E 733

SOLUTIO FACILIS PROBLEMATIS,

QUO QUAERITUR SPHAERA,

QUAE DATAS QUATUOR SPHAERAS UTCUNQUE DISPOSITAS CONTINGAT.

AUCTORE

L. EULERO.

Conventui exhibita die 15 Nov. 1779.

I. Quomodocunque quatuor sphaerae datae fuerint dispositae, ternarum centra semper in idem planum incident. Sint igitur puncta A, B, C, in plano tabulae sita, centra trium sphaerarum propositarum, quartae autem centrum D in sublimi sit positum, unde ad tria puncta priora ducantur rectae DA, DB et DC, quae cum sint datae, vocentur $DA = A$; $DB = B$ et $DC = C$. Praeterea vero vocentur anguli, circa verticem C siti, $ADB = c$, $ADC = b$, et $BDC = a$, atque his sex quantitatibus positio quatuor centrorum A, B, C, D penitus determinatur. Tab. I. Fig. 3.

II. Porro vero, quod magnitudinem harum sphaerarum attinet, sit radius sphaerae $A = \mathfrak{a}$, sphaerae $B = \mathfrak{b}$, sphaerae $C = \mathfrak{c}$, ac denique sphaerae D radius $= \mathfrak{d}$; sicque omnino habebimus decem quantitates cognitas, quas necessario in computum ingredi oportet; unde mirum non foret, si solutio hujus problematis ad formulas maxime complexas perduceret. Interim tamen operam dabo, ut universus calculus satis planus et perspicuus reddatur.

III. Contemplemur nunc sphaeram quaesitam, quae omnes istas quatuor sphaeras simul contingat, quod cum plurimis modis fieri possit, calculum hic praecipue ad eum casum accommodabo, quo quatuor nostrae sphaerae omnes a quinta intus tangantur, quippe ex quo casu transitus ad omnes alios evadit facilis, dum radiorum a, b, c, d, alii positive, alii negative quomodocunque accipiantur. Sit igitur O centrum hujus sphaerae quaesitae, cujus radius vocetur $= x$, hincque ad quatuor centra data eductis rectis OA, OB, OC, OD, evidens est fore $OA = x + \mathfrak{a}$; $OB = x + \mathfrak{b}$; $OC = x + \mathfrak{c}$ et $OD = x + \mathfrak{d}$.

IV. Quo autem sequentem calculum facilius instituere liceat, loco radii x introducamus distantiam $OD = z$, ita ut sit $x = z - \mathfrak{d}$; unde si brevitatis gratia ponamus $\mathfrak{a} - \mathfrak{d} = f$; $\mathfrak{b} - \mathfrak{d} = g$; $\mathfrak{c} - \mathfrak{d} = h$, erit $OA = z + f$; $OB = z + g$; $OC = z + h$. His factis denominationibus consideremus primo triangulum ADO, cujus latera sint $DA = A$; $OD = z$; $OA = z + f$, unde colligitur

$$\cos. ADO = \frac{A^2 + z^2 - (z+f)^2}{2Az} = \frac{A^2 - ff - 2fz}{2Az}$$

unde si vocemus angulum ADO $= \alpha$, et brevitatis gratia $\frac{AA - ff}{2} = F$, erit cos. $\alpha = \frac{F - fz}{Az} = \frac{F}{Az} - \frac{f}{A}$.

V. Simili modo, si pro triangulo BDO vocemus angulum BDO $= \beta$, faciamusque $\frac{BB - gg}{2} = G$, erit cos. $\beta = \frac{G - gz}{Bz} = \frac{G}{Bz} - \frac{g}{B}$. Denique pro triangulo CDO, posito angulo CDO $= \gamma$ et $\frac{C^2 - hh}{2} = H$, erit cos. $\gamma = \frac{H}{Cz} - \frac{h}{C}$, qui terni anguli α, β, γ, quia involvunt incognitam z; ipsi utique etiam erunt incogniti; qui autem, simulac littera z fuerit eruta, innotescent, simulque ipsam positionem puncti O determinabunt, quibus inventis totum problema erit perfecte solutum. Quo autem istos angulos α, β, γ facilius definire queamus, totam investigationem ad trigonometriam sphaericam traducamus. Concipiatur scilicet punctum D in centro sphaerae, cujus radius sit $= 1$; constitutum, unde rectae DA, DB, DC eductae superficiem sphaerae in punctis A, B, C trajiciant, ut hoc modo obtineatur triangulum sphaericum ABC, cujus latus AB erit mensura anguli ad centrum ADB, quem vocavimus $= c$; similique modo erit latus AC $= b$, quia mensura est anguli ADC, denique tertium latus BC erit $= a$, quia mensura est anguli BDC, sicque tria latera hujus trianguli sphaerici erunt cognita, unde etiam anguli hujus trianguli per praecepta cognita innotescent. Tab. I. Fig. 4.

VI. Nunc porro recta DO, ex centro educta, trajiciat superficiem sphaericam in puncto O, unde ad angulos A, B, C ductis arcubus OA, OB, OC, ii mensurabunt angulos ad centrum ADO, BDO, et CDO; quamobrem habebimus arcum $OA = \alpha$, $OB = \beta$ et $OC = \gamma$; ubi meminisse oportet hos tres arcus, α, β, γ unicam incognitam z involvere, unde unica aequatio, inter hos arcus inventa, totum negotium conficiet.

VII. Consideremus hic angulum ACB, quem vocemus $= \zeta$, eritque ex sphaericis $\cos. q = \frac{\cos. c - \cos. a \cos. b}{\sin. a \sin. b}$. Hic ergo angulus constabit duabus partibus $ACO = m$ et $BCO = n$, ita ut sit $\zeta = m + n$. His stabilitis ex triangulo sphaerico ACO erit $\cos. m = \frac{\cos. \alpha - \cos. b \cos. \gamma}{\sin. b \sin. \gamma}$ et ex triangulo BCO habebitur $\cos. n = \frac{\cos. \beta - \cos. a \cos. \gamma}{\sin. a \sin. \gamma}$. Quocirca, cum sit $m + n = \zeta$, aequatio hinc deduci poterit inter incognitas α, β, γ, quae cum per unicam z definiantur, orietur aequatio, ex qua valorem ipsius z deducere licebit.

VIII. Cum igitur sit $\zeta = m + n$, erit

$$\cos. \zeta = \cos. m \cos. n - \sin. m \sin. n, \text{ tum vero}$$

$$\sin. \zeta = \sin. m \cos. n + \cos. m \sin. n.$$

Hinc sumto quadrato erit

$$\sin. \zeta^2 = \sin. m^2 \cos. n^2 + \cos. m^2 \sin. n^2 + 2 \sin. m \sin. n \cos. m \cos. n.$$

Jam quia ex priore aequatione est

$$\sin. m \sin. n = \cos. m \cos. n - \cos. \zeta$$

hinc prodibit:

$$\sin.\zeta^2 - \sin.m^2\cos.n^2 + \cos.m^2\sin.n^2 + 2\cos.m^2\cos.n^2$$
$$= 2\cos.m\cos.n\cos.\zeta.$$

Quodsi jam hic loco $\sin.m^2$ et $\sin.n^2$ substituamus valores $1-\cos.m^2$ et $1-\cos.n^2$, orietur sequens aequatio:

$$\sin.\zeta^2 = \cos.m^2 + \cos.n^2 - 2\cos.m\cos.n\cos.\zeta.$$

IX. Substituamus nunc in hac postrema aequatione loco $\cos.m$ et $\cos.n$ valores ante inventos, prodibit

$$\sin.\zeta^2 = \frac{\cos.\alpha^2 + \cos.\gamma^2\cos.b^2 - 2\cos.\alpha\cos.\gamma\cos.b}{\sin.\gamma^2\sin.b^2}$$
$$+ \frac{\cos.\beta^2 + \cos.\gamma^2\cos.a^2 - 2\cos.\beta\cos.\gamma\cos.a}{\sin.\gamma^2\sin.a^2}$$
$$- \frac{2\cos.\alpha\cos.\beta\cos.\zeta + 2\cos.\gamma\cos.\zeta(\cos.\alpha\cos.a + \cos.\beta\cos.b) - 2\cos.\gamma^2\cos.a\cos.b}{\sin.\gamma^2\sin.a\sin.b}.$$

Haec aequatio, ut fractiones tollantur, multiplicetur per $\sin.\gamma^2\sin.a^2\sin.b^2$, et si loco $\sin.\gamma^2$ scribatur $1-\cos.\gamma^2$; perveniemus ad sequentem aequationem:

$$\sin.a^2\sin.b^2\sin.\zeta^2 = \cos.\gamma^2\sin.a^2\sin.b^2\sin.\zeta^2 + \cos.\alpha^2\sin.a^2$$
$$+ \cos.\gamma^2\sin.a^2\cos.b^2 - 2\cos.\alpha\cos.\gamma\sin.a^2\cos.b$$
$$+ \cos.\beta^2\sin.b^2 + \cos.\gamma^2\cos.a^2\sin.b^2$$
$$- 2\cos.\beta\cos.\gamma\cos.a\sin.b^2 - 2\cos.\alpha\cos.\beta\cos.\zeta\sin.a\sin.b$$
$$+ 2\cos.\gamma\cos.\zeta\sin.a\sin.b(\cos.\alpha\cos.a + \cos.\beta\cos.b)$$
$$- 2\cos.\gamma^2\cos.\zeta\cos.a\cos.b\sin.a\sin.b.$$

X. In hac aequatione membrum sinistrum penitus est cognitum; at vero in membro dextro cosinus angulorum α, β, γ ubique duas obtinent dimensiones, deinde occurrunt producta ex binis cosinibus, unde has formas seorsim evolvamus. Ac primo quidem termini $\cos.\ \alpha^2$ coëfficiens erit $\sin.\ a^2$, termini $\cos.\ \beta^2$ coëfficiens erit $\sin.\ b^2$, ac termini $\cos.\ \gamma^2$ coëfficiens erit

$$\sin.\ a^2 \sin.\ b^2 \sin.\ \zeta^2 + \sin.\ a^2 \cos.\ b^2 + \cos.\ a^2 \sin.\ b^2$$
$$- 2 \cos.\ \zeta \cos.\ a \cos.\ b \sin.\ a \sin.\ b.$$

Ut nunc istam formulam reducamus, observemus primo esse $\cos.\ \zeta = \frac{\cos.\ c - \cos.\ a \cos.\ b}{\sin.\ a \sin.\ b}$, unde postremum membrum abit in

$$- 2 \cos.\ a \cos.\ b \cos.\ c + 2 \cos.\ a^2 \cos.\ b^2,$$

at vero primum membrum, ob

$$\cos.\ \zeta^2 = \frac{\cos.\ c^2 - 2 \cos.\ a \cos.\ b \cos.\ c + \cos.\ a^2 \cos.\ b^2}{\sin.\ a^2 \sin.\ b^2} \text{ et}$$
$$\sin.\ \zeta^2 = \frac{\sin.\ a^2 \sin.\ b^2 - \cos.\ c^2 + 2 \cos.\ a \cos.\ b \cos.\ c - \cos.\ a^2 \cos.\ b^2}{\sin.\ a^2 \sin.\ b^2}$$

obtinet hanc formam:

$$\sin.\ a^2 \sin.\ b^2 - \cos.\ c^2 + 2 \cos.\ a \cos.\ b \cos.\ c - \cos.\ a^2 \cos.\ b^2.$$

XI. Omnibus igitur quatuor partibus collectis termini $\cos.\ \gamma^2$ coëfficiens erit $\sin.\ c^2$; deinde coëfficiens termini $2 \cos.\ \alpha \cos.\ \beta$ erit $+ \cos.\ a \cos.\ b + \cos.\ c$; tum vero erit termini $2 \cos.\ \alpha \cos.\ \gamma$ coëfficiens $= \cos.\ a \cos.\ c - \cos.\ b$; eodemque modo erit termini $2 \cos.\ \beta \cos.\ \gamma$ coëfficiens $= \cos.\ b \cos.\ c - \cos.\ a$; denique pro membro sinistro habemus

$$\sin.\ a^2 \sin.\ b^2 \sin.\ \zeta^2 = \sin.\ a^2 \sin.\ b^2 - \cos.\ c^2 + 2 \cos.\ a \cos.\ b \cos.\ c$$
$$- \cos.\ a^2 \cos.\ b^2, \text{ sive } \sin.\ a^2 \sin.\ b^2 \sin.\ \zeta^2 = 1 - \cos.\ a^2$$
$$- \cos.\ b^2 - \cos.\ c^2 + 2 \cos.\ a \cos.\ b \cos.\ c.$$

XII. Colligimus igitur omnes has partes, atque impetrabimus sequentem aequationem:

$$1 - \cos. a^2 - \cos. b^2 - \cos. c^2 + 2 \cos. a \cos. b \cos. c$$
$$= \cos. \alpha^2 \sin. a^2 + 2 \cos. \beta\ \text{coa.}\ \gamma (\cos. b \cos. c - \cos. a)$$
$$+ \cos. \beta^2 \sin. b^2 + 2 \cos. \alpha \cos. \gamma (\cos. a \cos. c - \cos. b)$$
$$+ \cos. \gamma^2 \sin. c^2 + 2 \cos. \beta \cos. \alpha (\cos. a \cos. b - \cos. c)$$

ubi ternae litterae a, b, c et α, β, γ aequaliter ingrediuntur, quod manifestum est criterium veritatis.

XIII. Nihil aliud jam superest, nisi ut loco cos. α, cos. β et cos. γ valores supra assignati substituantur, qui sunt cos. $\alpha = \frac{F}{Az} - \frac{f}{A}$; cos. $\beta = \frac{G}{Bz} - \frac{g}{B}$ et cos. $\gamma = \frac{H}{Cz} - \frac{h}{C}$, quo facto aequatio nostra unicam tantum continebit quantitatem incognitam z, qua inventa primo statim innotescet radius sphaerae quaesitae, qui est $x = z - \mathfrak{d}$. Deinde innotescunt etiam anguli α, β, γ, quibus positio centri sphaerae quaesitae determinatur.

XIV. Hinc etiam facile perspicitur aequationem, pro incognita z definienda, tantum fore quadraticam. Quod quo clarius appareat, ponamus $\frac{1}{z} = v$, ut cos. $\alpha = \frac{Fv - f}{A}$, cos. $\beta = \frac{Gv - g}{B}$, cos. $\gamma = \frac{Hv - h}{C}$. Quare si hi valores substituantur, evidens est prodituram esse aequationem hujus formae $Lvv + 2Mv + N = o$, quae ergo binas continet radices, quae sunt $v = \frac{-M \pm \sqrt{M^2 - LN}}{L}$, in qua si fuerit $LN > M^2$, signum id erit nullam dari sphaeram quatuor datas tangentem. Sin autem fuerit $M^2 > LN$, duo prodibunt valores pro v, ideoque etiam pro z, quorum autem positivus tantum proprie pro casu proposito valebit, negativus vero valor pertinebit ad casum, ubi radii sphaerarum $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, ideoque etiam litterae f, g, et h negative accipiuntur, quemadmodum olim in dissertatione, de circulo tres datos tangente, est observatum. Scilicet si radix positiva casum respiciat, quo datae sphaerae intus tanguntur, radix negativa pertinebit ad casum, quo eaedem sphaerae extus tanguntur.

Alia solutio ejusdem problematis.

XV. Cum in solutione modo data radius sphaerae inveniendae, sive quantitas z, sive etiam v, pro incognita erat assumta, alia dari poterit solutio, qua positio arcus CO quaeritur. Quemadmodum scilicet angulus C in duas partes sit dissecandus inquirendum est. Hunc in finem, quoniam hunc angulum ACB posuimus $= \zeta$, statuamus angulum ACO $= \frac{\zeta + \Phi}{2}$, eritque altera pars BCO $= \frac{\zeta - \Phi}{2}$, et nunc totum negotium eo redibit, ut angulus Φ investigetur, qui ergo nobis erit incognita loco praecedentis z. In calculum ergo introducenda erit ex triangulo ACO formula $\cos. \frac{\zeta + \Phi}{2} = \frac{\cos. \alpha - \cos. \gamma \cos. b}{\sin. \gamma \sin. b}$, similique modo ex triangulo BCO erit

Tab. I. Fig. 4.

$$\cos. \frac{\zeta - \Phi}{2} = \frac{\cos. \beta - \cos. \gamma \cos. a}{\sin. \gamma \sin. a}.$$

Ponamus autem brevitatis gratia $\cos. \frac{\zeta + \Phi}{2} = p$ et $\cos. \frac{\zeta - \Phi}{2} = q$, ut habeamus

$$p \sin.\gamma \sin. b = \cos.\alpha - \cos.\gamma \cos. b; \text{ et}$$

$$q \sin.\gamma \sin. a = \cos.\beta - \cos.\gamma \cos. a.$$

Sicque loco angulorum α et β in calculo retinebimus angulum γ, cum incognito Φ, sive litteris p et q.

XVI. Circa finem autem solutionis praecedentis dedimus has formulas: $A \cos.\alpha = Fv - f$; $B \cos.\beta = Gv - g$ et $C \cos.\gamma = Hv - h$; ex quarum postrema colligimus $v = \frac{h + C \cos.\gamma}{H}$, qui valor in binis praecedentibus substitutus dat:

$$AH \cos.\alpha = Fh - fH + FC \cos.\gamma \text{ et}$$

$$BH \cos.\beta = Gh - gH + GC \cos.\gamma,$$

quibus valoribus substitutis erit

1°) $AHp \sin.\gamma \sin. b = Fh - fH + FC \cos.\gamma - AH \cos.\gamma \cos. b$ et

2°) $BHq \sin.\gamma \sin. a = Gh - gH + GC \cos.\gamma - BH \cos.\gamma \cos. a$.

Pro his aequationibus scribamus brevitatis gratia:

$$p \sin.\gamma = M + m \cos.\gamma \text{ et}$$

$$q \sin.\gamma = N + n \cos.\gamma, \text{ ita ut sit,}$$

$$M = \frac{Fh - fH}{AH \sin. b}; \quad m = \frac{FC - AH \cos. b}{AH \sin. b}; \text{ similique modo}$$

$$N = \frac{Gh - gH}{BH \sin. a} \text{ et } n = \frac{GC - BH \cos. a}{BH \sin. a}.$$

XVII. Ex duabus aequationibus modo traditis 1 et 2 primo erit

$(np - mq) \sin.\gamma = Mn - Nm$, hincque fiet $\sin.\gamma = \frac{Mn - Nm}{np - mq}$; simili modo, eliso $\sin.\gamma$, reperietur

$$0 = Mq - Np + (mq - np) \cos.\gamma, \text{ unde sequitur fore}$$

$$\cos.\gamma = \frac{Np - Mq}{mq - np} = + \frac{Mq - Np}{np - mq}.$$

Nunc jam facile est angulum γ penitus e calculo extrudere. Cum enim sit $\sin.\ \gamma^2 + \cos.\ \gamma^2 = 1$, obtinebitur ista aequatio: $(np - mq)^2 = (Mn - Nm)^2 + (Mq - Np)^2$ quae mutatur in hanc:

$$(Mn - Nm)^2 = (np - mq)^2 - (Mp - Np)^2$$

factaque evolutione erit

$$\begin{aligned}(Mn - Nm)^2 = {} & nnpp - 2\,mnpq + mmqq \\ & - NNpp + 2\,MNpq - MMqq.\end{aligned}$$

Pro hac aequatione scribamus brevitatis gratia

$\odot = \text{♄}pp + \text{♃}qq + 2\,\text{♂}qq$, ita ut sit

$\odot = (Mn - Nm)^2$; $\text{♄} = nn - N^2$; $\text{♃} = m^2 - M^2$ et

$\text{♂} = MN - mn$.

XVIII. Cum nunc sit $p = \cos.\ \frac{\zeta + \Phi}{2}$, erit

$pp = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos.\ (\zeta + \Phi)$, eodemque modo erit

$qq = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos.\ (\zeta - \Phi)$ atque $pq = \frac{1}{2}\cos.\ \zeta + \frac{1}{2}\cos.\ \Phi$,

quibus valoribus substitutis erit

$$\begin{aligned}2\odot = {} & \text{♄}\,(1 + \cos.\ (\zeta + \Phi)) + \text{♃}\,(1 + \cos.\ (\zeta - \Phi)) \\ & + 2\,\text{♂}\,(\cos.\ \zeta + \cos.\ \Phi).\end{aligned}$$

Facta autem evolutione, ob

$$\cos.\ (\zeta + \Phi) = \cos.\ \zeta \cos.\ \Phi - \sin.\ \zeta \sin.\ \Phi \text{ et}$$
$$\cos.\ (\zeta - \Phi) = \cos.\ \zeta \cos.\ \Phi + \sin.\ \zeta \sin.\ \Phi$$

orietur sequens aequatio:

$$\begin{aligned}2\odot = {} & \text{♄} + \text{♃} + 2\,\text{♂}\cos.\ \zeta + 2\cos.\ \Phi\,(2\,\text{♂} + \text{♄}\cos.\ \zeta + \text{♃}\cos.\ \zeta) \\ & + (\text{♃} - \text{♄})\sin.\ \Phi \sin.\ \zeta\end{aligned}$$

quam aequationem brevitatis gratia ita repraesentemus

$$☾ = ♀ \cos. Φ + ☿ \sin. Φ,$$ ita ut sit

$$☾ = 2☉ - ♄ - ♃ - 2♂ \cos. ζ;$$

$$♀ = 2♂ + ♄ \cos. ζ + ♃ \cos. ζ$$ et

$$☿ = (♃ - ♄) \sin. ζ.$$

XIX. Hinc jam facile foret per aequationem quadraticam vel sin. Φ vel cos. Φ definire, multo autem commodius resolutio instituetur, si ex quantitatibus cognitis ♀ et ☿ quaeratur angulus θ, ita ut sit tang. $\theta = \frac{♀}{☿} = \frac{\sin. \theta}{\cos. \theta}$. Hinc igitur erit sin. $\theta = \frac{♀}{\sqrt{♀^2 + ☿^2}}$ et cos. $\theta = \frac{☿}{\sqrt{♀^2 + ☿^2}}$, unde vicissim habebimus $♀ = \sin. \theta \sqrt{♀^2 + ☿^2}$ et $☿ = \cos. \theta \sqrt{♀^2 + ☿^2}$. Jam isti valores pro ♀ et ☿ substituti producent hanc aequationem:

$$☾ = (\sin. \theta \cos. Φ + \cos. \theta \sin. Φ) \sqrt{♀^2 + ☿^2}$$

unde porro concluditur $\frac{☽}{\sqrt{♀^2 + ☿^2}} = \sin. (\theta + Φ)$. Ad hanc aequationem construendam quaeratur angulus η, cujus sinus sit $= \frac{☽}{\sqrt{♀^2 + ☿^2}}$, ita ut fiat sin. $\eta = \sin. (\theta + Φ)$, ideoque etiam $\eta = \theta + Φ$, consequenter orietur angulus quaesitus $Φ = \eta - \theta$. Cum autem angulus $180 - \eta$ eundem habeat sinum, erit etiam $Φ = 180 - \eta - \theta$, sicque etiam haec analysis nos perducit ad binos valores anguli Φ.

XX. Haec nimirum solutio erit realis, quando quantitas $\frac{☽}{\sqrt{♀^2 + ☿^2}}$ unitatem non superaverit; at vero si fuerit

$☽ > \sqrt{♀^2 + ☿^2}$, solutio erit impossibilis, quae circumstantiae egregie conveniunt cum iis, quas praecedens solutio suppeditaverat. At vero invento angulo ϕ innotescit positio arcus CO, hincque porro ipse arcus $CO = \gamma$, quandoquidem per p et q supra dedimus formulas tam pro sin. γ quam pro cos. γ. Hoc autem angulo γ cognito facile colligitur valor ipsius v; consequenter etiam ipsius $z = \frac{r}{v}$, unde denique ipse radius sphaerae quaesitae x derivabitur.

XXI. Hoc igitur modo geminas invenimus solutiones problematis utique difficillimi, quod primo intuitu abstrusissimas disquisitiones stereometricas postulare videbatur, cujusmodi problemata plerumque tam figuras maxime intricatas quam calculos molestissimos requirere solent, dum tamen solutiones hic datae ope calculi non nimis prolixi expediri possunt. Ipsum quidem problema non est novum, sed jam olim a summo geometra Fermatio solutum reperitur; cum autem illo tempore calculus angulorum fere penitus esset incognitus, mirum non est, si nostra solutio multo commodior deprehenditur.