元が存在し得ないので，外延性から，元を持たない唯一つの集合となる．この集合を空集合とよび，$\emptyset$ で表す．論理式 $x = \emptyset$ は $\forall y(y \notin x)$ の省略形であり，$x \neq \emptyset$ は $\exists y(y \in x)$ の省略形である．

2. 集合 $x \neq \emptyset$ に対して，$y \in x$ を一つ取り，

$$\{z \in y : \forall w \in x(z \in w)\}$$

を考える．内包性公理から，このような集合は存在する．またその集合は（$y \in x$ の取り方によらず）x のすべての元に属する元 z の全体となる．通常の表記にしたがって，上の集合は $\bigcap x$ とかくことにする．さらに $\bigcap\{a, b\}$ は $a \cap b$ と略記する．

選択公理：

$$\forall x \in F(x \neq \emptyset) \wedge \forall x \in F \forall y \in F(x \neq y \to x \cap y = \emptyset) \ \to\ \exists C \forall x \in F \exists! y(y \in x \cap C).$$

空でない集合たちからなる集合族 F に対して，F に属する任意の集合 x と丁度 1 点で交わる集合 C が存在する．

1.1.9　無限公理

集合 x に対して，$x \cup \{x\}$ を $S(x)$ で表す．例えば，$S(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $S^2(\emptyset) = S(S(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ である．S は，successor の頭文字で，次の元という意味を持たせている．

無限公理：

$$\exists x(\emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \to S(y) \in x)).$$

x は $\emptyset$（0 と思う）を含んでいて，y が x に属すれば，y の次の元 $S(y)$ も x に属している．そのような x が存在することを主張するのが無限公理である．直観的には，自然数全体のような集合が存在することを意味する．

無限公理によって保証される集合は，$\emptyset, S(\emptyset), S^2(\emptyset), S^3(\emptyset), \ldots$ をすべて元として含む集合である．しかし余分な元を含んでいるかも知れない．そこで自然数全体の集合 ω を

$$\{\emptyset, S(\emptyset), S^2(\emptyset), S^3(\emptyset), \ldots\}$$

として定義したい．しかし「...」の部分は直観的な説明としては容認できるが，我々の立場では定義とは言い難い[1]．そこで ω を条件

$$\emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \to S(y) \in x)$$

を満たす最小の集合 x として定義したい：無限公理によって保証される無限集合 X を一つ選び，

$$\omega = \{y \in X : \forall x(\varphi(x) \to y \in x)\}$$

とする．ここで $\varphi(x)$ は $\emptyset \in x \wedge \forall y(y \in x \to S(y) \in x)$ である．このようにすれば，ω は集合であり，$\varphi(x)$ を満たす最小のものになる（もちろん X の取り方に依存しない）．

例 7. 素朴集合論の中で考える．帰納的に $V(0) = \emptyset$, $V(n+1) = \mathcal{P}(V_n)$ として，$M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V(n)$ とすると，構造 $(M, \in)$ は今までの全ての集合論の公理を満たすが，無限公理は満たさない．

1.1.10 基礎の公理（正則性公理）

$$x \neq \emptyset \to \exists y(y \in x \wedge \neg \exists z(z \in x \wedge z \in y)).$$

空でない集合 x には $\in$ に関して極小となる元 $z \in x$ があること，を直観的には意味している．基礎の公理は，それがなくても数学が展開できるので，ある意味で技術的な公理である．しかし，基礎の公理を仮定した方が議論が展開しやすくなるので，通常は集合論の公理として加える．

注意 8. $a \in a$ を満たす集合 a は存在しない：そのような a があったとする．$x = \{a\}$ として，基礎の公理を適用すると，a は x の中で $\in$ に関する極小元なので，$a \in a$ は成立しないはずである（矛盾）．

例 9. $a \in b \in a$ となる集合 a, b は存在しないことを示せ．

1.2 数学的対象と集合

今まで述べた集合論の公理は，直観的に我々が妥当だと感じるものだけを集めたものであり，人によっては少なすぎると思うかも知れない．以下では，通常の数学的対象の存在がこの集合論の公理から保証されることをみる．

[1] $\omega = \{S^n(\emptyset) : n \in \mathbb{N}\}$ とすると，「...」を回避できているように見えるが，$\mathbb{N}$ 自体がまだ定義されていないので，これでは定義できていない．

1.2.1　関係

集合 x, y に対して，x, y だけを元として持つ集合 $\{x, y\}$ の存在は対の公理（＋内包性公理）にによって保証された．この対は順序を持たない対である．では順序対 $\langle x, y\rangle$ はどのように集合として定義したらよいのだろうか．順序対として要請されることは，

$$\langle x, y\rangle = \langle a, b\rangle \quad \leftrightarrow \quad x = a \ \wedge \ y = b \tag{1.1}$$

の成立である．集合 $\langle x, y\rangle$ を以下で定義する：

$$\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

対の公理から，$\langle x, y\rangle$ は集合として存在していることに注意する．

補題 10. 要請された同値性 *(1.1)* が成立する．

証明. $\leftarrow$ は自明なので，$\rightarrow$ を示す．$\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ を仮定する．

Case 1. $x = y$ とする．左辺の集合は $\{\{x\}\}$ となるので，右辺も1点集合でなければならない．よって，$a = b$ であり，右辺は $\{\{a\}\}$ となり，$x = a$ が分かる．さらに4点 x, y, a, b はすべて等しくなる．

Case 2. $x \neq y$ とする．左辺は2点集合で，右辺も2点集合となる．よって $a \neq b$ である．左右の元の比較から，$\{x\} = \{a\}$, $\{x, y\} = \{a, b\}$ を得るが，前半の式からは，$x = a$ を得る．これと，後半の式（および $x \neq y$, $a \neq b$）から，$y = b$ を得る．　□

順序対を使うと集合 A, B の直積集合 $A \times B$ を定義できる：

定義 11.
1. $A \times B = \{\langle a, b\rangle : a \in A, b \in B\}$.
2. $A^2 = A \times A$.
3. $R \subset A \times B$ なる集合 R を A と B の間の2項関係とよぶ．

上では2つの直積しか定義してないが，一般の n 個の集合の直積，A^n，n 項関係なども（帰納的に）定義できる．「R が A と B の間の2項関係である」であるという主張は論理式で記述できることに注意する．

注意 12. $a \in A$, $b \in B$ のとき，$\langle a, b\rangle \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$ に注意する．直積集合 $A \times B$ は正確には，

$$A \times B = \left\{x \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) : \exists a \in A \exists b \in B (x = \langle a, b\rangle)\right\}$$

と定義され，内包性公理から存在が保証される集合である．

1.2.2 関数

直観的な意味で，関数 $f : A \to B$ とそのグラフ $\{\langle a, b\rangle \in A \times B : b = f(a)\}$ が同一視できることを用いて，関数は関係の特別な場合として定義する．したがって関数も集合の一つである．

定義 13. $F \subset A \times B$ が関数であるとは，

$$\forall x \in A \,\exists!\, y \in B(\langle x, y\rangle \in F)$$

となることである．このとき，$F : A \to B$ と書く（明らかにこれは F, A, B を自由変数として持つ論理式である）．

定義 14. $F : A \to B$, $G : B \to C$ とする．このとき合成関数 $G \circ F$ を次の集合として定義する：

$$G \circ F = \{\langle a, c\rangle : \exists b \in B(\langle a, b\rangle \in F \wedge \langle b, c\rangle \in G)\}.$$

注意 15.

1. 合成関数は正確には，

   $$G \circ F = \bigl\{x \in A \times C : \exists a \in A \exists b \in B \exists c \in C\bigl(x = \langle a, c\rangle \wedge \langle a, b\rangle \in F \wedge \langle b, c\rangle \in G\bigr)\bigr\}$$

   と定義され，内包性公理から集合となることが分かる．

2. $G \circ F$ が関数となることは見やすい．

演習問題 16. $F : A \to B$, $G : B \to C$, $H : C \to D$ とする．このとき，結合律 $H \circ (G \circ F) = (H \circ G) \circ F$ を示せ（絵を用いた直観的な議論ではなく，数学的に厳密に示せ）．

演習問題 17. 関数に限らず一般の 2 項関係で合成が定義され，結合律が成立することを確かめよ．

1.3 順序数

直観的には，順序数は整列順序集合[2]の並び方の指標であり，素朴な立場では「整列順序集合の順序型」である．もう少し詳しく説明すると次のようになる．二つの整列順序集合 X, Y が順序同型のとき，$X \sim Y$ と定義する．$\sim$ は整列順序集合全体の上の同値関係になる．このとき，素朴集合論では同値類 $X/\sim$ を（一つの）順序数とよぶ．

しかし整列順序の全体は（大きすぎて）集合にはならない．X と順序同型なものたち全体に限っても集合ではない．したがって，素朴集合論における通常の構成法は厳密な議論には相応しくないので，別の構成法を考えなくてはならない．

基本的な考え方は，$\in$ がその上で整列順序になる集合たちのクラスを上手に定義して，それに属する集合を順序数として定義することである．

[2]整列集合は，空でない部分集合に常に最小元が存在する順序集合のことである．

以下では，集合論の公理を仮定する．

定義 18. 1. x が推移的である ($Trans(x)$) とは，$\forall y \forall z(z \in y \in x \to z \in x)$ となることである．

2. x が順序数である（$Ord(x)$）とは，$Trans(x) \land \forall y \in x(Trans(y))$ となることである．

上の定義を言葉で述べると,「x が推移的とは x が $\in$ に関して推移的なこと」,「x が順序数であるとは，x だけでなくその元もすべて推移的なこと」となる．

例 19. 1. $\emptyset$ は順序数である．0 とかくことがある．

2. $S(\emptyset) = \{\emptyset\}$ は順序数である．

3. $Trans(a) \to Trans(S(a))$ が成立する： $Trans(a)$ を仮定して，$x \in y \in S(a)$ とする．次の二通りの場合がある．(i) $x \in y \in a$ のとき，$Trans(a)$ より，$x \in a \subset S(a)$ を得る．(ii) $x \in y = a$ のとき，自明に $x \in a \subset S(a)$ である．いずれにせよ $x \in S(a)$ となり，$S(a)$ は推移的である．

4. 上のことから，$Ord(a) \to Ord(S(a))$ が成立することも分かる．したがって,（直観的）自然数 n に対して，$S^n(a)$ たちはすべて順序数となる．$S^n(0)$ は自然数 n を集合論の中で表現したものであり，単に n と表すことがある．

5. F を順序数を元として持つ集合（族）とする．このとき $\bigcup F$ は順序数となる：$y \in x \in \bigcup F$ とする．このとき，$\bigcup F$ の定義から，$x \in \alpha \in F$ となる順序数 α が存在する．したがって，α の推移性から $y \in \alpha$ である．よって $y \in \bigcup F$ となる．すなわち $Trans(F)$ となる．F の各元が推移的なのは，F が順序数の集合であるという仮定から明らか．

例 20. ω は順序数である：$\omega' = \{x \in \omega : Ord(x)\}$ は 0 を含み，S で閉じている集合となる．ω はそのような性質を持つ最小の集合なので，$\omega' = \omega$．すなわち，ω の元はすべて（順序数であり）推移的である．同様に $\omega'' = \{x \in \omega : x \subset \omega\}$ を考えると，$\omega'' = \omega$ が示され，ω 自体も推移的なことが分かる．よって ω は順序数である．

補題 21. 順序数の元はすべて順序数である．

証明． $Ord(x)$ を仮定して，$y \in x$ とする．$Ord(x)$ の定義から，y は推移的である．また $z \in y$ とすれば，x の推移性から，$z \in x$ となる．よって x が順序数なることから,（その元）z が推移的なことが分かる．以上から $Ord(y)$ が言える． □

別の言い方をすると，クラス $On = \{x : Ord(x)\}$ (順序数全体) は推移的であると言える．また明らかに On の各元は（順序数なので）推移的である．

注意 22. On は集合ではない： もし On が集合であれば，順序数の条件（$Ord(On)$）を満たすので，$On \in On$ となってしまう．しかしそれは不可能である（基礎の公理に反する）．

順序数を表すために，$\alpha,\ \beta, \ldots$ を用意する．この記法のもとに，例えば $\exists\alpha\varphi(\alpha)$ は，論理式 $\exists x(Ord(x) \wedge \varphi(x))$ の省略形と考える．

補題 23. $\exists\alpha\varphi(\alpha) \to \exists\beta\bigl(\varphi(\beta) \wedge \forall y \in \beta\neg\varphi(y)\bigr)$ が成立する．

証明. $\varphi(\alpha)$ を仮定する．集合 $A = \{x \in \alpha : \varphi(x)\}$ に基礎の公理を用いると，A の中で $\in$ に関して極小な元が存在する（x の元なのでそれは順序数）．$\beta \in \alpha$ をそのような極小元とする．β が求める元であることを示す．極小性から任意の $y \in \beta$ は A に属さない．$y \in \alpha$ は推移性から成立しているので，このことは $\neg\varphi(y)$ を意味する． □

上の補題は，与えられた（妥当な）条件に対して，それを満たす極小の順序数が存在することを意味している．$\varphi(\alpha)$ は α 以外の自由変数を持っていてもよい．

注意 24. 補題 23 の対偶を考えると，（$\psi = \neg\varphi$ として）次の論理式が成り立つのが分かる：

$$\forall\beta\bigl(\forall y \in \beta\psi(y) \to \psi(\beta)\bigr) \ \to\ \forall\alpha\psi(\alpha).$$

この形で表現した補題 23 を超限帰納法とよぶ．

補題 25. $\forall\alpha\forall\beta(\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta \in \alpha)$ が成立する．

証明. 順序数が（順序 $\in$ で）互いに比較できることを意味している．もし補題が成立しなければ，比較できない順序数 α, β がある．補題 23 により，そのような α, β の中で，α を極小にとれる．次に α を固定して，β を極小にとる．β は α と比較できないが，すべての $y \in \beta$ は α と比較できる．いま $\alpha \in y$ とすれば，順序数 β の推移性から，$\alpha \in \beta$ となり，α と β が比較可能になってしまう．$\alpha = y$ としても同じように矛盾が出る．したがって，$y \in \alpha$ である．よって

$$\beta \subset \alpha$$

を得る．比較できないことから，$\beta \subsetneq \alpha$ なので，$\gamma \in \alpha \setminus \beta$ が存在する．α の極小性から，γ は β と比較可能である．3 通りの可能性があるが，何れにせよ矛盾である：(i) $\beta \in \gamma$ のときは，推移性から，$\beta \in \alpha$ となってしまう．(ii) $\beta = \gamma$ のときも同様である．(iii) $\gamma \in \beta$ は，γ のとり方から，起こり得ない． □

上の 3 つの条件で，二つが同時に成り立つことはない．例えば，$\alpha \in \beta \in \alpha$ が成り立てば，$\alpha \in \alpha$ が成り立つが，これは基礎の公理に反する．以上から，順序数全体のクラス On は，（集合ではないが）$\in$ に関して全順序構造になっていることが分かる．

命題 26. 順序数 α は $\in$ に関して整列順序集合である．

証明. α 上で全順序になることは，補題 25 より，明らかである．空でない集合 $X \subset \alpha$ が与えられたとする．このとき，$\varphi(x) :\equiv (x \in X)$ として，補題 23 を考えれば，X の極小元 a が存在する．X は全順序なので，a は X の最小元である． □

注意 27. 順序数 α の始切片[3] は順序数である．

定義 28.

1. α が後継順序数であるとは，$\alpha = S(\beta)$ となる β が存在することである．
2. 後継順序数でない α は，極限順序数とよばれる．

注意 29. α が極限順序数のとき，任意の $\beta \in \alpha$ に対して，$S(\beta) \in \alpha$ となる:$S(\beta)$ も順序数なので，順序数どうしの比較可能性から，(i) $S(\beta) = \alpha$, (ii) $\alpha \in S(\beta)$, (iii) $S(\beta) \in \alpha$ のいずれかが成立する．α が極限なので，(i) は不可能である．(ii) のとき，$\alpha \in \beta$ または $\alpha = \beta$ である．いずれも基礎の公理に反する．したがって (iii) が成立する．

命題 30. 任意の整列順序集合 $(X, <)$ に対して，順序数 α と順序同型 $f : (X, <) \to (\alpha, \in)$ が存在する．また α と f の取り方は一意である．

証明. 最初に α と順序同型 $f : (X, <) \to (\alpha, \in)$ が存在すれば，それはただ一つであることを示す．いま $f' : (X, <) \to (\alpha', \in)$ を異なる順序同型とすれば，$f(a) \neq f'(a)$ となる $a \in X$ が存在する．そのような a で最小のものを選んでおく．a の最小性から，$f(a) = \min\{\beta : \forall x < a(f(x) < \beta)\} = \min\{\beta : \forall x < a(f'(x) < \beta)\} = f'(a)$ となり矛盾である．

したがって，順序数 α と順序同型 $f : (X, <) \to (\alpha, \in)$ の存在を示せばよい．背理法で示す．$(X, <)$ を命題の反例とする．a 未満の元全体を I_a とする:

$$I_a = \{x \in X : x < a\}.$$

必要なら X を I_a の形の始切片で置き換えることにより，すべての I_a で命題が成立していると仮定できる（X が整列順序集合であることを使っている）．

最初に X に最大元 a があったとする．このとき，$X = I_a \cup \{a\}$ となり，仮定により，$f : (I_a, <) \cong (\alpha, \in)$ となる順序数 α と順序同型 f が唯一存在する．このとき $f(a) = S(\alpha)$ として，f を拡大すれば，f は X と順序数 $S(\alpha)$ の間の順序同型となり，X の取り方に反する．

次に X は最大元を持たないとする．$X = \bigcup\{I_a : a \in X\}$ とかけることに注意する．X に対する仮定から，各 $(I_a, <)$ はある（唯一つの）順序数 α_a と順序同型になる．すなわち，順序同型

$$f_a : I_a \to \alpha_a$$

[3] $I \subset \alpha$ は「$y \in x \in I \to y \in I$」が成立するとき，始切片という．一般の順序集合 $(X, <)$ に対しても,「$I \subset X$ が $y < x \in I \to y \in I$」が成立するとき，始切片という．

が存在する．各 I_a に対して，f_a も唯一つであることが容易に分かる．したがって，$a < b$ であれば，$f_a \subset f_b$ となる．このとき関数

$$\bigcup\{f_a : a \in X\} : X \to \bigcup\{\alpha_a : a \in X\}$$

は α と順序数 $\bigcup\{\alpha_a : a \in \alpha\}$ との間の順序同型を与える． □

命題 31 (整列可能性定理). A を集合とする．このとき，ある順序数と A の間に全単射が存在する．

証明. 次の選択関数 g を考える：

$$g : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to A, \quad g(X) \in X.$$

また $\varphi(\alpha)$ を次の論理式とする：

$$\exists f \left(f : \alpha \xrightarrow{1-1} A \wedge \forall x \in \alpha \big(A \neq \{f(y) : y \in x\} \to f(x) = g(A \setminus \{f(y) : y \in x\}) \big) \right).$$

主張 A. $\varphi(\alpha)$ のとき，それを保証する f は唯一つである．

$f_1 \neq f_2$ がともに φ の中の f の条件を満たすとする．順序数は整列集合なので，$f_1(x) \neq f_2(x)$ となる最小の $x \in \alpha$ が存在する．しかし，$f_1(x) = g(A \setminus \{f(y) : y \in x\}) = f_2(x)$ なので，それは不可能である．

α に対して唯一つ存在が保障された f を f_α とかく．このとき，上と全く同じ議論で，$\alpha < \beta$ がともに φ を満たせば，$f_\alpha \subsetneq f_\beta$ となることも分かる．

主張 B. $\exists\alpha\neg\varphi(\alpha)$.

いま $\forall\alpha\varphi(\alpha)$ と仮定して，α の f_α による像を F_α とかく．F_α たちはすべて $\mathcal{P}(A)$ に属するので，それら全体は集合となる．このとき，対応

$$G : \{F_\alpha : \alpha \in On\} \to On, \quad G(F_\alpha) = \alpha$$

が定義される．置換公理により，G の行く先 On は集合になってしまい，矛盾に至る．

$\neg\varphi(\alpha)$ が成り立つ最小の α を α^* とする．φ の定義を考えると，α^* は極限順序数ではない．したがって $\alpha^* = S(\beta^*)$ とかける．関数 $f^* = f_{\beta^*}$ は β^* の A への埋め込みを与えている．それが全射になっていることを示せばよい．全射でなければ，$f^*(\beta^*) = g(A \setminus \{f(y) : y \in \beta^*\})$ として f^* を拡大できる．拡大された f^* は $\varphi(\alpha^*)$ を導く．それは α^* の取り方に矛盾する． □

注意 32. 任意の集合 A に対して，順序数 α と全単射 $f : \alpha \to A$ が存在することが示された．A 上の順序 $<$ を，$a < b \leftrightarrow f^{-1}(a) \in f^{-1}(b)$ で定めることができ，それは整列順序になる．

1.4　順序数上の再帰的定義

順序数上の $\in$ は順序になることが分かったので，以下 $<$ と書くことがある．また $\emptyset$ を 0，$S(\alpha)$ を $\alpha+1$ と書くことがある．

$\forall x(\delta(x) \to \exists! y\varphi(x,y)$ が成立するとき，$x \mapsto y$ なる '関数'G が定義される．G は必ずしも集合にならないので,（δ で定義された）クラス関数とよぶことにする．論理式 $G(x)=y$ は単に論理式 $\delta(x)\wedge\varphi(x,y)$ のことである．G の定義域を集合 A に制限したものを $G|A = \{(a,b) : a \in A \wedge G(a)=b\}$ とかけば，置換公理により，それは集合となる．

命題 33. G を（全集合上で定義された）クラス関数とする．このとき，On 上で定義されたクラス関数 F で，

$$F(\alpha) = G(F|\alpha)$$

を満たすものが唯一つ存在する．

証明. 証明方法は基本的に命題 31 と同じである．論理式 $\psi(x,y)$ を

$$\exists f \exists Y(f : S(x) \to Y \wedge f(x) = y \wedge \forall z \in S(x)(f(z) = G(f|z)))$$

とすれば，$\forall\alpha\exists!y\psi(\alpha,y)$ が成立する．ψ で定義されるクラス関数を F とすればよい．以下では，詳細を述べる．

主張 A. $\forall\alpha\exists! y\,\psi(x,y)$.

$\exists y\psi(\alpha,y)$ が成立すれば，そのような y および f は唯一つである．α に対して決まる f を f_α とかく．いま y が存在しない α が存在したとする．その中で最小の α をとる．$f^* = \bigcup_{\beta<\alpha} f_\beta$ とすれば，それは α 上の関数となり，f^* を $f^*(\alpha) = G(\{f^*(\beta) : \beta \in \alpha\})$ で拡大すれば，$\psi(\alpha)$ が成立することになり，矛盾に至る．

F を ψ で定義されるクラス関数とすれば，$F|S(\alpha) = f_\alpha$ である．よって $F(\alpha) = f_\alpha(\alpha) = G(f_\alpha|\alpha) = G(F|\alpha)$ は成立する． □

上の命題で，クラス関数 G はパラメータを用いて定義されていてもよい．その場合は F も同じパラメータ上で定義されている．

定義 34 (順序数の和と積)**.** 次のように再帰的に定義される：

1. (a) $\alpha + 0 = \alpha$,
   (b) $\alpha + S(\beta_0) = S(\alpha+\beta_0)$,
   (c) $\alpha+\beta = \sup\{\alpha+\gamma : \gamma < \beta\} = \bigcup\{\alpha+\gamma : \gamma<\beta\}$ （β が極限のとき）.
2. (a) $\alpha \cdot 0 = 0$,

(b) $\alpha \cdot S(\beta_0) = (\alpha \cdot \beta_0) + \alpha$,

(c) $\alpha \cdot \beta = \sup\{\alpha \cdot \gamma : \gamma < \beta\}$ （β が極限のとき）

例 35. 和（や積）の定義で行われた再帰的定義は，直観的には確かに一つのクラス関数を定義している．命題 33 を用いれば，厳密に定義することができる：クラス関数 G を次で定義する．

$$G(\alpha, x) = \alpha \cup \bigcup\{S(y) : y \in \mathrm{ran}(x)\}$$

これに対して命題 33 で定義されるクラス関数 $F(\alpha, \beta) = G(\alpha, F|\beta)$ [4] を考える．このとき，$F(\alpha, 0) = G(\alpha, \emptyset) = \alpha$ である．また F が（第 2 変数として）$On \to On$ のクラス関数で単調増加なことを使えば，次が分かる．

$$\begin{aligned} F(\alpha, S(\beta_0)) &= \alpha \cup \bigcup\{S(F(\alpha, \gamma)) : \gamma \le \beta_0\} \\ &= \bigcup\{S(F(\alpha, \gamma)) : \gamma \le \beta_0\} \\ &= S(F(\alpha, \beta_0)). \end{aligned}$$

β が極限のときは，

$$F(\alpha, \beta) = \bigcup\{S(F(\alpha, \delta)) : \delta < \beta\} = \sup\{F(\alpha, \gamma) : \gamma < \beta\}.$$

となり,（$F(\alpha, \beta)$ を $\alpha + \beta$ と略記すれば）和の再帰的定義の式が成立することが分かる．

命題 36. *1.* $\alpha + \beta$ は，集合 $(\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta)$ 上の辞書式順序と順序同型である．

2. $\alpha \cdot \beta$ は，直積集合 $\alpha \times \beta$ 上の逆辞書式順序と同型である．

証明. 1 について示す． β に関する超限帰納法で示す．β 未満での成立を仮定する．

$\beta = \beta_0 + 1$ のとき，$\alpha + \beta = (\alpha + \beta_0) \cup \{\alpha + \beta_0\}$ であり，$\alpha + \beta_0$ は順序 $\in$ で一番最後の元である．また $(\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta) = \big((\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta_0)\big) \cup \{\langle 1, \beta_0 \rangle\}$ であり，辞書式順序 $<$ では $\{\langle 1, \beta_0 \rangle\}$ が一番最後の元である．また超限帰納法の仮定から $(\alpha + \beta_0, \in) \cong ((\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta_0), <)$ である．したがって，$(\alpha + \beta, \in) \cong \big((\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \beta), < \big)$ を得る．

β が極限順序数のときは，各 $\gamma \in \beta$ に対して，f_γ を順序同型 $f_\gamma : \alpha + \gamma \cong (\{0\} \times \alpha) \cup (\{1\} \times \gamma$ とすれば，$\bigcup\{f_\gamma : \gamma \in \beta\}$ が求める順序同型である．

□

例 37. 1. $1 + \omega = \omega$: $1 + \omega = \sup\{1 + n : n \in \omega\} = \sup\{n : n \in \omega\} = \omega$.

2. $\omega + 1 \ne \omega$: $\omega \in S(\omega) = \omega + 1$.

3. $2 \cdot \omega = \omega$: $2 \cdot \omega = \sup\{2 \cdot n : n \in \omega\} = \sup\{n : n \in \omega\} = \omega$.

4. $\omega \cdot 2 \ne \omega$: $\omega \in \omega + 1 \le \sup\{\omega + n : n \in \omega\} = \omega + \omega$.

[4] $F|\beta$ は第 2 変数に関する関数として定義域を β に制限することを意味している．$F(\alpha, *)|\beta$ の意味である．

1.5 基数

定義 38. 1. 集合 A, B の間に全単射が存在するとき，$A \approx B$ とかく．

$$A \approx B \leftrightarrow \exists f(A \xrightarrow[onto]{1\text{-}1} B).$$

明らかに $\approx$ は On 上の同値関係である．

2. 順序数 α が基数である（$Card(\alpha)$）とは，α がその $\approx$-同値類の中で,（順序 $\in$ に関して）最小になっていることである．

$$Card(x) \leftrightarrow Ord(x) \wedge \forall \beta(\beta \approx x \to x \leq \beta).$$

3. 集合 A に対して，$A \approx \kappa$ となる基数を A の濃度とよび，$|A|$ で表す．

注意 39. 整列可能性定理により，$A \approx \alpha$ となる順序数が存在する．そのような中で最小の α は基数となる．したがって，$|A|$ は常に存在する．

基数は $\kappa, \lambda, \dots$ で表す．基数の和と積を定義する．基数は順序数であるが，順序数としての和 $\kappa + \lambda$ と基数としての和 $\kappa + \lambda$ は（一般には）異なる．同じ記号を使うが別物である．

定義 40 (基数の演算)**.** 1. $\kappa + \lambda = |(\{0\} \times \kappa) \cup (\{1\} \times \lambda)|$,

2. $\kappa \cdot \lambda = |\kappa \times \lambda|$.

3. $\kappa^\lambda = |F|$, ただし F は $f : \lambda \to \kappa$ なる関数 f の全体である．

注意 41. $m, n \in \omega$ のとき，$m + n$ は順序数の和として考えても，基数の和と考えても同じである．積も同様である．

次の命題は，素朴集合論での議論と同様に証明できる．

命題 42. κ, λ の一方が無限（ω 以上）ならば，

$$\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}.$$

上の命題と同様に，素朴集合論と同様に証明が行える結果は既知として扱う．

命題 43 (カントール)**.** $\kappa < 2^\kappa$. （$2 = \{0, 1\}$）

証明. 矛盾を導くために，$2^\kappa \leq \kappa$ とする．ことき，$F : 2^\kappa \xrightarrow{1\text{-}1} \kappa$ が存在する．各 $\alpha \in \kappa$ に対して，$f_\alpha \in 2^\kappa$ を次のように定める：$\exists f \in 2^\kappa (F(f) = \alpha)$ となるならば，その（唯一の）f を f_α とし，存在しなければ任意に決める．$g : \kappa \to 2$ を以下で決める（2^κ は $\kappa \to 2$ なる関数の全体と思う）．

$$g(\alpha) = 1 - f_\alpha(\alpha).$$

$g = f_\beta$ となる β が存在するが，$g(\beta) = 1 - f_\beta(\beta) \neq f_\beta(\beta)$ となり，矛盾である． □

定義 44. 1. $\kappa^+ = \min\{\lambda : \kappa < \lambda\}$. κ の次の基数.

2. λ が $\lambda = \kappa^+$ と書かれるとき，後継基数とよばれる．後継基数でない基数は極限基数とよばれる.

3. $\aleph_0 = \omega$, $\aleph_\alpha = \sup\{(\aleph_\beta)^+ : \beta < \alpha\}$. 小さい方から数えて α 番目の無限基数.

4. $cf(\kappa) = \min\{|X| : X \subset \kappa, \kappa = \bigcup X\}$. $cf(\kappa) = \kappa$ が成り立つとき，κ は正則基数とよばれる.

命題 45. *1.* κ^+ は正則である.

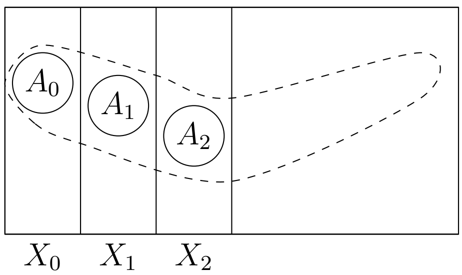
2. $cf(2^\kappa) > \kappa$.

証明. 1. κ^+ が正則でないとする．$\kappa^+ = \bigcup X$ となる $X \subset \kappa^+$ で，濃度が κ（以下）のものが存在する．各 $\alpha \in X \subset \kappa^+$ は濃度が $|\alpha| \le \kappa$ である．したがって，集合 κ^+ は濃度が κ 以下の集合を κ 個集めて被覆可能になる（$\kappa^+ \le \kappa \cdot \kappa = \kappa$ を意味する）．これは矛盾である.

2. $cf(2^\kappa) \le \kappa$ として矛盾を導く．$2^\kappa \approx \mathcal{P}(\kappa)$ に注意する．$cf(2^\kappa) \le \kappa$ より，濃度が 2^κ 未満の P_i $(i < \kappa)$ を次のように選べる.

$$\mathcal{P}(\kappa) = \bigcup\{P_i : i < \kappa\}$$

次に $\kappa = \bigcup\{X_i : i < \kappa\}$, $|X_i| = \kappa$ $(i \in \kappa)$, $X_i \cap X_j = \emptyset$ $(i \ne j)$ となるように κ を分割する．このとき，$|P_i| < 2^\kappa$ および選択公理により，$A_i \subset X_i$ を $A_i \notin \{x \cap X_i : x \in P_i\}$ となるように選べる．このとき $\bigcup\{A_i : i < \kappa\}$ はどの P_i にも属さない．それは矛盾である.



□

同様の議論により，次を示すことができる.

命題 46. $\kappa^{cf(\kappa)} > \kappa$.

証明． $\kappa = \bigcup_{i<cf(\kappa)} \alpha_i$ となるように $\alpha_i < \kappa$ たちを選ぶ．いま $\kappa^{cf(\kappa)} \leq \kappa$ とすれば，全射 $f : \kappa \to \kappa^{cf(\kappa)}$ が存在する．$i < cf(\kappa)$ に対して，$g_i : \alpha_i \to \kappa$ を $g_i(x) = (f(x))_i = [f(x)$ の第 i 項$]$ で定義する（$\kappa^{cf(\kappa)}$ の元を長さ $cf(\kappa)$ の列と同一視している）．各 i に対して，$|\mathrm{ran}(g_i)| \leq |X_i| < \kappa$ より，$\alpha_i \in \kappa \setminus \mathrm{ran}(g_i)$ を選べる．

$$h = (\alpha_0, \alpha_1, \dots)$$

と定義する．f の全射性から，$h = f(i)$ となる i が存在する．そのとき，$\alpha_i = (h)_i = (f(i))_i \in \mathrm{ran}(g_i)$ となるが，それは α_i の取り方に反している． □

第2章　モデル理論の基礎

2.1　構造と同型

L は言語を表す．L-構造は M, N などで表す．記号 $X \in L$ の M での解釈は X^M で表す．

定義 47. M, N を L-構造として，全単射 $\sigma : M \to N$ が同型写像であるとは，次の 3 条件が成立することである：

1. $c \in L$ が定数記号のとき，$\sigma(c^M) = c^N$;
2. $P \in L$ が述語記号のとき，$\sigma(P^M) = P^N$;
3. $F \in L$ が（n 変数）関数記号のとき，

$$\sigma(F^M(a_1, ..., a_n)) = F^N(\sigma(a_1), ..., \sigma(a_n))$$

   が任意の $a_1, ..., a_n \in M$ に対して成立する．

注意 48.

1. 関数記号に対する条件だけが，見かけ上他と異なるように見えるが，n 変数関数記号を $n+1$ 変数述語記号と考えれば，同じ条件になっていることが分かる．
2. $\sigma : M \to N$ が同型写像のとき，逆写像 $\sigma^{-1} : N \to M$ も同型写像である．

注意 49. 全単射 $\sigma : M \to N$ に対して次は同値である：

- F は同型写像である．
- 任意の原子論理式 $\varphi(x_1, ..., x_k)$ と $a_1, ..., a_k \in M$ に対して，

$$M \models \varphi(a_1, ..., a_n) \iff N \models \varphi(\sigma(a_1), ..., \sigma(a_n)).$$

証明は φ の中の関数記号の数に関する帰納法で行えばよい．

例 50.

1. 順序同型の概念は言語 $\{* < *\}$ に関する同型の概念と一致する．
2. 群の同型概念は言語 $\{e, * \cdot *, *^{-1}\}$ に関する同型概念と一致する．

命題 51. $\sigma : M \to N$ を同型写像とする．このとき，任意の論理式 $\varphi(x_1, ..., x_k)$ と $a_1, ..., a_k \in M$ に対して，

$$M \models \varphi(a_1, ..., a_n) \iff N \models \varphi(\sigma(a_1), ..., \sigma(a_n)).$$

証明. φ の構成に関する帰納法（論理記号の数 n）で証明できる：

$n = 0$ のとき：φ は原子論理式なので，注意 49 により成立することが分かる．

$n+1$ のとき：φ はそれより簡単な論理式から論理記号により作られている．他の場合は簡単なので，φ が $\exists y \psi(y, x_1, ..., x_k)$ の場合だけを議論する．任意の $a_1, ..., a_k \in M$ に対して，次が成立する．

$$\begin{aligned} M \models \exists y \psi(y, a_1, ..., a_k) &\Rightarrow M \models \psi(b, a_1, ..., a_k) \\ &\Rightarrow N \models \psi(b, \sigma(a_1), ..., \sigma(a_k)) \cdots \text{ 帰納法の仮定} \\ &\Rightarrow N \models \exists y \psi(y, \sigma(a_1), ..., \sigma(a_k)) \end{aligned}$$

また逆向きは σ^{-1} を考えればよい．よって同値性が成立する． □

定義 52. $\sigma : M \to N$ が同型写像のとき，$\sigma : M \cong N$ とかく．$\sigma : M \cong N$ となる σ が存在するとき，M と N は同型であるといい，$M \cong N$ とかく．

2.2 コンパクト性定理

L は引き続き言語とする．また T は L-閉論理式の集合を表す．完全性定理は，T が整合的である（形式的体系で T から矛盾を導けない）ことと T がモデルを持つことの同値性を主張する．完全性定理の証明（ヘンキン構成法）から，整合性から導かれるモデルの濃度は $|L| + \aleph_0$ 以下である．

完全性定理の系として次の定理が得られる：

定理 53 (コンパクト性定理). T を閉論理式の集合とする．このとき次は同値である：

1. T はモデルを持つ；
2. T の任意の有限部分集合 T_0 はモデルを持つ．

証明. $1 \Rightarrow 2$ は自明である．$2 \Rightarrow 1$ の対偶を示す．T がモデルを持たないとする．このとき，完全性定理により，T から（論理の形式的体系を用いて）矛盾が証明できる．証明の長さは有限なので，証明に使われる T の論理式は有限個しかない．その使われる部分を $T_0 \subset T$ とすれば，T_0 から矛盾が出る．よって T_0 はモデルを持ち得ない． □

定義 54. 任意の閉論理式 φ に対して，

$$M \models \varphi \iff N \models \varphi$$

が成立するとき，$M \equiv N$ とかき，M と N は基本的に同値であるという．

注意 55. $M \cong N$ ならば $M \equiv N$ である： $\sigma : M \cong N$ とする．命題 51 を閉論理式 φ に適用すれば，

$$M \models \varphi \iff N \models \varphi$$

が成立する．φ の取り方は任意なので，$M \equiv N$ を得る．

コンパクト性定理を用いると逆の主張（$M \equiv N \Rightarrow M \cong N$）は言えないことが次の例から分かる．

例 56. M を無限の L-構造として，その濃度を κ とする．κ^+ 個の定数記号 $\{c_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ を用意して，次の閉論理式の集合 T を考える：

$$T = \{\varphi : M \models \varphi\} \cup \{c_\alpha \neq c_\beta : \alpha \neq \beta\}.$$

$\{\varphi : M \models \varphi\}$ は M で成立するすべての L-閉論理式の集合であり，$\{c_\alpha \neq c_\beta : \alpha \neq \beta\}$ は定数記号たち（の解釈）はすべて異なることを主張している．T の有限部分 T_0 が与えられたとき，それは適当な有限集合 $I \subset \kappa^+$ により，次の形の集合としてよい．

$$T_0 = \{\varphi_1, ..., \varphi_m\} \cup \{c_\alpha \neq c_\beta : \alpha, \beta \in I, \alpha \neq \beta\}.$$

M の上では，当然ながら，前半部分 $\{\varphi_1, ..., \varphi_m\}$ が成立する．また後半部分 $\{c_\alpha \neq c_\beta : \alpha, \beta \in I, \alpha \neq \beta\}$ は c_α $(\alpha \in I)$ の解釈を M の中の異なる元としてとれば成立する（I が有限で，M が無限なので，そのような解釈をとれる）．したがって，コンパクト性定理により，T のモデル N が存在する．$T \supset \{\varphi : M \models \varphi\}$ であるから，$N \equiv M$ が分かる．しかし $T \supset \{c_\alpha \neq c_\beta : \alpha, \beta \in I, \alpha \neq \beta\}$ であるから，N の濃度は κ^+ 以上である．M と N の濃度が異なるので，$M \not\cong N$ である．

定理 57 (レーベンハイム - スコーレムの定理). M を無限の L-構造とする．また $\kappa \geq |L|$ を任意の無限基数とする．このとき，濃度 κ の無限 L-構造 N で

$$N \equiv M$$

となるものが存在する．

証明. 基本的に証明は例 56 と同様である．

□

2.3　公理の完全性

L-閉論理式の集合 T がモデルを持つとする．T の二つのモデル M, N が常に $M \equiv N$ となるとき，T は完全であるという．任意の閉論理式 φ に対して，$T \models \varphi$ か $T \models \neg\varphi$ のいずれかが言えることを意味する．完全性定理の「完全」とは意味が異なる．

例 58. 1. 群の公理は完全でない：例えばアーベル群であることを主張する論理式を φ とすれば，$G \models \varphi$ なるモデル（すなわちアーベル群）も $G \models \neg\varphi$ となるモデル（すなわちアーベル群でない群）も存在する．

2. 体 K 上のベクトル空間の公理は完全である．これを示すためには準備が必要である．

命題 59. 任意の $M, N \models T$ に対して，次を成り立たせる M^*, N^* が存在すると仮定する．

$$M^* \equiv M,\ N^* \equiv N,\ M^* \cong N^*$$

このとき，T は完全である．

証明． $M, N \models T$ が与えられたとき，上の M^*, N^* をとる．$M^* \cong N^*$ より，$M^* \equiv N^*$ である．したがって，$M \equiv M^* \equiv N^* \equiv N$ となる．$\equiv$ の推移性により，$M \equiv N$ が成り立つ．よって T は完全である． □

例 60. 0 を定数記号，S を 1 変数関数記号として，T を以下の $\{0, S\}$-閉論理式たちの集合とする：

- $\forall x, y(S(x) = S(y) \to x = y)$：$S$ は単射である．
- $\forall x(S(x) \neq 0)$：0 は S の値域に入らない．
- $\forall y(y \neq 0 \to \exists x(S(x) = y)$：0 以外の元は $S(x)$ の形でかける．
- $\neg\exists x(S^n(x) = x)$ $(n = 1, 2, ...)$：S によるループはない．

T の一番標準的なモデルは，$\mathbb{N}$ とその上の関数 $S(m) = m + 1$ の組である．T が完全であることは次のように示される．M, N を T の二つのモデルとする（ループがないことから両方とも無限モデルである）．$\kappa > |M| + |N|$ とすると，コンパクト性定理（と完全性定理の証明）により，$M^* \equiv M$, $N^* \equiv N$, $|M^*| = |N^*| = \kappa$ なるモデルが存在する．次を示せば，命題 59 により，T が完全なことが分かる．

主張 A. $M^* \cong N^*$.

M^* は標準的な $(\mathbb{N}, S)$ と同型な部分を必ず含む．それは 0^{M^*} から始まり，S^{M^*} で閉じさせた部分集合である．M^* の標準部分以外は Z と同型なコンポーネントたちからなる．すなわち一つの元から始まり S と S^{-1} で閉じた（可算）部分集合である．濃度の計算から，それらのコンポーネントは κ 個ある．N^* も同じ構造を持つ．したがって，二つは同型になる．

例 61. K を無限体として K 上のベクトル空間 $V \neq \{0\}$ の公理を考える．言語としては次のものを考える：

1. 加法群としての V を表現するための記号 $0, *+*, -*$;

2. 各 $a \in K$ に対して，1 変数関数記号 f_a を用意する．

これらを用いて K 上のベクトル空間の公理 T_K を表現できる．T_K が完全になることを示す．$M, N \models T_K$ とする（M, N は濃度 $|K|$ 以上の無限モデルである）．$\kappa = (|M|+|N|)^+$ とする．コンパクト性定理により，次のような $M^*, N^* \models T_K$ が存在する：

$$M^* \equiv M,\ N^* \equiv N,\ |M^*| = |N^*| = \kappa.$$

M^* と N^* の次元は κ である．ベクトル空間は次元によって決定されるので，$M^* \cong N^*$ である．命題 59 によって T_K が完全なことが分かる．

2.4 定義可能集合

定義 62. M を L-構造として，$A \subset M^n$ とする．L-論理式 $\varphi(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m)$ と $b_1, ..., b_m \in M$ を使って，

$$A = \{\langle a_1, ..., a_n\rangle \in M^n : M \models \varphi(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m)\}$$

とかけるとき，A を（1 階）定義可能集合という．また A はパラメータを持つ論理式 $\varphi(x_1, ..., x_n, b_1, ..., b_m)$ で定義されるという．A を定義する論理式のパラメータ $b_1, ..., b_m$ が B に含まれるとき，A は B 上で定義可能という．

定義可能集合は，構造の中で論理式を用いて具体的に記述されている集合である．

注意 63. 無限構造 M の部分集合は $2^{|M|}$ だけ存在する．一方定義可能集合は論理式とパラメータのとり方だけしか存在しない．例えば L が可算のときは，$|M|$ 個しか存在しない．

例 64.

1. 有限集合 $A = \{a_1, ..., a_m\} \subset M$ は定義可能集合である：実際 A は論理式 $x = a_1 \vee \cdots \vee x = a_m$ で定義される．

2. 実数体 $\mathbb{R}$ において，$y = x^2$ のグラフは定義可能集合である．$y = ax^2 + bx + c$ のグラフは $\{a, b, c\}$ 上で定義可能である．

命題 65. $A \subset M^n$ を $B \subset M$ 上で定義可能集合とする．このとき，B を固定する任意の自己同型写像 $\sigma : M \to M$ に対して，A は σ-不変である．すなわち $\sigma(A) = A$ が成立する．

証明. 簡単のために $n=1$ として，A を定義する論理式を $\varphi(x,b_1,...,b_m)$ とする．ここで $b_1,...,b_m \in B$ である．任意の $a \in M$ に対して次が成立する：

$$\begin{aligned} a \in A \quad &\Rightarrow \quad M \models \varphi(a,b_1,...,b_m) \\ &\Rightarrow \quad M \models \varphi(\sigma(a),\sigma(b_1),...,\sigma(b_m)) \\ &\Rightarrow \quad M \models \varphi(\sigma(a),b_1,...,b_m) \qquad (\because \sigma|B = id_B) \\ &\Rightarrow \quad \sigma(a) \in A. \end{aligned}$$

σ^{-1} も自己同型なので，両側向き矢印が成立する．よって $\sigma(A)=A$ である．　□

注意 66. $\mathbb{N}$ 上で，1変数関数記号 S の解釈を $a \mapsto a+1$ として，$\{S\}$-構造 M を作る．M の自己同型は，恒等写像しかない．したがって，すべての集合 $A \subset M$ は自己同型で不変である．しかし，M の定義可能でない部分集合は存在する．したがって，命題65 の逆は成立しない．

例 67. $(\mathbb{Q},<) \subset (\mathbb{R},<)$ を考える．$<$ は通常の順序である．無理数 r に対して，$A=\{a \in \mathbb{R} : \mathbb{R} \models a<r\}$ は，その形から $(\mathbb{R},<)$ の定義可能集合になることが分かる．しかし $A \cap \mathbb{Q}$ は $(\mathbb{Q},<)$ の定義可能集合にはならない．

このことは以下のように分かる．$A \cap \mathbb{Q}$ が $(\mathbb{Q},<)$ において，論理式 $\varphi(x,b_1,...,b_m,d_1,...,d_n)$ で定義できたとする．ここで（必要ならパラメータを増やして）

$$b_1 < \cdots < b_m < r < d_1 < \cdots < d_n$$

としてよい．$s,t \in \mathbb{Q}$ を $b_m < s < r < t < d_1$ となるようにとる．$\mathbb{Q}$ の自己同型 σ で以下の3条件を満たすものを容易に構成できる：

1. σ は b_m 以下の元を固定する．
2. σ は d_1 以上の元を固定する．
3. $\sigma(s)=t$.

このとき，$s \in A \cap \mathbb{Q}$ であるが，$\sigma(s)=t \notin A \cap \mathbb{Q}$ である．したがって，σ は $b_1,...,b_m,d_1,...,d_n$ を固定する自己同型であるが，$A \cap \mathbb{Q}$ は σ-不変でない．よって $b_1,...,b_m,d_1,...,d_n$ 上定義可能ではない．（矛盾）

例 68. $(\mathbb{N},<,S)$ において，偶数全体の集合は定義可能集合でない．すなわち偶数という概念は順序 $<$ と $S : a \mapsto a+1$ だけを使ったのでは（論理式で）表現することはできない．このことを示そう．$(\mathbb{N},<)$ は恒等写像以外の自己同型写像を持たないので，命題65 を直接的に利用することはできない．そこで $(\mathbb{N},<,S)$ の拡大を利用する．

今偶数全体の集合 $E \subset \mathbb{N}$ が $(\mathbb{N},<)$ で定義可能だとして矛盾を導くことにする．E が論理式 $\varphi(x)$ で定義されたとする．コンパクト性を使うと濃度が $\aleph_1$ のモデル $\mathbb{N}^* \equiv N$ が存在する．$\mathbb{N}^*$ は $\mathbb{N}$ のコピーを含むので，$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}^*$ としてよい．

主張 A. $\mathbb{N}^* \models \forall x[\varphi(x) \to \neg\varphi(S(x)]$.

上の論理式は偶数 x の直後の元は偶数でないことを意味している．$\mathbb{N}$ では当然成立しているので，$\mathbb{N}^* \equiv \mathbb{N}$ においても成立する．

$\mathbb{N}^*$ において $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ を $\sigma|\mathbb{N} = id_{\mathbb{N}}$, $\sigma(a) = S(a)$ $(a \notin \mathbb{N})$ で定義する．

主張 B. σ は自己同型写像になる．

σ が全単射になること，順序を保存していることは明らかである．$\sigma(S(a)) = S(\sigma(a))$ については以下による：

1. $a \in \mathbb{N}$ のときは，$\sigma(a) = a$ より明らか．

2. $a \notin \mathbb{N}$ のときは，$\sigma(S(a)) = S(S(a)) = S(\sigma(a))$ より成立する．

主張 A,B は矛盾する．実際，$\mathbb{N}^*$ で φ によって定義される部分集合が σ-不変でないことを意味している．

2.5　応用例

2.5.1　４色定理と無限地図

平面内に書かれた有限個の国を持つ地図は，４色を用いて隣国が同じ色にならないように塗り分けられる（ Kenneth Appel and Wolfgang Haken）．実はこの４色定理は無限個の国を持つ地図でも成立する．このことはコンパクト性定理を使うと簡単に分かる．

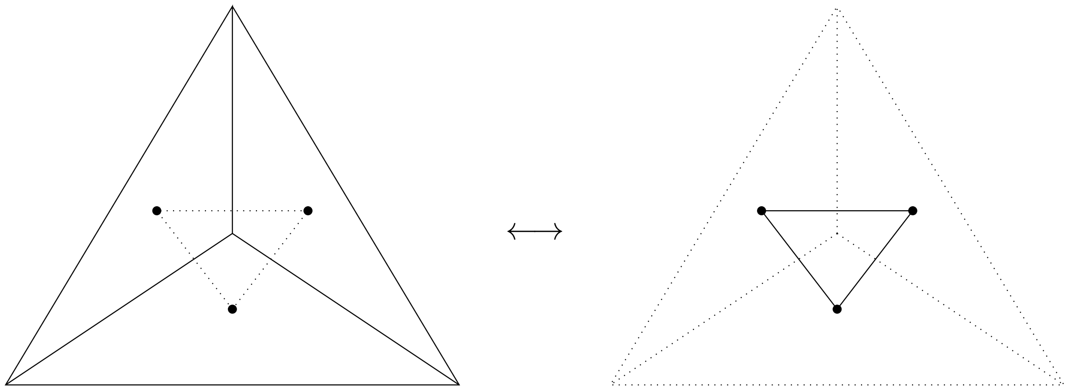
数学的に厳密に述べるために，平面グラフの概念を用いる．R を 2 変数述語記号とする．

定義 69. $\{R\}$-構造 G がグラフであるとは，次の 2 条件が満たされることである：

1. R は対称である．$\forall x \forall y(R(x,y) \to R(y,x))$.

2. R は非反射的である．$\forall x \neg R(x,x)$.

G の各元はグラフの頂点を表し，$R(x,y)$ が成立することは，頂点 x, y の間に辺があることを意味している．平面内に辺が交わることなくかけるグラフを平面グラフという．国を頂点に，境界を辺に対応させることで，平面地図と平面グラフは互いに対応する．地図の国の色づけは，グラフに対しては，頂点の色づけに対応する．



今無限個の国を持つ地図が与えられたとする．上の手法を用いることにより，無限個の頂点を持つ平面グラフ (G, R^G) を対応させる．平面グラフの頂点を，４色で塗り分けし，間に辺がある 2 頂点が常に別の色になっていれば目標は達成する．

各 $v \in G$ に対して，定数記号 c_v を用意する．また色分けを表すために C_i $(i = 0, 1, 2, 3)$ を新たな 1 変数述語記号とする．T を次の論理式の集合とする：

1. $\{c_v \neq c_w : v, w \in G,\ v \neq w\}$
2. $\{R(c_v, c_w) : v, w \in G,\ G \models R(v, w)\}$
3. $\{\neg R(c_v, c_w) : v, w \in G,\ G \models \neg R(v, w)\}$
4. $\forall x \bigvee_{i \leq 3} C_i(x)$
5. $\bigwedge_{i \neq j} \neg \exists x (C_i(x) \wedge C_j(x))$
6. $\forall x \forall y (R(x, y) \to \bigwedge_{i \leq 3} \neg (C_i(x) \wedge C_i(y)))$

1,2,3 により，グラフ G の構造を書ききっている．また 4,5 により 4 色で色づけが行われいることを表している．5 は辺の両端の頂点は別の色になっていることを表している．

T がモデルを持つことを示せば十分である．コンパクト性定理により，T の各有限部分がモデルを持つことを示せばよい．しかし，それは有限地図 (有限グラフ) に対する 4 色定理から明らかである．

2.5.2　順序集合

定理 70. $(A, <)$ を順序集合とする．このとき，$<$ を拡大した A 上の全順序 $<^*$ が存在する．

注意 71. A 上の 2 項関係 $<^*$ で，条件 (i) $< \subset <^*$，(ii) $(A, <^*)$ は全順序集合，を満たすものが存在するという意味である．

定理 *70* の証明. ステップ１：A が有限の場合に $n = |A|$ に関する帰納法で証明する.

$n = 1$ の場合は自明である．$n + 1$ のとき，A の極大元 a をとる．$A \setminus \{a\}$ に帰納法の仮定を用いると，その上の順序を拡大して，全順序にできる．a を $A \setminus \{a\}$ のどの元よりも大きいと定義すれば，A 上の全順序 $<^*$ が得られる．

ステップ２：無限の場合.

各 $a \in A$ に対して，定数記号 c_a を用意する．また 2 変数述語記号 $<^*$ を用意して，次の条件を表す論理式の集合 T を考える：

1. $\{c_a \neq c_b : a, b \in A,\ a \neq b\}$
2. $\{c_a <^* c_b : A \models a < b\}$
3. $<^*$ は全順序である．

各有限部分は，ステップ 1 によりモデルを持つ．したがって，コンパクト性により T 全体がモデル M を持つ．$a \in A$ と ${c_a}^M$ を同一視すれば，集合として $A \subset M$ である．このとき $<^*$ の解釈（の A への制限）が求める全順序になっている． □