

フレキシブルリンクの制御 資料-4

PI 制御

数理工学コース 制御システム論分野 大木

2013年9月24日

概要

古くから現在にいたるまで、制御技術が用いられている現場では、**PID 制御**と呼ばれる制御法が、大半を占めると言われる。P は比例 (proportion), I は積分 (integration), D は微分 (differential) を意味し、比例器、積分器、微分器のゲイン k_P, k_I, k_D を調整することで、制御目標を達成させる制御法を PID 制御と呼ぶ。電気回路系では、抵抗、コンデンサ、コイルがそれぞれ比例器、積分器、微分器に対応する。

本稿では、PID 制御器の基本的性質を学ぶ。まず、各制御器の特性について学び、パラメータを動かしたとき、安定性や性能がどのように変化するかを学ぶ。次に、それらを組み合わせた PID 制御器について学ぶ。また、最近では I-PD 制御、もしくは北森法と呼ばれる制御手法も多く用いられている。これについても学び、所望の特性を得るための制御器の設計法を学ぶ。PID 制御を主として扱っている参考文献として、例えば [1-4] を挙げておく。

1 PID 制御器の基本特性

以下では、図 1 のフィードバック制御系を考える。ここで $P(s)$ は対象系の伝達関数、 $C(s)$ は制御器の伝達関数、 $H(s)$ はセンサの伝達関数を表わす。測定できる信号は出力 $y(t)$ であ

り、 $d(t)$ は外乱入力、 $r(t)$ は参照入力 (目標値入力)、 $r_2(t)$ はセンサ雑音を表わす。

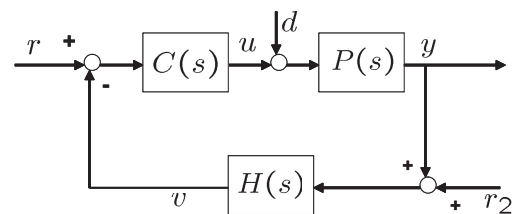


図 1 フィードバック制御系 [5].

本節では、 $H(s) = 1$ と固定する。このとき、制御器 $C(s)$ は、出力 y と目標値 r の偏差を受け取り、それに応じた制御入力を対象に返す。すなわち、PID 制御器は、偏差信号の増幅、偏差履歴、および傾きをシステムに返す働きをする。

1.1 比例制御器

比例制御器のみを用いた制御を、比例制御という。制御器に動的要素を含まないため、静的制御 (static control) とも呼ばれる。比例制御器による安定化の問題は、Syrmos ら [6] がまとめているので、詳しくはそちらを参照されたい。

比例制御器は、図 1 の $C(s) = k_P$ (定数パラメータ) とすることで実現される。このとき、目標値 r から出力 y までの伝達関数は、次で与えられる。

$$G(s) = \frac{k_P P(s)}{1 + k_P P(s)}.$$

このとき、以下の問いに答えよ。

問題 1. (1) $P(s) = \frac{1}{(s+a)}$, $a \in \mathbb{R}$ とする.

このとき, 閉ループ系を安定化する k_p の範囲を求めよ.

(2) $P(s) = \frac{1}{(s+a)(s+b)}$, $a, b > 0$ とする

(1 次系の直列結合). このとき, 閉ループ系を安定化する k_p の範囲を求めよ. また, 閉ループ系の極が k_p の関数としてどのように表わされるか求め, k_p を変化させたときの極の外形を複素平面上に図示せよ (これを根軌跡という).

(3) $P(s) = \frac{1}{s+a} + \frac{1}{s+b}$, $a, b > 0$ とする

(1 次系の並列結合). このとき, 閉ループ系を安定化する k_p の範囲を求めよ.

(4) $P(s) = \frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$, $a, b, c > 0$ とする.

このとき, 閉ループ系を安定化する k_p の範囲を求めよ.

(5) $P(s) = \frac{s-b}{(s+a)(s-a)}$, $a, b > 0$, $a > b$ のとき,

任意の k_p に対して P 制御では閉ループ系を安定化できないことを確かめよ.

(6) $P(s) = \frac{1}{s+a}e^{-sT}$, $a, T > 0$ はむだ時間

T を含む系である. むだ時間要素 e^{-sT} を次のように近似する (N 次の Pade 近似).

$$e^{-sT} = \frac{e^{-sT/2}}{e^{sT/2}} \simeq \frac{\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \left(-\frac{T}{2}s\right)^k}{\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \left(\frac{T}{2}s\right)^k}$$

(a) $N = 1$ のとき, $\tilde{P}_1(s) = \frac{2-Ts}{(s+a)(2+Ts)}$ を安定化する k_p

の範囲を求めよ.

(b) $N = 2$ のとき, $\tilde{P}_2(s) = \frac{2-Ts}{(s+a)(2+Ts)}$ を安定化する k_p

の範囲を求めよ.

(c) $N = 1$ のときと $N = 2$ のときの比

例ゲイン k_p について, $a = 1$ のとき, むだ時間 T の大きさと安定化する k_p の関係について考察せよ. 近似を大きくしていくと, k_p の範囲はどのように変化すると予想されるか?

安定なシステムの P 制御では, 必ず安定化する比例ゲイン k_p が存在する. このことを, いくつかの定理を天下一りに用いて示す. $P(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ とし, $D(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0$, $a_i > 0$, $N(s) = b_ms^m + \dots + b_0$, $b_i \in \mathbb{R}$ とする ($n \geq m$). また, $P(s)$ は安定であるとする. このとき, 閉ループ系の伝達関数の分母多項式は, $\varphi(s) = D(s) + k_p N(s)$ で与えられる. $n > m$ の場合, $b_i = 0$, $i = m+1, \dots, n$ とすることで, $\varphi(s)$ の各係数が $a_i + k_p b_i$ となるので, 十分小さな k_p に対して $\varphi(s)$ の根を考えることは, $D(s)$ の根の摂動問題を考えることと同値である.

一般に多項式は係数についても連続であり, 多項式の根も係数について連続である [7, 定理 2.7]. また, $D(s)$ の根を囲む単一の閉曲線 C に対し, $|f(s)| < |D(s)|$ を満たすならば, $D(s) + f(s)$ は閉曲線 C 内の根の数を変えないという性質をもつ (Rouché の定理 [7, 定理 2.6]). そこで, C を安定な領域 (開複素左半平面) で, $D(s)$ の全ての根を囲むように取る (無限円は含まない). その線上で, $f(s) = k_p N(s)$ を C 上で $|f(s)| < |D(s)|$ となるように k_p を十分に小さくとる. 閉曲線 C 上で $\max_{s \in C} |N(s)|$ および $0 < \min_{s \in C} |D(s)|$ は存在するので, k_p を

$$k_p < \frac{\min_{s \in C} |D(s)|}{\max_{s \in C} |N(s)|}$$

と選べば, $n \geq m$ より, 多項式 $\varphi(s)$ の根は全て閉曲線 C 内に存在する (*1. これは閉ループ

(*1 C は $D(s)$ の根を全て含む閉曲線なので, 閉曲線上

系の極が安定であることを意味する。

不安定極をもつ場合で安定化できない例をあげたが、比例制御器で安定化するための条件は得られている。例えば文献 [6] にまとめられているので、詳細はそちらを参照されたい。比例制御器そのものも安定なシステムであるので、安定な制御器による安定化を意味するが、安定な制御器による安定化 (強安定化という) の必要十分条件は、**PIP 条件 (parity interlacing property)** というものを満たせばよい [8, 5.6 節]。 $P(s)$ が非負の実軸上において、全ての実零点の組の間に偶数個の極をもつとき、 $P(s)$ は PIP 条件を満たすという。これが比例制御器で安定化するための必要条件である。

次に、少し特殊なシステムについて、比例制御を用いたフィードバック系の性質を調べてみよう。次の問題は、ムダ時間系の Pade 近似を行ったシステムに関する問題である。

問題 2. (1) $P(s) = \frac{s-a}{s+a}$, $a > 0$ とする。このとき、 $0 < k_P < 1$ は、閉ループ系のゲインを 1 未満にすることを確かめよ。また、 $k_P > 1$ は閉ループ系を不安定にすることも確かめよ。

(2) $|P(j\omega)| = 1, \forall \omega \geq 0$ となる安定な制御対象に対し、 $0 < k_P < 1$ は、閉ループ系のゲインを 1 未満にすることを確かめよ。

マイクをスピーカーに近づけると、ハウリングと呼ばれる現象が起こることが知られている。マイクは集音機であり、拾われた音がスピーカから出るまでに信号が増大される。マイクに拾われた音がスピーカーまで到達するには時間が必要であり、それがムダ時間となる。このシステムは、ムダ時間系を比例器でフィードバック制御しており、マイクからスピーカーま

で $|D(s)| \neq 0$.

での増幅率は $k_P > 1$ なので、上の問題はハウリングのメカニズムを制御論の視点から眺めたものである。

安定なシステムに P 制御を行う理由は、制御性能の改善のためである。安定な 1 次系の場合、比例ゲインを大きくすることで、速い応答が期待できる。しかし、むだ時間が少しでも生じると、安定化する比例ゲインには上限ができる。情報伝達速度は光速を超えないとされているので、物理的にはむだ時間は必ず生じるが、応答の速い電気系などでは、実質的にむだ時間を無視しても問題ない場合が多い。とくに不安定零点がある場合、比例ゲインを調整することが重要である。

Pade 近似は、制御理論では分母分子多項式の次数を同じにとる。このとき、ゲインは 1 となり、位相のみを変化させる伝達関数となる。むだ時間はゲインに関係しないため、位相特性のみを変化させる伝達関数で近似するためである。Pade 近似の次数は、制御に関係する周波数領域に対してむだ時間を十分近似できる次数まで用いる。むだ時間の Pade 近似は、必ず不安定零点を持つ。

問題 3. 微小な正定数 ϵ が、P 制御に及ぼす影響をみる。

(1) $P(s) = \frac{1}{(s-a)} + \frac{\epsilon}{(s+1)}$, $a > 1, a\epsilon \ll 1$ とする。

(a) ϵ が非常に小さいものとして無視し、 $\tilde{P}(s) = \frac{1}{(s-a)}$ を安定化する比例ゲイン \tilde{k}_P の条件を求めよ。

(b) $P(s)$ に対する安定化ゲイン k_P の条件を求め、 \tilde{k}_P と比較せよ。

(2) $P(s) = \frac{s+\epsilon}{(s+a)(s-a)}$, $a, \epsilon > 0$ とする。

(a) ϵ が非常に小さいものとして無視した伝達関数 $\tilde{P}(s) = \frac{s}{(s+a)(s-a)}$

は, P 制御で安定化できないことを確かめよ.

(b) $P(s)$ に対する安定化ゲイン k_P の条件を求めよ.

上の問題のように, 微小パラメータを無視してもほとんど問題ない場合と, 無視することで制御対象の性質 (比例制御における可制御性) が全く変わってしまう場合があることに注意しなければならない. 任意のパラメータ $a \in (b, c)$ に対して制御対象が安定であっても, その極限 $a = b$ (または $a = c$) においても安定であるとは限らないことに注意されたい. 微小パラメータを考える問題は, 正則摂動問題と特異摂動問題という 2 つにわけられる. 詳しくは文献 [9] を参照されたい.

1.2 積分制御器

積分制御器は, 図 1 の $C(s) = \frac{k_I}{s}$ とすることで実現される. このとき, 目標値 r から出力 y までの伝達関数は, 次で与えられる.

$$G(s) = \frac{k_I P(s)}{s + k_I P(s)}.$$

問題 4. (1) $P(s) = \frac{1}{(s+a)}$, $a > 0$ とする.

このとき, 閉ループ系を安定化する k_I の範囲を求めよ.

(2) $P(s) = \frac{1}{(s-a)}$, $a > 0$ とする. このとき, 閉ループ系を安定化する k_I は存在しないことを確かめよ.

(3) $P(s) = \frac{s-b}{s+a}$, $a, b > 0$, $a \neq b$ とする. このとき, 閉ループ系を安定化する k_I は存在しないことを確かめよ.

(4) $P(s) = \frac{1}{s(s+a)}$, $a > 0$ とする. このとき, 閉ループ系を安定化する k_I は存在しないことを確かめよ.

(5) $P(s) = \frac{1}{(s+a)(s+b)(s+c)}$, $a, b, c >$

0 とする. このとき, 閉ループ系を安定化する k_I の範囲を求めよ.

上の問題のように, 積分制御器は簡単なシステムでも, 不安定システムを安定化できない. 積分制御器は, 安定化よりもむしろ性能向上のために用いられる. 特にプロセス制御では, 定常偏差をなくすために用いられる. これを見るために, ステップ入力に追従する問題を考える. $r(t)$ から $e(t) := r(t) - y(t)$ までの伝達関数を考えると,

$$\frac{1}{1 + P(s)C(s)}$$

となる. 制御対象を多項式の比 $P(s) = \frac{n(s)}{d(s)}$ で表わして整理すると,

$$\frac{sd(s)}{sd(s) + k_I n(s)}$$

となるので, ステップ応答に対する偏差は, ステップ入力の大きさ r に対して

$$\begin{aligned} E(s) &= \frac{sd(s)}{sd(s) + k_I n(s)} \frac{r}{s} \\ &= \frac{rd(s)}{sd(s) + k_I n(s)} \end{aligned}$$

で表わされる. 積分制御器で安定化ができていると仮定し, Laplace の最終値定理を用いると,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{rd(s)}{sd(s) + k_I n(s)} = 0 \end{aligned}$$

となり, 定常状態においては必ず定常偏差が零になることを保証する. これは, ステップ応答が参照入力と同じ値になることを意味する. あくまで定常偏差を保証するだけなので, 収束の早さに関する情報は, ここでは与えていない事に注意されたい.

問題 5. (1) $P(s) = \frac{1}{(s+a)}$, $a > 0$ とする.

このとき、閉ループ系を安定化する k_I によって、ステップ応答が参照入力に追従することを確かめよ。閉ループ系の伝達関数を逆ラプラス変換し、時間応答を見て調べること。

- (2) $P(s) = \frac{1}{(s+a)}$, $a > 0$ とする。また、参照入力を $R(s) = \frac{1}{s^2+1}$ とする。このとき、 $\lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = 0$ だが、 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \neq 0$ であることを確かめよ。

ここではステップ応答に対する定常偏差を確認したが、問題で挙げたように、正弦波に対して定常偏差を零にすることはできない。しかし、参照入力のラプラス変換が $R(s) = \frac{n_r(s)}{d_r(s)}$ で与えられたとき、制御器を $C(s) = \frac{n_c(s)}{d_c(s)}$ とすれば、閉ループ系が安定であるならば定常偏差を零にすることができる。簡単な計算より分かる。正確な定理はここでは述べないが、これは内部モデル原理と呼ばれ、追従制御の基礎定理である。

1.3 微分制御器

微分の定義から、厳密には信号の未来の情報も分かっていると微分が定められないため、因果的なシステムである制御系における微分器は存在しないとされる。そのため、微分器は近似微分器を用いて表現されることが習わしである。

実際には微分器は存在しないと述べたが、積分器とフィードバック結合を用いて、次のようにして微分器に類する制御器を構成することができる。

$$\frac{s}{s+k_I} = \frac{1}{k_I} \frac{s}{\frac{1}{k_I}s+1}. \quad (1)$$

問題 6. (1) 式 (1) は、フィードバック結合を用いて構成されている。具体的にどのようなブロック線図になるか、図示せよ。

- (2) 一般的に近似微分器は、次のように表わされる。

$$k_D \frac{s}{Ts+1}. \quad (2)$$

k_D は微分器のゲイン、 T は微分器の近似精度を表わし、2つのパラメータを持つ。比例制御器と積分器を用いて、近似微分器を構成するためのブロック線図を図示せよ。

- (3) 折れ線近似法を用いて、近似微分器 (2) の Bode ゲイン線図を描け。
- (4) 近似微分器は独立なパラメータが2つあるため、積分器のみでは表現できない。ゲイン k_P の比例器も用いて近似微分器を構成する場合、どのようなブロック線図で表せるか図示せよ。また、そのときの k_D および T を、それぞれ k_P と k_I を用いて表わせ。
- (5) 近似微分が微分器に近づくためには、どのパラメータをどう調整すればよいか？ また、微分器として作用する周波数領域は、どういった領域か？

Bode ゲイン線図を描くと、近似微分器の周波数特性は、1次系を反転したものであることが分かる。

微分制御器は、図 1 の $C(s) = k_D s$ とすることで実現される。このとき、目標値 r から出力 y までの伝達関数は、次で与えられる。

$$G(s) = \frac{k_D s P(s)}{1 + k_D s P(s)}.$$

問題 7. (1) $P(s) = \frac{1}{s+a}$, $a > 0$ とする。このとき、閉ループ系を安定化する k_D の範囲を求めよ。

- (2) $P(s) = \frac{1}{s-a}$, $a > 0$ とする。このとき、閉ループ系を安定化する k_D が存在しな

いことを確かめよ.

微分器は、その名の通り偏差信号の傾きをプラントに返す制御器である。偏差信号が大きくなると、それに応じて大きな制御入力を返そうとするため、変化に強い制御器であるといえる。反面、雑音が入っている場合にその影響を増幅することもある。

2 PID 制御による安定化

PID 制御とは、図 1 における制御器 $C(s)$ を

$$C(s) = k_P + \frac{k_I}{s} + k_D s = \frac{k_P s + k_I + k_D s^2}{s}$$

と置き、ゲイン (k_P, k_I, k_D) を調整する制御法である。この制御器 $C(s)$ は、比例器、積分器、微分器をそれぞれ並列に接続したものである。

以下では、PID 制御器を用いて、安定化問題をどのように解決できるか、確かめる。各制御器を単独で用いた場合に安定化できなかった問題であっても、PID 制御器を用いることで安定化できることがある。

2.1 PI 制御

まずは微分器の係数 $k_D = 0$ の場合を考えよう。このときの制御器は、PI 制御器と呼ばれる。この制御器は実験で用いるので、詳しい内容は講義中に行う。

次の伝達関数を PI 制御器で安定化する問題を考えよう。

$$P = \frac{3s + 2}{s^3 + 2s^2 + 3s - 4} \quad (3)$$

この制御対象を安定化するゲインの組 (k_I, k_P) を数値的に探索してみる。どのようなゲインの組み合わせが有効なのかが分からないため、 k_I, k_P をそれぞれ正の値とし、それぞれ 0.01 から 100 まで、対数スケールで等間隔に探索する。このとき、閉ループ系を安定化するゲインの組み合わせをプロットしたものが、図 2 の上の図

である (プログラム例は本稿の末尾に付ける)。また、図 2 の下の図は、無駄時間が入った場合の安定化するゲインを表わしたものである。ただし、無駄時間は次のように 1 次の Pade 近似で表わす。

$$P_{\text{del}} = \frac{3s + 2}{s^3 + 2s^2 + 3s - 4} e^{-s\tau} \simeq \frac{3s + 2}{s^3 + 2s^2 + 3s - 4} \frac{2 - \tau s}{2 + \tau s} \quad (4)$$

図 2 を見比べても分かるように、無駄時間が入ると明らかに安定化が難しくなることが分かる。

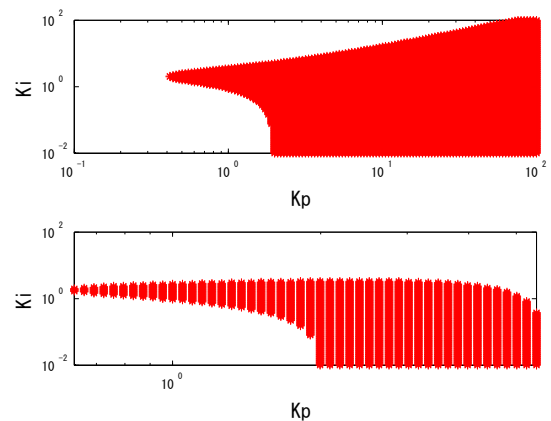


図 2 制御対象 (3), (4) を安定化する PI ゲインの組み合わせ。

2.2 PID 制御

単独の制御器では制御できない場合も演習問題として挙げたが、それらの内、PID 制御器で制御可能である問題を取り上げよう。

問題 8. (1) $P(s) = \frac{s - a}{s}$, $a > 0$ とする。

このとき、PD 制御器では閉ループ系を安定化できないことを確かめよ。微分器を近似微分器に置き換えたとき、閉ループ系を安定化する T, k_P, k_D の範囲を求めよ。

PID 制御によって安定化できない制御対象も、いくらでも存在する。

問題 9. (1) $P(s) = \frac{1}{s^3}$ は PID 制御器で安定化できないことを確かめよ。
 (2) PID 制御器で安定化できない制御対象を 1 つ求めよ。

2.3 倒立振子の場合

摩擦がなくトルク入力のある、倒立振子の運動方程式は、次の微分方程式で表わせる。

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta(t) = \omega^2 \sin(\theta(t)) + u(t)$$

ここで、鉛直上向きを $\theta(t) = 0$ とした。 $\omega > 0$ である。時刻 $t = 0$ で $\theta(0)$ は 0 の近傍であるとし、線形化モデルは、

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) = \omega^2 y(t) + u(t)$$

となり、伝達関数は

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - \omega^2}$$

である。この線形化モデルの伝達関数 $G(s)$ を制御対象とし、以下の問に答えよ。

問題 10. (1) 倒立振子は P 制御のみで安定化できないことを示せ。
 (2) 倒立振子は I 制御のみで安定化できないことを示せ。
 (3) 倒立振子は D 制御のみで安定化できないことを示せ。
 (4) 倒立振子は PD 制御で安定化できる。安定化可能な P ゲイン k_P と D ゲイン k_D の範囲を示せ。
 (5) 倒立振子は、PD 制御の微分器を近似微分 $k_D \frac{s}{Ts+1}$ に置き換えても、安定化可能である。このときの P ゲイン k_P と D ゲイン k_D 、およびパラメータ T の範囲

を、Routh–Hurwitz の安定判別法を用いて求めよ。

目標状態への収束速度は、閉ループ伝達関数の極の中で、実部が最も虚軸に近いものに依存する。そのため、制御器のパラメータを調整することで、望みの閉ループ伝達関数の極を指定できることが望ましい。これを極配置という。

問題 11. PD 制御器を用いた場合を考える。

- (1) 閉ループ伝達関数の極を $s = -1$ と $s = -3$ にしたい。このとき、 k_P と k_D を求めよ。
- (2) 閉ループ伝達関数の極を、 $s = -2 \pm i$ にしたい。このとき、 k_P と k_D を求めよ。

極配置は、標準的には現代制御理論で学ぶが、古典制御理論においても扱うことは可能である。ただし、計算アルゴリズムなどの問題で、次数の高いシステムの極配置問題は、現代制御理論の方法で扱った方が易しい。

2.3.1 現代制御理論との関係について

倒立振子の場合、PD 制御で安定化するということは、現代制御理論における状態フィードバック制御で安定化していることと等価である。これは本稿の範囲から逸脱するが、それほど難しい話ではないので、関連について述べておく。 $x_1(t) := y(t)$, $x_2(t) := \frac{d}{dt}y(t)$ と置くと、倒立振子の線形化運動方程式は次のように表わせる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

ここで、

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = (1 \quad 0)$$

である。伝達関数は、

$$P(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s^2 - \omega^2}$$

である (I は単位行列)。

状態フィードバックとは、 $u = Kx$ とするフィードバック制御のことであり、 $K = (k_1, k_2)$ は状態フィードバックゲインと呼ばれる。今、微分器を用いているため、 $x_2(t) = \frac{d}{dt}y(t)$ も実質的に観測できていることに注意すると、状態フィードバックゲインは、PD 制御ゲインを用いて

$$k_1 = -k_P, \quad k_2 = -k_D$$

で表わされる。したがって、倒立振り子に対する PD 制御は、状態フィードバック制御を行っていることと等価である。

現代制御理論では、もう少し汎用性のある制御器を用いる。次のダイナミクスで記述される制御器を考える。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{x}(t) &= (A + FC + BK)\hat{x}(t) + Fy(t) \\ u(t) &= K\hat{x}(t) \end{aligned}$$

これはオブザーバを併用した制御器であり、パラメータ F, K はそれぞれ次のベクトルで与えられる。

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad K = (k_1 \quad k_2).$$

このとき、制御器の伝達関数は

$$\begin{aligned} C(s) \\ &= K(sI - A - FC - BK)^{-1}F \\ &= \frac{KF s + k_2 f_1 \omega^2 + k_1 f_2}{s^2 - (f_1 + k_2)s + f_1 k_2 - (\omega^2 + f_2 + k_1)} \end{aligned}$$

となる。パラメータが条件 $k_1 < \omega^2$, $k_1 < 0$, $f_1 < 0$, $f_2 < \omega^2$ を全て満たすとき、閉

ループ系は安定となる。 K と F にかかる条件は実質的に等価であるので、 $k_1 = f_2$ および $k_2 = f_1$ とおくことで、2つの自由パラメータをもつ制御器となる。この条件を満たすとき、 $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t) - \hat{x}(t)| = 0$ となるので、漸近的に状態フィードバックを行っていることになる。ここで $\hat{x}(t)$ は $x(t)$ の推定値である。

3 I-PD 制御

I-PD 制御は、北森法とも呼ばれる制御法で、北森俊行 (東大名誉教授) によって考案された。経験則の多い PID 制御の中で、数少ない理論的な設計法の 1 つである。プロセスと呼ばれるシステムでよく用いられており、PID 制御との違いについても論じられている [10]。

I-PD 制御とは、積分制御による直列補償器と、比例-微分制御によるフィードバック補償器からなる制御装置によって構成される (図 3)。制御対象 $P(s)$ を互いに素な多項式 $D(s)$ と $N(s)$ の比で表すと、図 3 で表されるフィードバック系の閉ループ伝達関数 $G_{cl}(s)$ は、

$$\begin{aligned} G_{cl}(s) \\ &= \frac{K_I N(s)}{s\{D(s) + (K_P + K_D s)N(s)\} + K_I N(s)} \end{aligned} \quad (5)$$

となる。安定性を仮定すると、明らかに $s = 0$ で $G_{cl}(0) = 1$ であるので、参照入力定数のとき、制御出力の定常値は参照入力に一致する。

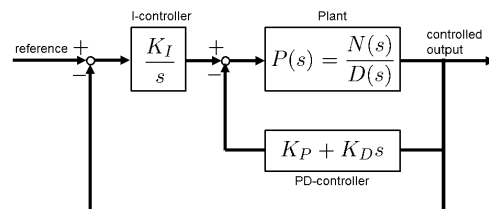


図 3 I-PD 制御系。

書き足す

参考文献

- [1] 森奏親. 演習で学ぶ PID 制御. 森北出版, 2009.
- [2] 須田信英 (編). PID 制御. 朝倉書店, 1992.
- [3] Karl J. Åström and Tore Hägglund. *PID Controllers*. Instrumentation Systems, 2 edition, 1995.
- [4] K.J. Åström and T. Hägglund. *Advanced PID control*. ISA-The Instrumentation, Systems, and Automation Society, 2006.
- [5] 片山徹. フィードバック制御の基礎. 朝倉書店, 2005.
- [6] V. L. Syrmos, C. T. Abdallah, P. Dorato, and K. Grigoriadis. Static output feedback—A survey. *Automatica*, Vol. 33, No. 2, pp. 125–137, 1997.
- [7] 高木貞治. 代数学講義 改訂新版. 共立, 1965.
- [8] John C. Doyle, Bruce A. Francis, and Allen R. Tannenbaum. *Feedback Control Theory*. Prentice Hall, Inc., 1992.
藤井隆雄 監訳, フィードバック制御の理論 – ロバスト制御の基礎理論 –, コロナ社 (1996).
- [9] James P. Keener. 応用数学 – 変換論と近似論 – (上下). 日本評論社, 2007.
坂元 国望 訳, 原題: “Principles of Applied Mathematics: Transformation and Approximation”, Perseus Books Group(2000).
- [10] 原辰次. PID 形制御系と I-PD 形制御系の特性比較と設計指針. 計測自動制御学会論文誌, Vol. 20, No. 8, pp. 691–697, 1984.

図 2 を描くアルゴリズム

```
% 伝達関数
num=[3 2];% 伝達関数の分子多項式係数
den=[1 2 3 -4];% 伝達関数の分母多項式係数
P=tf(num,den);% 伝達関数を定義

tau=0.1;
% e^{-sT}, T=1 の Pade 近似
delay_pade=tf([-tau,2],[tau,2]);

% PI ゲインの探索範囲
Kp=10.^[-2:0.02:2];% 0.01 から 100 まで
対数スケールで探索
Ki=10.^[-2:0.02:2];% 0.01 から 100 まで
対数スケールで探索

% 安定なゲインの組み合わせには 1 を返す
stability=zeros(length(Kp),length(Ki));
stability_delay
=zeros(length(Kp),length(Ki));
for k1=1:length(Kp)
    for k2=1:length(Ki)
% P I 制御器
        C=tf([Kp(k1),Ki(k2)],[1,0]);
        % 閉ループ伝達関数
        G=feedback(P*C,1);
        G_delay
        =feedback(series(P,delay_pade)*C,1);

        % 閉ループ伝達関数の極
        x=pole(G);
        if max(real(x))>=0
            stability(k1,k2)=0;
        else
            stability(k1,k2)=1;
        end
    end
end
```

```

end

% 無駄時間を含む閉ループ伝達関数
x_delay=pole(G_delay);
if max(real(x_delay))>=0
    stability_delay(k1,k2)=0;
else
    stability_delay(k1,k2)=1;
end

end

end

[row,col]=find(stability);
[row_delay,col_delay]=find(stability_delay);

figure
subplot(2,1,1)
loglog(Kp(row),Ki(col),'r*');
xlabel('Kp','fontsize',14)
ylabel('Ki','fontsize',14)

subplot(2,1,2)
loglog(Kp(row_delay),Ki(col_delay),'r*');
xlabel('Kp','fontsize',14)
ylabel('Ki','fontsize',14)

```