J. Plasma Fusion Res. Vol.82, No.6 (2006) 376‐390

講座 高周波によるプラズマ加熱技術入門

2．高周波加熱技術ことはじめ

武藤　敬，下妻　隆
核融合科学研究所

（原稿受付：2006年３月27日）

高周波を用いたプラズマ加熱装置を説明するにあたって，必要となる基礎的な知識を概観した．特に必要とされる高電力に対応する技術項目として，高周波の発生源である発振器として四極管，クライストロン，マグネトロン，ジャイロトロン等についてその原理と実際について図を用いて説明した．高周波の伝送技術については，主に使用される周波数帯を意識して記述した．基礎的な伝送線路的な扱い方，反射や整合の記述，解析するためのスミスチャートを始め，マイクロ波ミリ波で必要となる導波管の扱い方，準光学的な扱いまでを，概念的なことを主に記述するように努めた．

Keywords:
RF, microwave, plasma heating, ICRF, LHCD, ECH, tetrode, klystron, magnetron, gyrotron, transmission line, Smith chart, waveguide

一般に，「高周波」とはメガヘルツからテラヘルツまでの電磁波を総称して呼んでいるようである．英語では歴史的に Radio Frequency : RF と呼ぶが，必ずしもラジオに使用されているもののみを指しているのではない．古くは，通信やレーダーに使用されてきたが，近年では携帯電話や衛星放送等の通信用途にとどまらず，電子レンジや半導体製造装置などその電磁波エネルギーを直接使用する用途まで広がりをみせ，その重要性はますます高まっている．Fig. 1 は，高周波の各周波数帯における主な用途を示したものである．波長帯と大気中での減衰により，長距離から短距離までの通信やレーダーに使用されているのがわかる．最近では，数ギガヘルツ帯で携帯電話や無線 LAN，Bluetooth 等の短距離情報通信機器，数十ギガヘルツ帯での衛星通信・放送への利用が広がっている．工業利用としては，13.56 MHz の高周波加熱装置やプラズマ発生装置，2.45 GHz の電子レンジやプラズマ発生装置などが有名である．百ギガヘルツ帯はまだその用途は限られているが，発振源の固体素子化と大量生産による低コスト化によって，車載用のレーダーなどの民生用機器への応用が進められている．図中には核融合プラズマに適用される周波数帯も合わせて示してある．

核融合プラズマの高周波加熱装置は大別して，高周波発振源，伝送路，アンテナ，制御計測装置，冷却装置等から構成されている．

高周波発振源の主要部分は商用交流（AC）電力の受電から始まり，直流（DC）高圧電源への変換，発振管や共振回路付き増幅器による高周波（Radio Frequency : RF）電力生成である．周波数や電力によりDC電力からRF電力への変換効率は異なるが，高々30%から50%程度であるから，大量の熱除去のために大掛かりな冷却水設備も必要となる．

伝送路は低周波数領域のイオンサイクロトロン周波数帯（Ion Cyclotron Range of Frequencies : ICRF，数 MHz から数百 MHz）では同軸線路が使用される．同軸ケーブルでの減衰が無視できない場合が多く，大電力装置では同軸管が使われることがほとんどである．低域混成波加熱（Lower Hybrid resonance Heating : LHH もしくは Lower Hybrid Current Drive : LHCD，数百 MHz から数 GHz）や電子サイクロトロン共鳴加熱（Electron Cyclotron resonance Heating : ECH，数 GHz から数百 GHz）では，より減衰を減らす

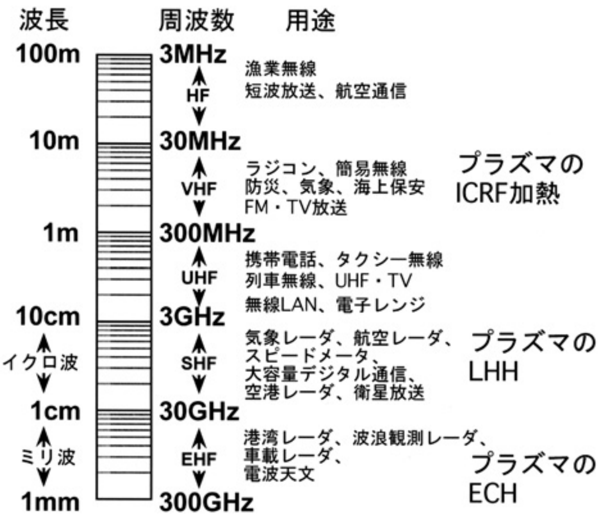

Fig. 1　高周波の主な用途を各周波数（波長）帯についてまとめた．

Basic of RF Heating Technology
MUTOH Takashi and SHIMOZUMA Takashi
authors' e-mail: mutoh@nifs.ac.jp，shimozuma.takashi@LHD.nifs.ac.jp

ために導波管による伝送路が使用される．いずれの伝送路もアンテナ等からの反射電力から発振源を保護するために反射電力を減らす回路（インピーダンス整合回路，サーキュレータ，フィルタ等）が挿入されている．

アンテナは高周波電力をプラズマに放射吸収させる部分で，プラズマの加熱機構に依存して，収束性，方向性，波数や位相制御が行われる．ICRF や低周波数の LHH ではループアンテナを用い，通常の LHH では導波管のアレイ（複数の導波管集合）を，ECH ではミラーもしくは導波管ホーンによる収束放射がおこなわれる．これらのパワー生成と伝送部は多くの計測器によりモニタされ，制御される必要がある．機器を安定に運転するために各種インターロックの整備も必要である．多くの場合，プラズマの応答によりパワーや収束位置の制御をおこなうため，高度に複雑なシステムになることが多い．

高周波加熱装置をこれから作ったり操作する人のために，装置を設置する部屋について一言述べておく．加熱装置は特に接地系が重要である．ミリ波では心配ないが，波長が数メートル以上の高周波の運転や電源を高速にスイッチング操作を行う際には，相当の誘導電圧が発生する．直流のイメージで配線した接地線は何の意味も持たない．高周波の実験を安定に行ないたければ幅広い銅板で高周波に対して低インピーダンスの接地線とアース系を作る必要がある．筆者らの実験室では部屋の床全体が銅板で敷き詰められている．確実なアースは安定した運転と計測に必須であり，是非お勧めする．

大電力で高電圧の機器であるため安全対策も重要で，人および機器に対する多くのインターロックによる保護システムが工夫されている．また大電力の電波発生機器であるために，電波障害の防止対策と所轄総合通信局などの監督官庁への届け出が必要となる．

2.1　高周波の発生

核融合プラズマの高周波加熱に必要なパワーソースとしては，数十メガヘルツから数百ギガヘルツに渡る高周波数帯の発振が必要であるだけでなく，さらにメガワット級の出力と長時間運転が要求される．このために，通常電子ビームを用いた真空管（電子管）が使用される．これらは，同様に電子ビームを動作媒体とするが，対象とする周波数帯によってその動作原理，構造は大きく異なっている．

通常真空管と呼ばれるものは，電子を放出するカソード，電子の流れを制御するグリッド，電子を集めるプレート（またはコレクタ）からなる．グリッドに印加する電圧によって電子流の密度を制御し，電流の増幅を行うものである．これらの真空管は，扱う周波数がおよそ 200 MHz 程度までに制限される．その原因は電極間の容量と導入線のインダクタンスや，電子の走行時間が無視できなくなることによるものである．

イオンサイクロトロン周波数以下の領域で用いられている電力増幅用真空管は四極真空管（Tetrode）であり，ほとんどが信号発生器から始まる多段の電力増幅段の一部になる主増幅器として用いられている．百メガ Hz 帯までの低周波数では，共振回路は入力側と出力側の外部に構成されているが，より高い周波数では電子管の中に共振回路が組み込まれている．

1 GHz 以上のマイクロ波からミリ波帯では，新しい原理に基づいた電子管が考案されてきた．一つは，電子の走行時間を逆に利用した速度変調管（クライストロン，Klystron）であり，また，遅波構造を利用した進行波管（Traveling Wave Tube : TWT）である．これらは，マイクロ波の利用の増大に伴って急速に発達した．また，磁界を用いた磁電管（マグネトロン，Magnetron）は，第 2 次大戦中にレーダー用の送信管として飛躍的に進歩したものであり，パワー，発振効率とも優れた電子管である．核融合プラズマ加熱で近年開発が急激に進められているものとして，ジャイロトロン（Gyrotron）がある．これは，従来のマイクロ波発振管と原理が異なり，さらに高周波数の 100 GHz 帯でもメガワット級の出力が得られるものである．

Fig. 2は，それぞれの電子管について現在の製品，開発品の状況を周波数を横軸に，出力を縦軸にとって示したものである．四極真空管は，おもに放送や通信に利用され，マグネトロンは電子レンジ，工業用加熱装置，各種レーダーに利用され，クライストロンはレーダー，医療用加速器，工業用加熱装置，核融合の加熱装置に，ジャイロトロンは工業用加熱装置や核融合の加熱装置として幅広く利用されている．図中に示した点線は，(出力) ∝ (周波数) $^{-5/2}$ を表している．空胴共振器を利用したこれらの発振管の出力

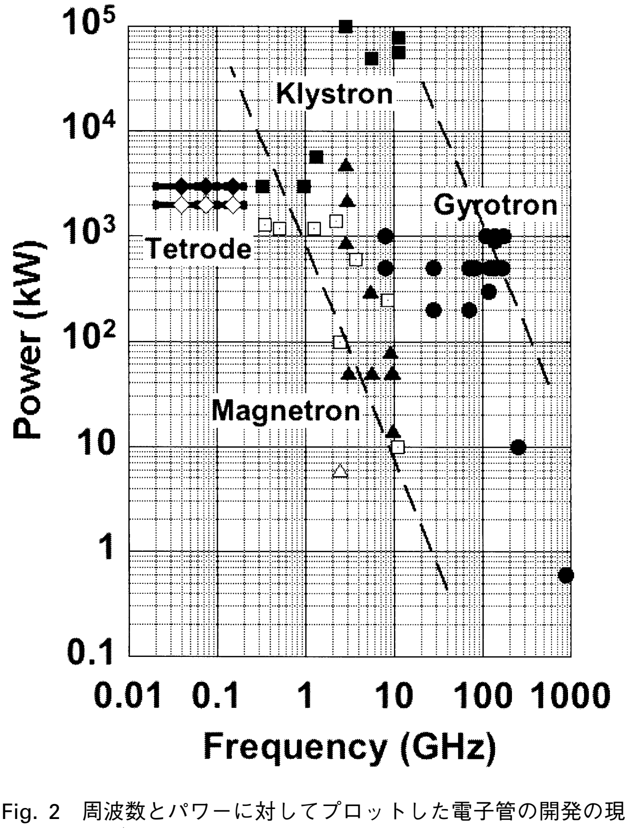

Fig. 2　周波数とパワーに対してプロットした電子管の開発の現状．◆は四極管，■はクライストロン，▲はマグネトロン，●はジャイロトロンである．塗りつぶし記号は，短パルスのもの，白抜きは定常運転可能なものである．ただし，ジャイロトロンについては，秒以上の長パルスのみを示した．

は，共振器の表面積と表皮厚の積で決まる体積内で発生する熱によって，その最大値がおよそ制約されることを反映している．

本章では，核融合プラズマの高周波加熱で使用される真空管増幅器，クライストロン，マグネトロン，ジャイロトロンについて解説する．広範囲にわたる高出力マイクロ波源の開発については，レビュー論文[1]を参考にしていただきたい．

2.1.1 ICRF 領域までの高周波電力発生装置

イオンサイクロトロン加熱以下の周波数(200 MHz以下)ではほとんどが四極真空管を用いた高周波増幅器を用いており，周波数の安定性や電力と位相の制御の必要性から，自励の発振器ではなく，他励式の多段増幅回路が用いられる．低周波数領域の実験ではプラズマ中へ放射する電磁波の位相が問題になることが多く，複数のアンテナを用いて加熱と電流駆動する場合は，単一の発振源（Signal Generator，SG)からの電力を分割して，多段増幅する回路が利用される．複数のSGを用いると，同一周波数の設定でもわずかなビート（差周波数のうなり）が生じ，伝送路の電圧やインピーダンス整合条件を不安定にするので避けるべきである．

この周波数帯は放送用の送信機が定常発振器として完成されているが，そのほとんどが固体素子を用いたものの集合体であり，高々数 10 kW までの出力である．kW 単価が真空管方式に比べて10倍以上と高価であることと，メガワット級の発振器は大規模なものとなるため，核融合研究には利用されていない．ただし増幅器列の初段の数 kW の増幅器には広帯域増幅器として使用されている．Fig. 3 に典型的な多段増幅器回路を示す．メガワット級の増幅回路では 3 段から 4 段の増幅回路が用いられる．

大型の核融合装置で採用されている最終段増幅用の四極真空管としては，米国の CPI 社 (Eimac Division) とフランスの Thales 社が供給している 2 種類が使用されている．Fig. 4 の Eimac 管は広く世界の装置で使用されている四極管である．大電力への要請から大型化すると，内部のインダクタンスや容量が大きくなり，使用周波数の上限が下がるので，単管あたりの出力には限度がある．現状では，電力発生は 2 MW (数秒パルスでは 3 MW) が限界である．これらの真空管は出力共振空洞器 (Output Cavity) の端に位置して使用されるが，陽極形状を工夫し，より高い周波数 (200 MHz) まで使用可能にしたダイアクロード管 (Diacrode,Thales社) も開発されており，これは特殊な四極管といえる．ダイアクロード管は出力共振回路の中央に置くことができて，短波長すなわち高い周波数の共振キャビティに適している．ITER の高次高調速波電流駆動に適用が検討されている．四極真空管を用いた増幅回路を模式的に表現すると Fig. 5 のようになる．通常グリッドバイアスは陽極電流の遮断電圧値より深くバイアスされており，入力電圧の半周期以下の間に脈流の陽極電流が流れる B 級もしくは C 級の増幅動作になる．これは出力回路に共振同調回路があるため通常の信号増幅回路と異なり，電力効率優先の回路となっている．

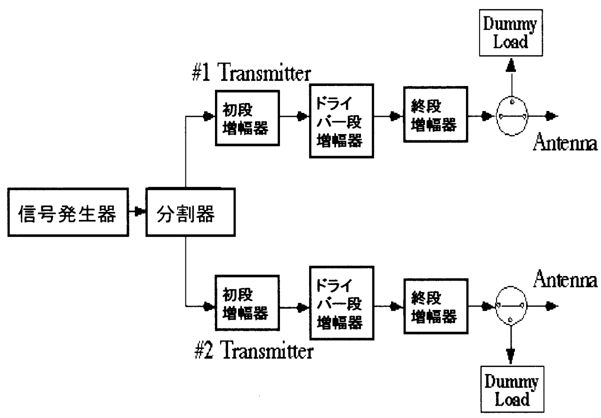

Fig. 3 典型的な大電力高周波増幅器の配列例．10 mW の信号発生器から，数 kw，数 10 kW，数 100 kW 以上への電力増幅列が構成されている．

Fig. 4 大電力四極真空管（米国 CPI 社)．世界の ICRF 加熱装置の多くで使用されている．最大出力約 2 MW（実用周波数130 MHz 以下)．

低周波数帯の増幅器は以前から開発されているが多くの困難さも有している．特に大電力増幅器の製作と運転上の課題は，自己発振と寄生振動(parasitic oscillation，数 GHz 帯）による不安定動作である．低周波数の増幅回路では出力側からの高周波電力の一部がノイズとして入力共振回路側に回り込み，増幅されて自己発振が起きることがある．入力 RF 電力が止まった後も発振がいつまでも続いたり，入力 RF 電力がゼロでも突然発振が始まる現象である．大電力ではないが，長時間続くので負荷側に損傷を発生させ，また危険でもある．

四極真空管の増幅回路では，不要波（スプリアス）成分として 3 倍高調波が発生しやすいが，これは実用上の問題にはならない．問題になるのは真空管の構造から生じる固有の寄生発振で，陽極電流の多い大電力運転時に起きやすい．異常発振によりグリッド電流やスクリーングリッド電流の過電流を起こし，アウトガスを発生し，管内のアーキ

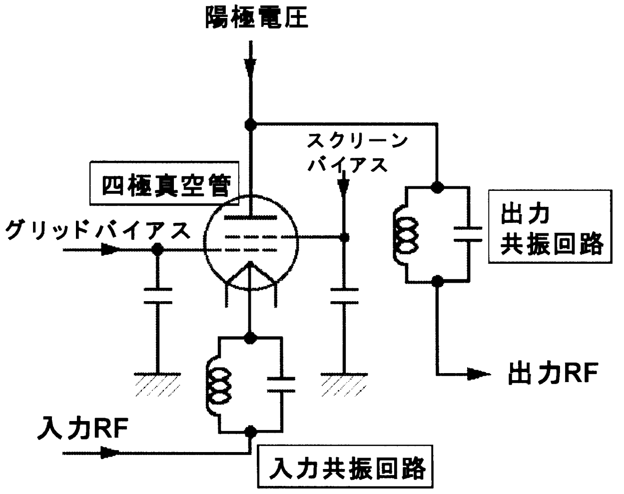

Fig. 5 四極真空管を用いた増幅回路の模式図．入力共振回路，出力共振回路は，通常大電力では狭帯域空洞共振器（キャビティ）になっている．

ングによりグリッド等の破損を引き起こすことがある．

これらの異常発振の防止が四極管を用いた発振器の課題であり，発振器製造メーカーのノウハウでもある．これらの点については，第3章で説明する．

2.1.2 大電力マイクロ波管とその原理

電子群からの強力な電磁波放射は，各々最初ランダムな位相の放射を引き起こす電子が，その電磁波によって自ら集群（バンチング）を起こし，コヒーレントな電磁波放射になることによって達成される．その基本的な原理として，⑴チェレンコフ（Cherenkov）放射型，⑵遷移（Transition）放射型，⑶制動放射（Bremsstrahlung）型の3種類が考えられる．

⑴ チェレンコフ放射型

チェレンコフ放射は，屈折率が $n>1$ の媒質中において，荷電粒子がその媒質中の光速度より速い速度で通過するときに電磁波の放射が起こる現象である．電子管においては，位相速度が光速 c よりも小さくなるような「遅波」が存在し得る構造を利用することによって，実現することができる．例えば，直径を周期的に変化させた中空円筒や周期的に並べた円板，らせん状の電線などである．このような周期的な遅波構造を通過する電子からの電磁波放射は，特に Smith-Purcell 放射と呼ばれており［2］，電磁波の位相速度が光速よりも小さくなることを利用しており，チェレンコフ放射の一種と考えることができる．このような原理に基づいたマイクロ波管としては，進行波管や後進波管（Backward Wave Oscillator : BWO）があり，マグネトロンもこの一種と考えることができる．

Fig. 6(a),(b)に進行波管と後進波管の概念図をそれぞれ示す．(a)の進行波管では電子の進む方向と波動の群速度の方向が同じであり，基本的には増幅器として働く．(b)の後進波管では，コレクタ付近に電磁波を反射させる構造があり，電子の進行方向と波動の群速度が逆方向となり，本質的に電磁波のフィードバック機構が備わることになって発振器として働く．また，(c)に進行波管と後進波管の動作点

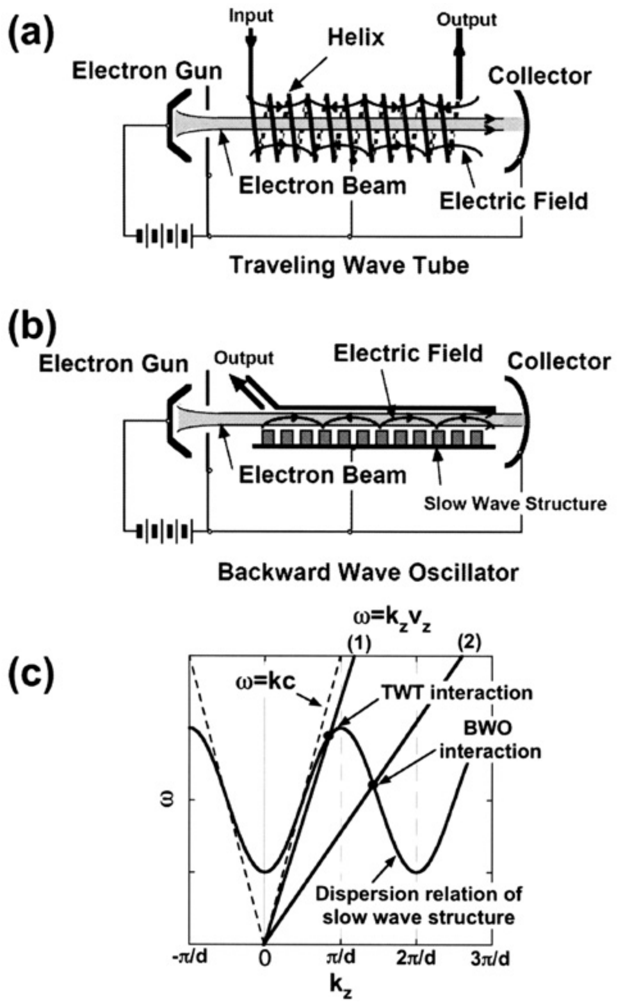

Fig. 6 チェレンコフ型のマイクロ波管の概念図 (a) 進行波管，(b) 後進波管，(c) 遅波構造の分散関係と進行波管と後進波管の動作点．

を，$\omega-k_z$ 空間に示した．ここで ω は波動の角周波数，k_z は波動の伝搬方向の波数である．図中に示した遅波構造の分散関係は，ある特定のモードに対して伝搬周波数の上限と下限を持った伝搬帯を形成する．一方，電子ビーム中に存在する空間電荷波の分散式は $\omega=k_z v_z$ の直線で表され，その傾きは電子の速度になる．例えば⑴で示される場合には2つの線の交点で，相互作用が起こる．この場合遅波構造の分散曲線の接線は正であり，群速度は電子進行方向と一致し，進行波相互作用になる．これが TWT の場合の相互作用である．少し加速電圧を落として，電子の速度を低下させると，空間電荷波の分散式は⑵の直線で示されるようになる．この場合，遅波構造の分散曲線との交点では，その接線の傾きが負となり，波動の群速度は，電子の進行方向と逆になる．これが BWO の場合の相互作用である．

電子レンジや工業用のプラズマ生成装置などに使用されるマグネトロンの概念図を Fig. 7 に示す．マグネトロンでは，紙面方向に磁界が印加されている．カソードから熱電子放出によって放出された電子は，カソード－アノード間に印加された電圧によって加速されるとともに，磁界によって軌道を曲げられ，旋回運動を起こすようになる．カソード－アノード間の空間は周期的な構造を形成し，そこ

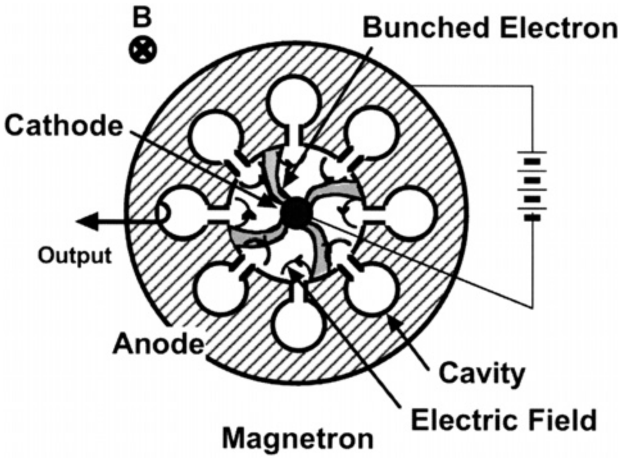

Fig. 7 マグネトロンの概念図.

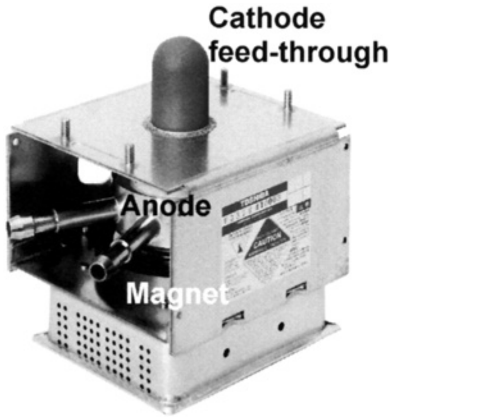

Fig. 8 低パワー定常マグネトロン（東芝電子管デバイス（株）の御厚意による）.

に伝搬する波動は遅波となる．電子ビームの旋回速度が，この波動の位相速度にほぼ等しくなった時にエネルギーの授受が起こる．この意味でチェレンコフ型の発振器である．Fig. 8 は電子レンジで使われるマグネトロン，Fig. 9 はレーダーで使用される高出力パルスマグネトロンである．

⑵ 遷移放射型

遷移放射というのは，一般に，電子が異なる屈折率を持つ２つの媒質の境界面を通過するときや，金属のグリッドやプレートのような擾乱のある媒質中を通過するときに，電磁波を放射する現象である[3].

クライストロンは，電子からのコヒーレントな遷移放射を利用した最も一般的な装置である．典型的なクライストロンの概念図を Fig. 10 に示す．一般的なクライストロンは，ドリフト管によって隔てられた２つまたはそれ以上の空胴（キャビティ）から構成される．空胴部は二重円筒形状をしており，内側の円筒にはキャップが作られている．中心部分は電子ビームが通過する部分である．両端を閉じた内筒と外筒との間の部分が共振器を構成しており，通常 TM_{01} モードが励起される．基本的には入射空胴も出力空胴も同じ構造である．一様な密度を持った電子ビームは，入射空胴のギャップ部に励起された軸方向の電磁界によって電子は加速や減速を受け（速度変調），ドリフト管を伝搬してゆく間に空間的な集群（バンチング）を起こす．集群した電子ビームは，出力空胴のギャップ部において誘導電界を引き起こし，コヒーレントな電磁波として外部に取り出される．

電子の運動エネルギーから十分な電磁波エネルギーを引き出すには，電子がギャップ部を通過する際に電磁界の位相が大きく変化しないことが必要であり，そのギャップ長 L に，次の制約が課せられる．すなわち，$\theta = \omega L / v_z \leq \pi$ である．つまり，ギャップ部を電子が通過する際に電界の向きが反転しない条件である．ここで θ は位相角，v_z は電子の z 方向速度である．実際的な見地からは，そのギャップ部において許容される最大電界強度の制約を考慮して，長パルス動作のクライストロンに対して，その動作可能最高周波数として，

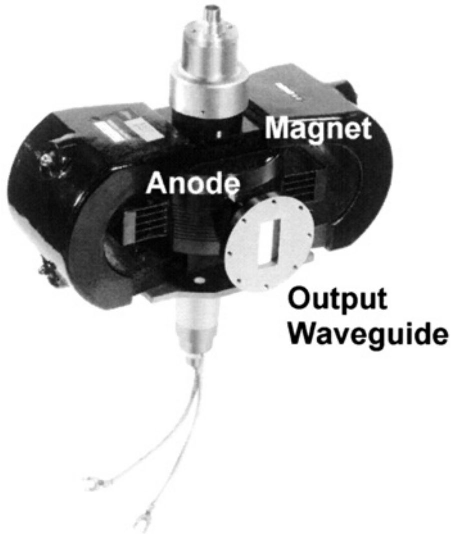

Fig. 9 高パワーパルスマグネトロン．周波数 5.25ー5.4 GHz，出力 300 kW，マイクロ秒パルス（東芝電子管デバイス（株）の御厚意による）.

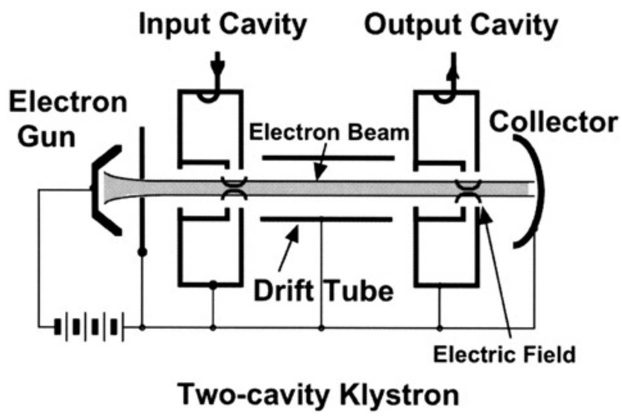

Fig. 10 ２空胴クライストロンの概念図.

$$f_{\mathrm{MAX}} = \frac{5.6}{V_{\mathrm{b}}} \tag{1}$$

が，単一空胴での非相対論的極限に対して得られる．ここ

で，eV_{b} は電子のエネルギーであり，f は GHz，V_{b} は MV 単位である．また，相対論的極限では，

$$f_{\mathrm{MAX}}=\frac{5.7}{V_{\mathrm{b}}^{2}} \qquad (2)$$

で与えられる[1]．したがって，0.5 MeV 程度の電子ビームを用いる場合には，せいぜい 20 GHz 程度が限界となる．

線形加速に用いられる周波数 2.856 GHz，出力 100 MW 級の短パルスクライストロンの構造を示した模式図と写真を Fig. 11 に示す．電子ビームは，通常ピアース型と呼ばれるおわん型の熱陰極から放出され，アノードに印加した電圧によって加速される．入射空胴には，低パワーの電磁波が入射され，その電界によって電子ビームは速度変調を受ける．ドリフト空間には軸方向に磁場が印加されており，ビームの発散を防いでいる．その後多段の空胴を通過した後，最適に集群された電子ビームは，出力空胴において電磁波を放出する．出力空胴からの電磁波は導波管，出力窓を通して外部に取り出される．一方相互作用を終えた電子ビームは，水冷されたコレクターによって回収される．

(3)　制動放射型

この場合の制動放射とは，電子が外部磁界や電界中を運動する際に加速度を受けることよって，電磁波を放射する現象を指す．制動放射型の装置においては，電子は次の条件を満たすときに電磁波を放出する．

$$\omega-k_z v_z \simeq s\Omega \qquad (3)$$

ここで，ω は発振角周波数，k_z は波動の進行方向の波数，v_z はその方向の電子の速度成分，Ω はサイクロトロン角周波数，s は高調波数である．上式はドップラーシフトした周波数がサイクロトロン高調波周波数にほぼ等しいことを意味している．式(3)は，どのような位相速度を持つ波動に対しても成り立つので，放射される電磁波は，位相速度が光速より速い「速波」でも，光速より遅い「遅波」でも良いことになる（ここでいう「速波」「遅波」という呼び方は，波動の速度が光速度より速いか遅いかで定義されている．プラズマ中の波動での「速波」，「遅波」と定義が異なることに注意せよ）．これは，相互作用に遅波構造を必要とせず，速波が伝搬可能な通常の直径に変化のない壁面を持つ導波管が使用できることを意味する．通常の標準的な導波管中では，波動の位相速度が常に光速度より大きくなることは後述する．速波は実数の径方向波数を持つため，壁面に局在した表面波とならず，相互作用空間として径方向に十分に広い空間がとれる．このような特長は，特にミリ波やサブミリ波の発振管として以下のような利点をもたらす．

- 大半径の導波管や空胴が利用できるので，壁面でのオーミック損失や強い高周波電界による放電破壊などの問題を緩和できる．
- 電子ビームとして大口径で大電流のものを使用でききので，大電力化が可能である．
- 位相角 θ が $\theta=(\omega-k_z v_z-s\Omega)L/v_z$ で与えられるので，十分高い周波数，十分長い相互作用長 L に対しても θ の条件が満足できる．

制動輻射型の装置としては，サイクロトロン共鳴メーザー（Cyclotron Resonance Maser）や自由電子レーザー（Free Electron Laser）などが挙げられる．代表的な例としてサイクロトロン共鳴メーザーの一つであるジャイロトロンを取り上げる．Fig. 12(a)にジャイロトロンの概念図を，(b) に分散関係を示す．磁界中をサイクロトロン運動する電子ビームを用いることにより，電子ビーム中に電子サイクロトロン高調波を励起する．この波動は図 (b) に示した

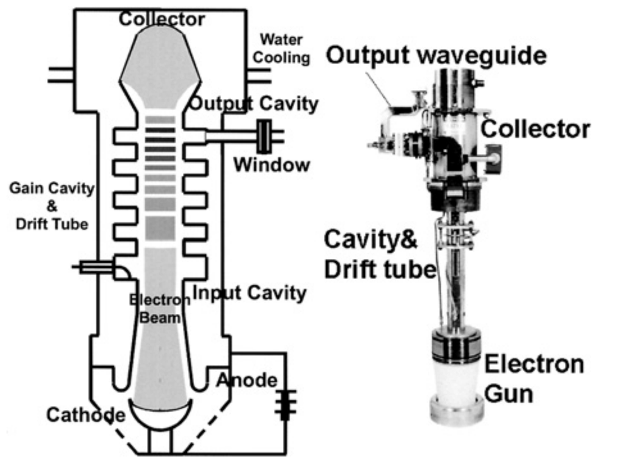

Fig. 11　高パワーパルスクライストロンの構造図と写真（東芝電子管デバイス㈱の御厚意による）．

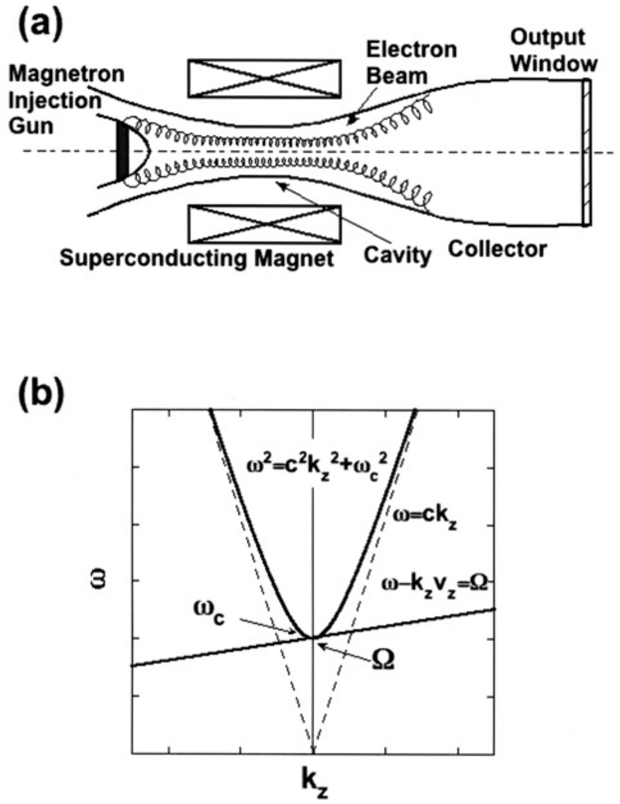

Fig. 12　ジャイロトロンの概念図とその分散関係．

ように，分散式として $\omega-k_z v_z \simeq s\Omega$ を持ち，$k_z=0$ で $\omega=\Omega$ を通る傾き v_z のほぼ直線になる（ただし $s=1$ の基本波共鳴動作とした）．サイクロトロン周波数 Ω を空胴のカットオフ周波数 ω_c に近くなるように設定することで，電子は，通常の導波管において伝搬可能な速波とでも相互作用が可能になる．百ギガヘルツ帯のジャイロトロンでは，必要とする磁界の強度は 3 − 7 テスラになるために通常超伝導マグネットを用いる．このように，ジャイロトロンが高周波数でかつ高パワー発振が可能である理由は，第一に，波長に比べて大半径の空胴を相互作用空間として使用できること，第二に，電子のサイクロトロン周波数を空胴のカットオフ周波数近傍に設定すること ($k_z \simeq 0$) で，発振効率の低下を招く電子ビームの v_z 成分の速度分散に共鳴条件が影響されないようになること，第三に，電磁波エネルギーへの変換が可能な電子の磁界に垂直方向エネルギーを有効に高めることのできるマグネトロン入射型電子銃を用いたことによっている．現在では，Fig. 2 に示したように，140 − 170 GHz 帯で 1 MW，数十分の運転が可能なレベルまで達している．Fig. 13 に典型的なメガワットジャイロトロンの写真を示す（全長約 2 m）．

以上，種々のマイクロ波管を 3 つの原理に基づいて分類したが，この分類は絶対的なものではなく，実際にはいくつかの原理にまたがって動作しているものであることを指摘しておく．

2.2 高周波の伝送

高周波加熱に用いられる伝送路は数 100 MHz より低い周波数帯では同軸線路，これより上では導波管路が用いられる．伝送路解析の理論も低周波数帯では交流理論の拡張としての分布定数線路解析，高周波数帯では電磁波の導体に沿っての伝播解析になるので，それぞれ分けて解説する．

2.2.1 分布定数線路

(1) 伝送線路を表す方程式

高周波では波長が装置のサイズに比べ短くなるため，伝送線路上に電圧，電流の波動が生じる[4,5]．解析的取り扱いも伝送路に沿ってインピーダンスを分散させる必要がある．線路の長さ方向に z 軸をとり，単位長のインダクタンス L，損失抵抗 R，容量 C，損失（漏れ）コンダクタンス G として，線路上のある微小区間 $(z, z+\mathrm{d}z)$ におけるモデルは Fig. 14 のようになる．微小区間の諸量を集中定数として考察している．この微小区間にキルヒホッフの法則を適用し，dz で割ると分布定数線路の微分方程式が表される．

$$-\frac{\partial v}{\partial z}=L\frac{\partial i}{\partial t}+Ri$$

$$-\frac{\partial i}{\partial z}=C\frac{\partial v}{\partial t}+Gv \qquad (4)$$

ここで正弦波振動する電圧と電流波動の伝播を考え，電圧 v，電流 i を複素表示で表し，以下の式を用いる．実際の値は実数部であるとする．振幅 $V(z)$，$I(z)$ は複素振幅で z の関数である．

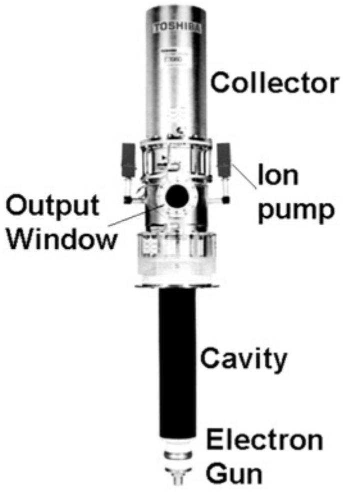

Fig. 13 高パワージャイロトロン（東芝電子管デバイス（株）の御厚意による）

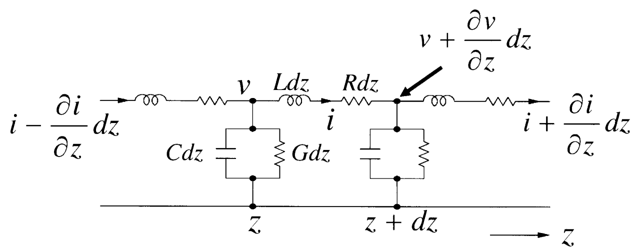

Fig. 14 分布定数線路の微小区間の等価回路．

$$v=\sqrt{2}V\mathrm{e}^{j\omega t}, \qquad i=\sqrt{2}I\mathrm{e}^{j\omega t} \qquad (5)$$

式(4)に式(5)を代入し，次の線形微分方程式が導かれる．

$$-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}=(R+j\omega L)I\equiv ZI$$

$$-\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}z}=(G+j\omega C)V\equiv YV \qquad (6\text{-}1)$$

ここで $Z\equiv R+j\omega L$, $Y\equiv G+j\omega C$ として $I(z)$ を消去すると次の微分方程式が得られる．

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}z^2}=ZYV \qquad (6\text{-}2)$$

解として $\exp(\lambda z)$ の形を仮定し，回路の損失を小さいとすると，式 (6-2) の解は以下の形で表される．

$$\lambda=\pm\sqrt{(R+j\omega L)(G+j\omega C)}$$

$$=\pm\left(\frac{R\sqrt{C/L}+G\sqrt{L/C}}{2}+j\omega\sqrt{LC}\right) \qquad (7\text{-}1)$$

$$\gamma=\alpha+j\beta \qquad (\lambda=\pm\gamma),$$

$$\alpha=\frac{R\sqrt{C/L}+G\sqrt{L/C}}{2},$$

$$\beta = \omega\sqrt{LC} \tag{7-2}$$

$$V = A\,\mathrm{e}^{-\gamma z} + B\,\mathrm{e}^{\gamma z} \tag{7-3}$$

ここで，A，B は境界条件により定まる定数である．電流も以下のように同様に表わされる．

$$I = A\sqrt{Y/Z}\,\mathrm{e}^{-\gamma z} - B\sqrt{Y/Z}\,\mathrm{e}^{\gamma z} \tag{7-4}$$

正弦波動の伝播を理解するために，式 (7-3) を元の形に変形するとわかりやすい．

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{2}A\,\mathrm{e}^{j\omega t - \gamma z} + \sqrt{2}B\,\mathrm{e}^{j\omega t + \gamma z} \\ &= \sqrt{2}A\,\mathrm{e}^{-\alpha z}\mathrm{e}^{j(\omega t - \beta z)} + \sqrt{2}B\,\mathrm{e}^{\alpha z}\mathrm{e}^{j(\omega t + \beta z)} \end{aligned} \tag{8}$$

この第 1 項は位相速度 $v_{\mathrm{p}} = \omega/\beta = 1/\sqrt{LC}$ で，z の正方向に伝播する前進正弦波を表わしており，第 2 項は z の負方向に進む後進正弦波を表わしている．α を減衰定数，$\gamma = \alpha + j\beta$ を伝搬定数といっている．電流に関しても，同様の表現ができて，式 (9) で表わす．

$$i = \sqrt{2}A\sqrt{Y/Z}\,\mathrm{e}^{-\alpha z}\mathrm{e}^{j(\omega t - \beta z)} - \sqrt{2}B\sqrt{Y/Z}\,\mathrm{e}^{\alpha z}\mathrm{e}^{j(\omega t + \beta z)} \tag{9}$$

電圧と電流について，前進波と後進波をわけて表現すると，それぞれ

$$\vec{V} = A\,\mathrm{e}^{-\gamma z}, \quad \overleftarrow{V} = B\,\mathrm{e}^{\gamma z} \tag{10}$$

$$\vec{I} = A\sqrt{Y/Z}\,\mathrm{e}^{-\gamma z}, \quad \overleftarrow{I} = B\sqrt{Y/Z}\,\mathrm{e}^{\gamma z} \tag{11}$$

になり，合わせて表わすと，

$$V = \vec{V} + \overleftarrow{V}, \quad I = \vec{I} - \overleftarrow{I} \tag{12}$$

と書ける．前進波と後進波の関係を Fig. 15 に示す．　式 (10)，(11) における電圧と電流の比を用いて，線路のインピーダンスを表現することができる．

$$\frac{\vec{V}}{\vec{I}} = \frac{A\,\mathrm{e}^{-\gamma z}}{A\sqrt{Y/Z}\,\mathrm{e}^{-\gamma z}} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} \equiv Z_0 \tag{13}$$

Z_0 は伝送線路の特性インピーダンス（Characteristic Impedance）と呼ばれ，前進波も後進波も同じ性質で伝播していることがわかる．損失がある場合，Z_0 は一般に複素数であるが，通常の低損失線路では電圧と電流の比を与える実数と考えてさしつかえない．例えば同軸管の場合は内外導体の寸法比で決定され，一般的には，単位長あたりのインダクタンスと線間容量から決まる値である [4, 5]．

(2) 反射係数と定在波

伝送線路の終端や途中に負荷や不連続性があると，前進波のパワーの一部もしくは全部が反射，または吸収される．こうして線路上に前進波と後進波が同時に存在すると，干渉により場所によって振幅の異なる定在波が形成される．Fig. 16 に示すように，電源側を $z = 0$，負荷端を $z = l$，負荷インピーダンスを Z_l，電源インピーダンスを Z_{g} として電源と負荷端それぞれでキルヒホッフの法則を用いると，前進波と後進波の振幅定数 A，B を求めることができる．考え方を単純にするために $Z_{\mathrm{g}} = Z_0$ として解く．

$$V = \frac{V_{\mathrm{g}}}{2}\mathrm{e}^{-\gamma z} + \frac{V_{\mathrm{g}}}{2}\mathrm{e}^{-\gamma l}\cdot\frac{Z - Z_0}{Z_l + Z_0}\mathrm{e}^{-\gamma(l-z)}$$

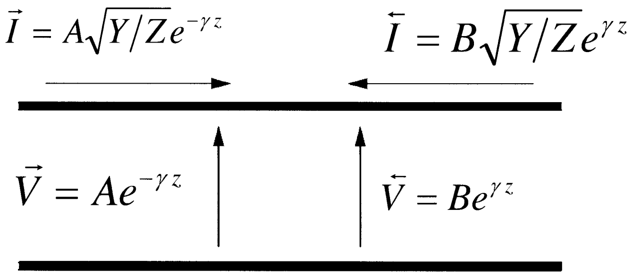

Fig. 15　伝送線路上の前進波と後進波．右方向に z の正方向とする．

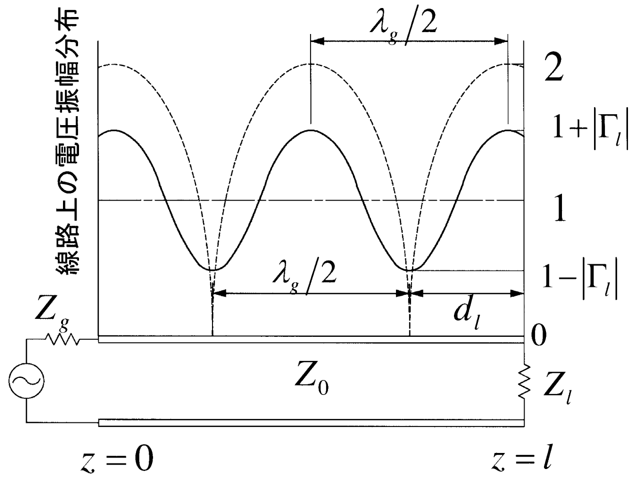

Fig. 16　負荷 Z_l，特性インピーダンス Z_0 の線路上の電圧定在波の振幅分布．負荷の抵抗成分がゼロでは，電圧ゼロの点が 1/2 波長毎に現れるが（点線），有限の抵抗成分の負荷では極大値と極小値が現れる（実線）．

$$I = \frac{V_{\mathrm{g}}}{2Z_0}\mathrm{e}^{-\gamma z} - \frac{V_{\mathrm{g}}}{2Z_0}\mathrm{e}^{-\gamma l}\cdot\frac{Z_l - Z_0}{Z_l + Z_0}\mathrm{e}^{-\gamma(l-z)} \tag{14}$$

電圧，電流ともに第 1 項は前進波で，電源の内部インピーダンス $Z_{\mathrm{g}} = Z_0$ なので，振幅は無負荷時の半分になる．第 2 項は負荷端での反射後に z の負方向に進む後進波で，前進波と後進波の比は負荷インピーダンスと Z_0 の関係式から反射係数として表わされている．

$$\Gamma_l = \frac{Z_l - Z_0}{Z_l + Z_0}, \quad |\Gamma_l| < 1 \tag{15}$$

Γ_l は負荷端での電圧反射係数であり，伝播特性の解析では特に重要なパラメータである．この式からわかることは，以下の式で表される整合条件では，反射波は存在せず，$\Gamma_l = 0$ となる．

$$Z_l = Z_0 \tag{16}$$

線路の特性インピーダンスと同じ負荷で終端することで反射波がなくなり，前進波のパワーをすべて負荷に吸収させることができる．高周波を用いたプラズマ生成や加熱実験では，効率の良い電力注入や機器の保護のために，整合条件（通常はインピーダンス整合と表現）を保つことが重要である．

通常プラズマに電磁波を放射するアンテナは低インピー

ダンスで，伝送路の特性インピーダンスと同じではない．そのため前進波と後進波とが線路上で干渉して定在波が生じる．光の干渉縞と同じで電場や電流の強弱分布ができる．線路上任意の点の定在波の電圧分布は，負荷端 $z=l$ での電圧反射係数 Γ_l を式(17)とし，式(18)で表され，Fig. 16のような波形となる．

$$\Gamma_l=\left|\frac{B}{A}\right|\mathrm{e}^{j(2\beta l+\phi)}=\frac{Z_l-Z_0}{Z_l+Z_0} \tag{17}$$

$$|V|=|A|\cdot|1+\Gamma_l\mathrm{e}^{j2\beta(z-l)}| \tag{18}$$

簡単にするために振幅定数 $|A|$ を1としている．電圧定在波の最大値は $1+|\Gamma_l|$，最小値は $1-|\Gamma_l|$ である．定在波電圧の分布は負荷端の反射係数によって，すなわち負荷インピーダンスの値によって変わることがわかる．電圧定在波の最大値と最小値の比を電圧定在波比（Voltage Standing Wave Ratio : VSWR）といい，ρ で表わす．

$$\rho=\frac{|V|_{\max}}{|V|_{\min}}=\frac{1+|\Gamma_l|}{1-|\Gamma_l|}=\frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} \tag{19}$$

$$|\Gamma_l|=|\Gamma|=\frac{\rho-1}{\rho+1},\qquad \Gamma=\frac{Z-Z_0}{Z+Z_0}$$

負荷インピーダンスが決まると，負荷端での反射係数 Γ_l が決まり，さらに式(17)から線路上の任意の点における反射係数がわかる．これから線路上の任意の点から負荷側を見たインピーダンスが導かれる．

$$Z=Z_0\frac{Z_l-jZ_0\tan\beta(z-l)}{Z_0-jZ_l\tan\beta(z-l)} \tag{20}$$

実用としては，線路の特性インピーダンスは一定ではなく，着目点の負荷からの距離を用いたほうが便利な場合が多いため，位置の座標の変換と，インピーダンスを Z_0 で規格化して，線路の規格化インピーダンス $\hat{Z}$ として表現することが多い．

$$\hat{Z}=Z/Z_0,\qquad \hat{Z}_l=Z_l/Z_0 \tag{21-1}$$

$$\hat{Z}=\frac{\hat{Z}_l+j\tan\beta d}{1+j\hat{Z}_l\tan\beta d} \tag{21-2}$$

d は着目点を負荷から計った距離であり，伝送線路上で負荷側を見たインピーダンスの距離に関する依存性が示されている．特に短絡された伝送路は $\hat{Z}_l=0$ であり，純粋な虚部のみとなる．$j\tan\beta d$ の性質から，短絡端から1/4波長まではインダクタンス成分，1/4から1/2波長まではキャパシタンス成分として働くことがわかる．この性質を使って，伝送線路を素子部品として用い，インピーダンス整合を取るためのスタブチューナーに使用することができる．

(3) 四端子行列表示とスミスチャートによるインピーダンス整合

伝送線路を解析的に扱い，計算で整合条件を探す場合は，線路を四端子行列（縦続行列）で表現してあると便利である．負荷と途中の伝送路，およびスタブチューナー等の接続を四端子行列の積で表わし，入射点におけるインピーダンスを整合条件（$Z=Z_0$）に一致させる条件を捜すと，解析的にチューナーの長さや，整合器の集中定数素子の値を求めることができる．Fig. 17の配位で式(7-3)の表現を用いた解析から，長さ l の線路の四端子行列（縦続行列，基本行列）の値が求められ

$$\begin{bmatrix}V_1\\I_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & B\\C & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_2\\-I_2\end{bmatrix}\quad\text{の時,}$$

$$\begin{bmatrix}A & B\\C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\beta l & jZ_0\sin\beta l\\jY_0\sin\beta l & \cos\beta l\end{bmatrix} \tag{22}$$

と表現される．主線路の途中に挿入された素子は，集中定数素子と同じ扱いで行列表示をして用いる．伝送路の整合条件を計算機で最適化するには，電力を送る点でのインピーダンスの虚部をゼロにし，実部を線路の特性インピーダンスに合わせて各部のパラメータを探すか，反射係数の絶対値を最小にするよう最適化する．

解析的な扱いでは線路の電圧電流分布やインピーダンス等のイメージが掴みにくく，また面倒な計算をせずに整合を取ろうという場合に，スミスチャートを用いると便利である．高周波工学の世界では非常に良く用いられている図表である．

スミスチャートは反射係数 Γ とインピーダンス Z を図表化したもので，簡単にインピーダンス変換を図から求めることができる．Fig. 18に示すように，インピーダンス平面（Fig. 18 (a)）を反射係数平面（Fig. 18 (b)）へ写像したもので，スミスチャート上では円の中に線路上の各点から負荷側を見た規格化インピーダンスが全て表現される．Fig. 18の横軸上がインピーダンスの実軸で，上側がリアクタンス成分のインダクタンスを持ち，下側がキャパシタンス成分を持つインピーダンスに対応している．スミスチャートが

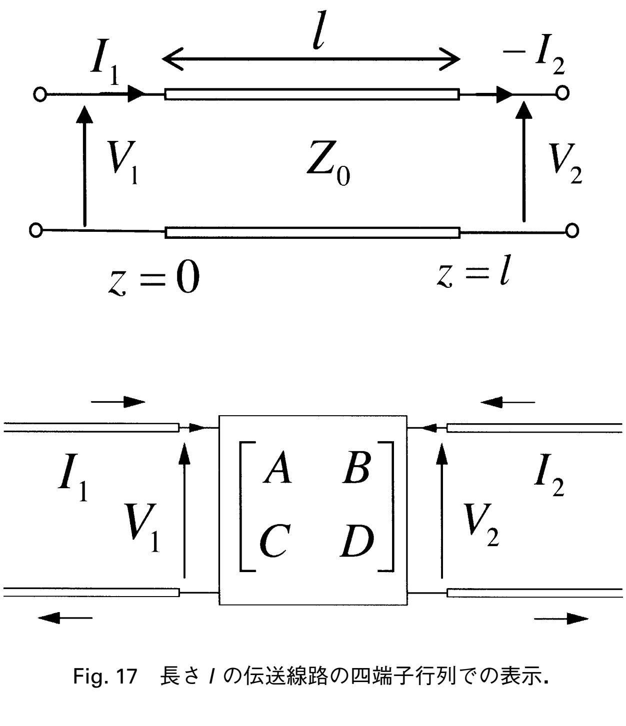

Fig. 17　長さ l の伝送線路の四端子行列での表示．

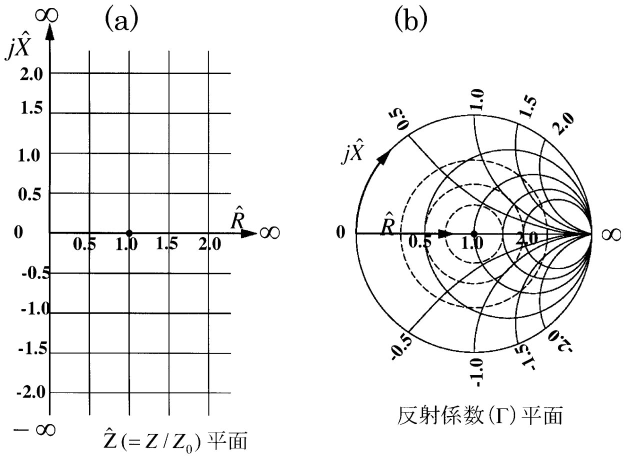

Fig. 18 インピーダンス平面(a)と反射係数平面（(b)：スミスチャート）の写像を示す．

どうやって回路を巧妙に表現しているかという理論は専門書[5]を見ていただくことにして，ここでは図表の基本的な性質と，整合を取る手順の一例を説明する．

チャートの中心点は $Z = Z_0$ の整合条件を表し，この点では ρ(VSWR) = 1 である．ρ が 1 から無限大までの間で ρ = 一定 の条件が同心円で表わされ，外周上では ρ 無限大である．ρ の値は中心から右側の実軸上の規格化インピーダンスの値と一致している．図の右端から放射状に出ている互いに直交するグリッド線は実部一定と虚部一定の目盛りになっている．また単に伝送線路上を移動することは，同心円上を動くことに対応しており，時計回りが電源側への移動で，一周が半波長分である．仮に，短絡された線路の端では，抵抗がゼロ，リアクタンス分もゼロであり，チャート上では実軸の左端に位置する．ここから電源側に移動する（外周上を時計回りする）とインダクタンス成分のみで大きさが変化する，1/4 波長動くとチャートの右端(実軸上)に来る．ここから負荷側を見た時，インピーダンスは無限大であり，開放端と同等である．一周すると 1/2 波長の移動であり，式(21)の説明における 1/2 波長で，伝送路のリアクタンス成分が元に戻ることを説明している．負荷端に有限な抵抗成分も持つインピーダンスが接続されている場合は，VSWR の一定な内部の同心円上を移動する．1/2 波長の移動で元の位置に戻ることは同じである．

問題によってはインピーダンスではなくて，アドミッタンスで議論した方が便利な場合もある．回路に並列に入った素子の効果を見るときなどである．その場合はこの図をアドミッタンスチャートとして使う．アドミッタンスの値はインピーダンスチャート上の位置から，点対称の位置に移動した点である．(数値はインピーダンスチャートで読む．)

以上の基本知識を使い，Fig. 19 を見ながら実際のインピーダンス整合の説明をおこなう．負荷から適当な距離を離して設置した 1/4 波長間隔の 2 本スタブチューナー（可変長の短絡線路）を用いて，インピーダンス整合を取ることを考える．これは標準的な整合回路である．終端の負荷インピーダンスをスミスチャート（インピーダンスチャート）上で規格化インピーダンスとして Z_l がプロットしてある．負荷からスタブ 2 まで線路上を長さ l 分移動したとき，スミスチャート上を時計回りに A 点に移動したとする．伝送路上の単なる電源側への移動はチャート上では時計回りに動くことは上で述べた．A 点をアドミッタンスチャート上にプロットすると，点対称の A′ 点になる．並列に主線路に接続されているスタブ 1 によって，その点のサセプタンス分を適切に変化させて $G = 1$ の円の点対称の円(点線)上の点A″に移動させることにする．スタブ 1 からスタブ 2 までの移動は 1/4 波長であるから，上に述べたように同心円上を180度周り，B 点に移動する．その点で並列に挿入されているスタブ 2 により適当なサセプタンス分を与え，O 点まで移動させると整合が取れることになる．スタブは短絡された伝送線路であり，その規格化インピーダンスは $j\tan\beta d$ で表されることは式(21)で述べた．短絡線路の長さを調節して任意の希望するインピーダンス（サセプタンス）を作ることができる．

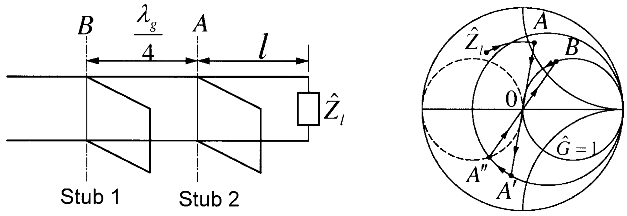

Fig. 19 2 本スタブチューナーによるインピーダンス整合調整の手順を示す．
スミスチャート上で初期位置（負荷端）は Z_l で，線路上を電源側へ移動しながら，中心点 O へ持ってくると整合条件成立で，反射波がゼロになる．

2 本スタブではいつも整合が取れるとは限らない．もし負荷から長さ l だけ移動してスタブ 1 の位置へきたとき，$G = 1$ の円の中に入ってしまうと，点線の円上に移動させることはできないのは明らかである．長さ l を変えることができれば良いが，不便なときは 3 本のスタブを使うとこの問題は解決する．

以上はスタブチューナーを用いたインピーダンス整合の基礎であるが，実際の加熱装置では電圧分布を考えなければならない．大電力の加熱装置では，伝送線路上の耐電圧が問題になるからである．スタブチューナーの中の電圧が大きくならないように適切な条件を探すことになる．この問題はイオンサイクロトロン加熱の技術解説の中で述べる．

2.2.2 マイクロ波，ミリ波の伝送

核融合プラズマでの加熱・電流駆動では，低域混成波共鳴周波数がギガヘルツ帯，電子サイクロトロン共鳴周波数が百ギガヘルツ帯になることにより，ギガヘルツ (10^9 Hz) から数百ギガヘルツ (10^{11} Hz) に及ぶ高周波が用いられる．波長でいえば，3 cm から 1 mm 程度に対応する．伝送されるパワーレベルは，1 系統あたり 1 MW 以上に及ぶ．この周波数帯では，波長が伝送系の構成部品と同程度の大きさになるために，平行導線や同軸ケーブルなどの通常の伝送線路的な取り扱いは十分ではなく，電磁界的な取り扱いが主となる．マイクロ波伝送路については，多数の参考書が出版されているので，詳しくはそちらを参照していただきたい[4, 6, 7]．

これから考察する伝送路では，まず下記のマクスウェル方程式と状態関係式より始めることになる．大電力電磁波伝送路としては，断面において周囲を金属で囲まれた空間構造を考えるので，内導体を持つ同軸管を除いては，電磁界の存在する空間には実電荷や実電流は存在しない．したがって，次式のように書ける．

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{23a}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{23b}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=0 \tag{23c}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{23d}$$

$$\boldsymbol{D}=\epsilon\boldsymbol{E} \tag{23e}$$

$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H} \tag{23f}$$

ここで，$\boldsymbol{E}$ は電界，$\boldsymbol{H}$ は磁界，$\boldsymbol{D}$ は電束密度，$\boldsymbol{B}$ は磁束密度を表す．ϵ は誘電率テンソル，μ は透磁率テンソルである．ここで議論する伝送路については，時間変化を $\mathrm{e}^{j\omega t}$ の形を仮定し波源を考えないとすると，上式は，次に示す電界と磁界についてのベクトルヘルムホルツ方程式の形になる．

$$\nabla^2\boldsymbol{E}+k^2\boldsymbol{E}=0$$
$$\nabla^2\boldsymbol{H}+k^2\boldsymbol{H}=0 \tag{24}$$

ここで，k は伝搬媒質中の波数で，位相速度を v として，

$$k^2=\omega^2\epsilon\mu=(\omega/v)^2 \tag{25}$$

である．伝送路の断面形状や媒質の物性値は，簡単のため伝搬方向（z 軸とする）に一様であると仮定し，z 軸方向に伝搬する波動を考える．z 軸方向の波数を k_z で表すと，$+z$ 軸方向に伝搬する波動は $\mathrm{e}^{-jk_z z}$ の形になる．ヘルムホルツ方程式(24)は，伝搬方向とそれと垂直方向に変数分離ができて，ナブラ記号は $\nabla_t+\nabla_z=\nabla_t-jk_z\boldsymbol{a}_z$ となる．ここで，$\boldsymbol{a}_z$ は z 軸方向の単位ベクトルである．

マクスウェル方程式は，すべての電磁界を横成分と軸成分に分解し，z 依存性を分離することによって，非常に簡単化される．時間依存性を省略して，

$$\boldsymbol{E}(x,y,z)=\boldsymbol{E}_t(x,y,z)+\boldsymbol{E}_z(x,y,z)$$
$$=\boldsymbol{e}_t(x,y)\mathrm{e}^{-jk_z z}+\boldsymbol{e}_z(x,y)\mathrm{e}^{-jk_z z}$$

$$\boldsymbol{H}(x,y,z)=\boldsymbol{H}_t(x,y,z)+\boldsymbol{H}_z(x,y,z)$$
$$=\boldsymbol{h}_t(x,y)\mathrm{e}^{-jk_z z}+\boldsymbol{h}_z(x,y)\mathrm{e}^{-jk_z z} \tag{26}$$

の形に書くと，次の簡略されたマクスウェル方程式に到達する．

$$\nabla_t\times\boldsymbol{e}_t=-j\omega\mu\boldsymbol{h}_z \tag{27a}$$

$$\boldsymbol{a}_z\times\nabla_t e_z+jk_z\boldsymbol{a}_z\times\boldsymbol{e}_t=j\omega\mu\boldsymbol{h}_t \tag{27b}$$

$$\nabla_t\times\boldsymbol{h}_t=-j\omega\epsilon\boldsymbol{e}_z \tag{27c}$$

$$\boldsymbol{a}_z\times\nabla_t h_z+jk_z\boldsymbol{a}_z\times\boldsymbol{h}_t=-j\omega\epsilon\boldsymbol{e}_t \tag{27d}$$

$$\nabla_t\cdot\boldsymbol{e}_t=jk_z e_z \tag{27e}$$

$$\nabla_t\cdot\boldsymbol{h}_t=jk_z h_z \tag{27f}$$

実用的な導波管に関しては，一部の成分を持っているいくつかの電磁界によってすべての境界条件を満たすことができる．よく使われるものとして，以下の 3 種類がある．

1）TEM（Transverse Electric and Magnetic）モード

電界と磁界ともに z 軸方向成分がなく，$E_z=H_z=0$ である．式(27)よりこの場合には，電界はスカラ関数 $\Phi(x,y)$ の勾配によって表される．この Φ は 2 次元のラプラス方程式を満たす．断面形状から課せられる境界条件のもと Φ が求められれば，式(27)と $k_z=k$ となることを使って，次のようにすべての電磁界を求めることができる．

$$\boldsymbol{E}_t=-\nabla_t\Phi(x,y)\mathrm{e}^{-jkz} \tag{28}$$

$$\boldsymbol{H}_t=\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\boldsymbol{a}_z\times\boldsymbol{E}_t$$

2）TE（Transverse Electric）モード

$E_z=0$，$H_z\neq 0$ であり，電界は z 軸に垂直面内のみに存在し，磁界の z 軸方向成分よりすべての成分が求められる．すなわち TE モードに対しては，h_z がポテンシャル関数の役割を果たす．磁界の z 成分に対するヘルムホルツ方程式(24)式

$$\nabla_t^2 h_z+k_c^2 h_z=0 \tag{29}$$

ここで，

$$k_c^2=k^2-k_z^2 \tag{30}$$

を適当な境界条件の下で解くことになる．h_z が求まると，簡略化されたマクスウェル方程式から得られる関係式により，すべての電磁界成分が求められる．

$$\boldsymbol{h}_t=-\left(\frac{jk_z}{k_c^2}\right)\nabla_t h_z \tag{31a}$$

$$\boldsymbol{e}_t=-\left(\frac{k}{k_z}\right)\left(\frac{\mu}{\epsilon}\right)\boldsymbol{a}_z\times\boldsymbol{h}_t \tag{31b}$$

$$\boldsymbol{H}=(\boldsymbol{h}_t+\boldsymbol{h}_z)\mathrm{e}^{-jk_z z} \tag{31c}$$

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_t\mathrm{e}^{-jk_z z} \tag{31d}$$

3）TM（Transverse Magnetic）モード

$H_z=0$，$E_z\neq 0$ であり，磁界は z 軸に垂直面内のみに存在し，電界の z 軸方向成分よりすべての成分が求められる．すなわち TM モードに対しては，e_z がポテンシャル関数の役割を果たす．TE モードと同様に考えて，電界の z 成分に対するヘルムホルツ方程式(24)式

$$\nabla_t^2 e_z+k_c^2 e_z=0 \tag{32}$$

ここで，

$$k_c^2=k^2-k_z^2 \tag{33}$$

を適当な境界条件の下で解くことになる．e_z が求まると，簡略化されたマクスウェル方程式から得られる関係式

により，すべての電磁界が求められる．

$$\boldsymbol{e}_t = -\left(\frac{jk_z}{k_c^2}\right)\nabla_t e_z \tag{34a}$$

$$\boldsymbol{h}_t = -\left(\frac{k}{k_z}\right)\left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)\boldsymbol{a}_z \times \boldsymbol{e}_t \tag{34b}$$

$$\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{e}_t + \boldsymbol{e}_z)\mathrm{e}^{-jk_z z} \tag{34c}$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{h}_t \mathrm{e}^{-jk_z z} \tag{34d}$$

一般に TE または TM モードのみでは，境界条件を満足できない場合がある．例えば金属内壁面に誘電体を貼り付けた導波管や，壁面に細かい溝を掘ったコルゲート導波管などである．この場合でも TE モードと TM モードの線形結合を使って，境界条件を満足させることができる．この場合には，すべての電磁界成分を持つことになりハイブリッドモードと呼ばれる．以下に，よく使われている導波管について具体的に関係式を挙げておく．

2.2.3 矩形導波管

Fig. 20 に示した形状の導波管を矩形（方形）導波管と呼ぶ．この導波管では，TEM モードは伝搬できず，TE または TM モードが伝搬可能である．金属壁面上に課せられる境界条件によって，電磁界の姿態（モード）がとびとびに決定される．この際，式(29)や(32)中の k_c で表される遮断波数は離散値をとることになる．遮断波数と呼ぶのは，それよりも小さな波数を持つモードは，その導波管を伝搬できないからである．

境界条件として，TE モードについては，横方向磁界 $\boldsymbol{h}_t$ の法線成分が完全導体壁面上で零となる条件により，また TM モードでは，横方向電界 $\boldsymbol{e}_t$ の接線成分が壁面上で零となる条件より，k_c が離散値になる．式(29)と(32)で示されるヘルムホルツ方程式を，横方向に関するラプラシアンが直角座標において $\nabla_t^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ で表されることを使い，ポテンシャル関数を変数分離して解く．以下に重要な関係式を，TE モード，TM モードについてまとめて記述する．

x 軸方向の指標を m，y 軸方向の指標を n として，波動の遮断に関して，

$$k_{c,mn} = \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^{1/2} \quad ：遮断波数 \tag{35}$$

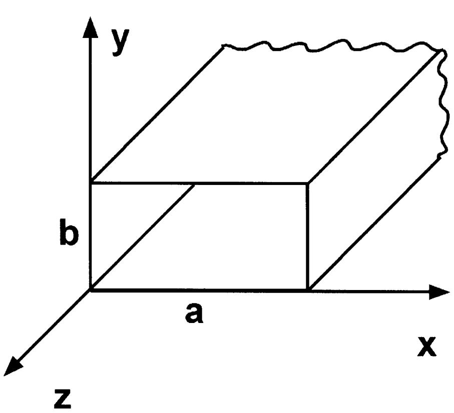

Fig. 20 矩形導波管の形状と座標系．

$$f_{c,mn} = \left(\frac{v}{2\pi}\right)k_{c,mn} \quad ：遮断周波数 \tag{36}$$

$$\lambda_{c,mn} = \frac{2\pi}{k_{c,mn}} = \frac{v}{f_{c,mn}} \quad ：遮断波長 \tag{37}$$

波動の伝搬に関して，

$$k_{z,mn}^2 = k^2 - k_{c,mn}^2 \quad ：z\ 軸方向伝搬定数 \tag{38}$$

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{k_{z,mn}} \quad ：管内波長 \tag{39}$$

$$v_p = \frac{\omega}{k_{z,mn}} = f\lambda_g = \frac{\lambda_g}{\lambda}v \quad ：位相速度 \tag{40}$$

$$v_g = \left(\frac{\mathrm{d}k_{z,mn}}{\mathrm{d}\omega}\right)^{-1} = \frac{v^2}{f\lambda_g} = \frac{\lambda}{\lambda_g}v \quad ：群速度 \tag{41}$$

ここで，f, ω は，波動の周波数および角周波数，v, λ は自由空間中での位相速度と波長であり，$v = 1/\sqrt{\epsilon\mu} = f\lambda$ である．媒質が真空であれば $v = c$（c は光速度）となる．$\lambda_g > \lambda$ が常に成り立つので，導波管中では位相速度 v_p は光速度 c よりも大きくなる．一方群速度 v_g は常に光速度 c より小さい．

先にも述べたように，矩形 TE モードに対しては，$E_z = 0$ であり，H_z は次式で与えられる．

$$H_z = A_{mn}\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\mathrm{e}^{-jk_{z,mn}z}$$

（矩形 TE モード）(42)

ここで，$m = 0,1,2,3,\ldots; n = 0,1,2,3,\ldots$，ただし m と n は同時に 0 にならない．他の成分については，式(31a)から(31d)を使って導出できるので省略する．

同様に，矩形 TM モードについては，$H_z = 0$ であり，E_z は次式で与えられる．

$$E_z = A_{mn}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\mathrm{e}^{-jk_{z,mn}z}$$

（矩形 TM モード）(43)

ここで，$m = 1,2,3,\ldots; n = 1,2,3,\ldots$ である．他の成分については，式(34a)から(34d)を使って導出できるので省略する．

$a > b$ の場合には，最も低次のモードは TE_{10} モードであり，式(35)より $k_{c,10} = \pi/a$ または $\lambda_{c,10} = 2a$ となる．すなわち遮断波長は，導波管断面の長手方向の長さ a の 2 倍になる．さらに，次の低次モード TE_{01} まで唯一の伝搬モードであり，矩形導波管では非常に重要な基本モードである．

規格化定数 A_{mn} は，ポインティングベクトルの z 成分を導波管断面にわたって積分したものが伝送電力に等しいことより，次式の関係より決定される．

$$P_{mn} = \frac{|A_{mn}|^2 ab}{\epsilon_{0m}\epsilon_{0n}}\left(\frac{k \cdot k_{z,mn}}{k_{c,mn}^2}\right)\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad（矩形 TE モード）\tag{44}$$

$$P_{mn} = \frac{|A_{mn}|^2 ab}{\epsilon_{0m}\epsilon_{0n}}\left(\frac{k \cdot k_{z,mn}}{k_{c,mn}^2}\right)\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \quad（矩形 TM モード）\tag{45}$$

ここで，ϵ_{0m} はノイマン係数で $m=0$ のとき1に等しく，$m>0$ のとき2に等しい．同じ値の m と n に対しては TE_{mn} モードと TM_{mn} モードは同じ伝搬定数を持っており縮退していることになる．さらに，$a=b$ の時には，TE_{mn}，TE_{nm}，TM_{mn}，TM_{nm} モードはすべて同じ伝搬定数を持ち縮退する．

2.2.4　円形導波管

半径 a の円形断面を持つ導波管を円形導波管と呼び，Fig. 21 に形状と座標系を示す．円形導波管では，(r,ϕ,z) による円筒座標系で考えるのが便利である．矩形導波管の場合と同様に，式(29)と(32)で示されるヘルムホルツ方程式を，ポテンシャル関数を変数分離して解く．円筒座標では横方向に関するラプラシアンが，

$$\nabla_t^2=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

で表されることを使う．矩形導波管では，電磁界は三角関数によって表されたが，円形導波管では，周方向には三角関数，半径方向にはベッセル関数で表される．以下に重要な関係式を，TE モード，TM モードについてまとめて記述する．ϕ 方向の指標を m，r 方向の指標を n として，波動の遮断に関して，

$$k_{c,mn}=\frac{\nu'_{mn}}{a}\quad\text{：TE モードの遮断波数}\tag{46}$$

$$k_{c,mn}=\frac{\nu_{mn}}{a}\quad\text{：TM モードの遮断波数}\tag{47}$$

となる．他の関係式については，式(36)から式(41)が同様に成り立つ．ここで，ν'_{mn} はベッセル関数の微分 $J'_m(x)=0$ の n 番目の根，ν_{mn} はベッセル関数 $J_m(x)=0$ の n 番目の根である．

電磁界の表式については，TE モードについては H_z 成分と式(31a)から式(31d)の関係式を使って，TM モードについては E_z 成分と式(34a)から式(34d)の関係式を使って求められる．以下に TE モードと TM モードの z 成分のみを示す．

$$H_z=A_{mn}J_m\left(\frac{\nu'_{mn}r}{a}\right)e^{-jk_{z,mn}z}\begin{cases}\cos m\phi\\ \sin m\phi\end{cases}\quad\text{(円形 TE モード)}\tag{48}$$

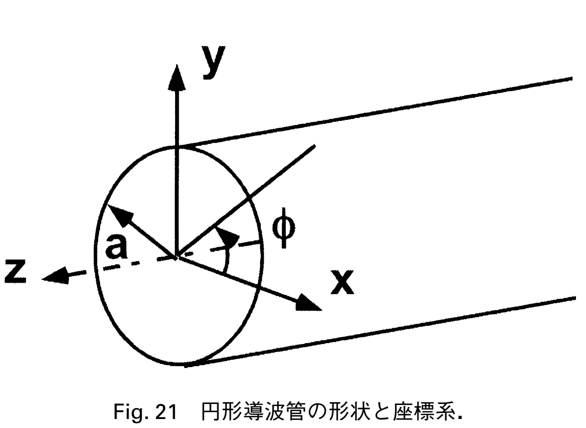

Fig. 21　円形導波管の形状と座標系．

$$E_z=A_{mn}J_m\left(\frac{\nu_{mn}r}{a}\right)e^{-jk_{z,mn}z}\begin{cases}\cos m\phi\\ \sin m\phi\end{cases}\quad\text{(円形 TM モード)}\tag{49}$$

矩形導波管の場合と同じように，規格化定数 A_{mn} は，ポインティングベクトルの z 成分を導波管断面にわたって積分したものが伝送電力に等しいことより決定され，次式のようになる．

$$P_{mn}=\frac{|A_{mn}|^2\pi}{4}\left(\frac{k\cdot k_{z,mn}}{k_{c,mn}^4}\right)(\nu'^2_{mn}-n^2)J_m^2(\nu'_{mn})\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}\quad\text{(円形 TE モード)}\tag{50}$$

$$P_{mn}=\frac{|A_{mn}|^2\pi}{4}\left(\frac{k\cdot k_{z,mn}}{k_{c,mn}^4}\right)\nu_{mn}^2J'^2_m(\nu_{mn})\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\quad\text{(円形 TM モード)}\tag{51}$$

2.2.5　コルゲート導波管[8]

高パワー伝送時に，導波管内でのアーキングを抑え，また長距離伝送でも損失が少ないようにするためには，通常，導波管径を波長よりかなり大きくとる必要がある．このような導波管をオーバーサイズ導波管と呼ぶ．また，プラズマ装置と加熱装置の大型化に伴って，装置間の距離は 100 m 程度にもなり長距離伝送時の損失も無視できないようになってきている．コルゲート導波管は，ECH で使用される大電力ミリ波の長距離伝送用の導波管として近年多数使用されてきている．

コルゲート導波管の表面形状を Fig. 22 に示す．円形導波管の内壁面に多数溝を掘った構造になっている．溝の周期を p，溝の底の部分の長さを w，溝の深さを d と定義する．オーバーサイズのコルゲート導波管において，特に低損失伝送モードとして使用されるのが HE_{11} モードである．このモードの特長として，壁面電流がほとんど流れず，壁損失が小さい，壁面形状の変形によるモード変換損失が比較的小さい，直線偏波に近いため偏波がよく定義できる，壁面付近の電磁界が弱いため導波管のギャップ・ベンド・導波管端での回折損失が小さい，ことなどが挙げられる．半径 a のコルゲート導波管における HE_{11} モードの構造(a)と，電界強度分布(b)を Fig. 23 に示す．このモードは TM_{11} モードと TE_{11} とのある重みをつけた重ね合わせと考えられ，結果としての電界ベクトルは非常に直線的で，その強度分布は，壁面で零となるベッセル関数 $J_0(2.405r/a)$ のような変

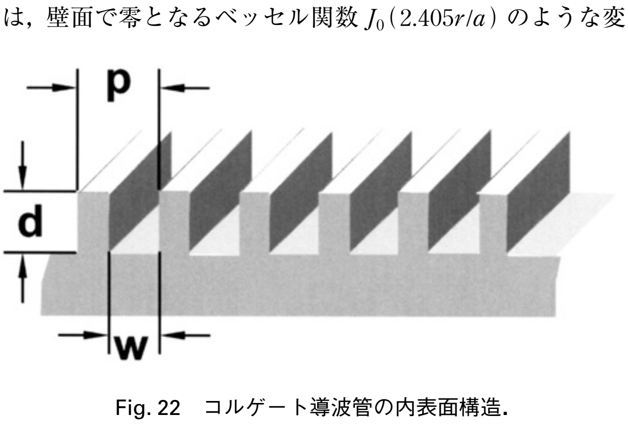

Fig. 22　コルゲート導波管の内表面構造．

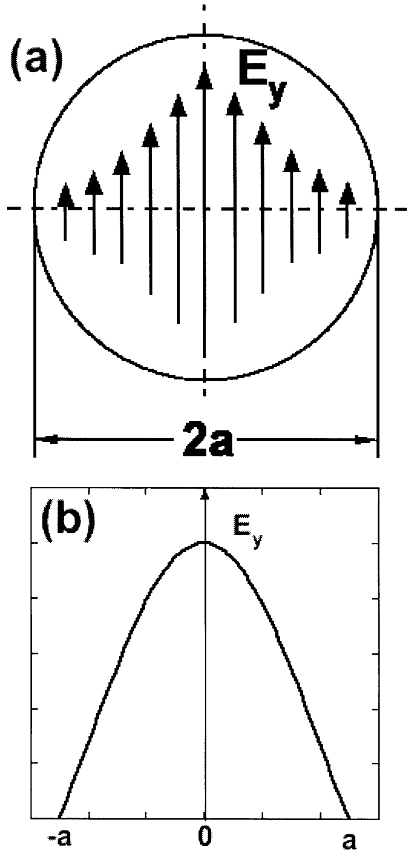

Fig. 23 HE$_{11}$モード 円形コルゲート導波管における強度と偏波(a)，電界の強度分布(b).

化をする．この性質のために開口端からの放射パターンは，直交偏波成分が少なく，サイドローブレベルが低く，自由空間でのガウスビームに効率よく結合される．

導波管断面を横切るパワー分布 $P_{\mathrm{D}}(r)$ は，全パワーフラックスを P_z として，

$$P_{\mathrm{D}}(r)=\frac{P_z}{\pi a^2}\frac{J_0^2(2.405r/a)}{J_1^2(2.405)} \tag{52}$$

となり，導波管中心におけるパワー密度は，平坦分布の場合のパワー密度 $P_z/(\pi a^2)$ の約 4 倍になる．

通常，導波管における損失は，壁面を流れる電流のオーミック損失によるものである．したがって，壁面電流に関係する磁界成分を小さくすれば損失は小さくなる．例えば，円形導波管の TE_{0n} モードは，磁界の周方向成分 h_ϕ を持たないため損失が小さい．コルゲート導波管においては，h_ϕ は大きな軸方向リアクタンスによって抑えられてしまう．また，h_z は半径の 3 乗で減衰する．こうしてコルゲート導波管では，伝送損失が低く抑えらる．

2.2.6 ガウスビーム光学とビーム伝送

ミリ波や光学で使用されるガウスビームについて簡単に説明する．式(24)で記述される自由空間中での波動の伝搬は，その電磁界成分の一つに注目すれば，次のスカラヘルムホルツ方程式になる．

$$(\nabla^2+k^2)U=0 \tag{53a}$$

$$U=u(x,y,z)\mathrm{e}^{-jkz} \tag{53b}$$

近軸近似を使い，$\partial^2u/\partial z^2$ が無視できると仮定すると，式(53)は，

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}-j2k\frac{\partial u}{\partial z}=0 \tag{54}$$

となる．この式についてガウスビームの解を次の形に仮定すると，

$$u(\rho^2,z)=\mathrm{e}^{-j[p(z)+\frac{k}{2q(z)}\rho^2]} \tag{55}$$

ここで，$\rho^2=x^2+y^2$ である．上式を式(54)に代入して，すべての ρ, z に成り立つようにすると，ガウスビームとして以下の形が得られる．

$$U(\rho,z)=\frac{w_0}{w(z)}\underbrace{\exp\left[-j\left\{kz+\frac{k\rho^2}{2R(z)}-\tan^{-1}\frac{2z}{kw_0^2}\right\}\right]}_{\text{位相項}}$$
$$\times\underbrace{\exp\left[-\left\{\frac{\rho}{w(z)}\right\}^2\right]}_{\text{振幅項}} \tag{56}$$

ここで，

$$w(z)=w_0\sqrt{1+\left(\frac{z}{z_{\mathrm{R}}}\right)^2} \quad \text{(ビーム半径)} \tag{57}$$

$$R(z)=z\left[1+\left(\frac{z_{\mathrm{R}}}{z}\right)^2\right] \quad \text{(波面の曲率半径)} \tag{58}$$

である．ガウスビームの諸パラメータの関係を Fig. 24 に示す．$z=0$ でのビーム半径を w_0 と定義し，ビームウェストと呼ぶ．z_{R} はレイリー距離と呼ばれ，

$$z_{\mathrm{R}}=\frac{kw_0^2}{2}=\frac{\pi w_0^2}{\lambda} \tag{59}$$

$z=z_{\mathrm{R}}$ では，波面の曲率半径 R が最小となる．ビームの広がり角（半角）については，$z\gg z_{\mathrm{R}}$ の領域において，

$$\theta\simeq\frac{w}{R}\simeq\frac{w_0}{z_{\mathrm{R}}}=\frac{\lambda}{\pi w_0} \tag{60}$$

である．通常測定されるのはパワー分布である．上式で与えられる強度分布は例えば電界の強度分布であるから，パワー分布としては式(57)において，ビームウェスト半径 w_0 を $w_0/\sqrt{2}$ で置き換えて考えればよいことになる．

ガウスビームの伝送を記述するには，式(55)における $q(z)$ というパラメータが重要な役割を演じる．改めて q を書き下し，ビーム半径の表式(57)と波面の曲率半径の表式(58)を使って書き直すと，

$$\frac{1}{q(z)}=\frac{1}{z+jz_{\mathrm{R}}}=\frac{1}{R(z)}-j\frac{\lambda}{\pi w(z)^2} \tag{61}$$

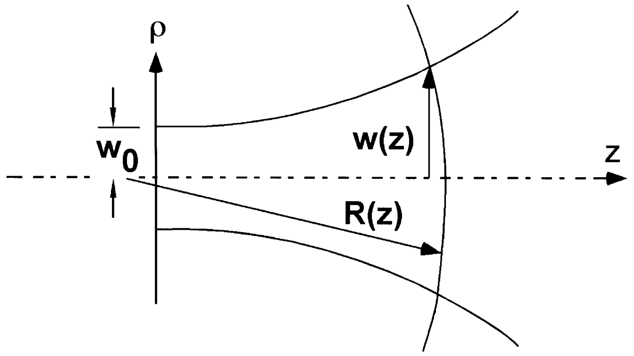

Fig. 24 ガウスビームの諸パラメータ.

という形に書け，ビーム半径と波面の曲率半径を同時に記述できる．パラメータ q の発展は，次の双一次変換を行うことによって追跡できる．

$$q_{\mathrm{out}}=\frac{q_{\mathrm{in}}A+B}{q_{\mathrm{in}}C+D} \tag{62}$$

例えばビームの並進方向の発展 d については，$q(z+d)=q(z)+d$ であるから，

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{63}$$

焦点距離 f を持つ薄いレンズについては，レンズ透過後の波面の曲率半径が $1/R_{\mathrm{e}}=1/R+1/f$ となるので，

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \tag{64}$$

で与えられる．

ビームウェスト位置においては $R=\infty$，$w=w_0$ であるから，ビームウェスト位置とその半径がわかれば，式(62)の双一次変換によって，あらゆる位置における q パラメータを求めることができる．さらにシステムを構成する各要素について $ABCD$ の値がわかれば，これらを行列的に乗じることによってシステム全体としての $ABCD$ が計算でき，これに対して双一次変換を行うことで，最終的なビームパラメータを求めることができる．

参考文献

[1] S.H. Gold and G.S. Nusinovich, Rev. Sci. Instrum. **68**, 3945-3974 (1997).

[2] S.J. Smith and E.M. Purcell, Phys. Rev. **92**,1069 (1953).

[3] J.D.Jackson, *Classical Electrodynamics* (2nd ed.) (John Wiley & Sons Inc., 1975).

[4] 中島将光：マイクロ波工学（森北出版，1975）.

[5] 関口 忠：電気回路 II（オーム社，1971）.

[6] R.E. Collin, *Field Theory of Guided Waves* (2nd ed.) (IEEE press, 1991).

[7] J.A. Kong, Electromagnetic *Wave Theory* (Wiley, John & Sons, Incorporated, 1986).

[8] J.L. Doane, Infrared Millimeter Waves **13**,123 (1985).

武藤 敬（むとう たかし）

京都大学卒，京都大学ヘリオトロン核融合研究センターにてヘリオトロン装置のICRF加熱を研究，平成元年から核融合科学研究所に移り，LHDのICRF加熱を担当し，特に定常加熱用の機器開発とプラズマ加熱を研究．趣味は，結果が予想と微妙にズレるプラズマ実験．他にはテニス，ゴルフ，囲碁等で，自分では器用な方だと思っているが，もっと風変わりで役に立つ趣味はないかと探している．

下妻 隆（しもづま たかし）

1984年京都大学大学院理学研究科博士課程修了．1993年まで三菱電機㈱中央研究所でジャイロトロン管開発研究を行う．1994年1月核融合科学研究所助手，2001年同助教授，現在に至る．ジャイロトロン管開発，ECHシステム開発，LHD装置におけるそれらを使ったECH実験を行っている．近年は加熱だけではなく，プラズマの閉じ込め改善や輸送研究まで興味は広がってきているものの，ジャイロトロンからプラズマまで，個人研究からプロジェクト研究まで，テクノロジーからフィジクスまでを行きつ戻りつしている今日この頃です．