Chapter 1

序論

この講義では、経済理論で非常によく用いられる数学を、例を多く引きながら解説する。例としては、経済原論IやII（特にII）に登場するものを中心に選んである。よって、この授業は経済原論を数学的に補完するという性質を持つ。

この章では、経済学と数学の関係、経済学において応用される数学の共通の構造、などを概観する。

1.1 経済学と数学

経済学がどんな学問かを定義するとき、現在にいたるまで多く用いられるフレーズは「経済学とは、稀少な資源を最適に配分する仕組みを研究する学問である」というものである。この定義は、初学者にとって決してわかりやすいものではない。それは、稀少とか最適とかという用語の、具体的なイメージがつかみにくいためである。そこで、ここでは「経済学は、経済問題を解決する学問である」と一旦は逃げをうっておいて、経済問題を理解しやすい形で表現してみよう。

経済問題の中身をキーワードは

- 限りのある資源
- 人間・人々
- 欲望・満足
- いろいろな手段・方策・可能性
- 配分・配置

といったものである。それぞれの用語は、大分身近なものになったと思う。これらの用語を用いて経済問題を表現しなおすと、

> 経済問題とは、人間の欲望を高める可能性のある資源に限りがあり、かつ、それを配分・配置するためにいろいろな手段・方策・可能性があるとき、人間・人々の欲望を一番高めるにはどのような手段・方策を採ればよいかという問題である。

この定義を理解するポイントを、あえて二つに限れば、

- 限りある資源と、さまざまな手段
- 人間の欲望

ということになる。この二つのどちらが欠けても経済問題は成立しえない。人間のいない木星表面という場所を考えるとき、そこに経済問題はあるだろうか。また、あらゆる物体（生物その他を含む）を好きなときに何の苦痛もなく出現させられる、打ち手の小槌をもつ人間がいたとして、その人間に経済問題はあるだろうか。いずれの場合も経済問題は生じない。さらに、欲望達成の手段がたった一つしかない状況でも経済問題は、生じない。

[1]

実は、前者の制約の下で後者をできるだけ高めるという表現にたどりつく時、経済数学の大きなテーマである、最適化問題という数学上の定式化へほんの一歩である。つまり、人間の欲望の水準を指標化し、

[1] 経済問題の根本的な解決は、永年の人類の夢である。古今多くの思想が、この問題に取り組んできたといってよい。興味深いのは、西洋と東洋では経済問題の解決を考えるとき、どちらに解決の力点を置くかが異なる。つまり、西洋では限りある資源とさまざまな手段という、人間の持つ制約を、限りなく緩めようと方向で考える。資源の探索をより広い範囲で行うとか、資源利用のさまざまな手段・技術の改良を積極的に行うなどという接近法である。人間の欲望というものは、とりあえずは所与とする。これに対して、東洋では、人間の欲望を宗教その他によって押さえこむという接近法をとる。つまり、より少なく欲するように、人間が変わることによって経済問題を解決しようとする。そこでは、人間を取り巻く環境を積極的に変えようとする接近は二義的である。

その欲望水準の指標がさまざまな手段・可能性に依存して異なることを関数として表現することにし、さまざまな手段が限りある資源に制約されることを、さまざまな不等式や等式で表現することで、経済問題は、制約下の関数の最大化問題として、数学的に定式化されるのである。

数学的に定式化することによって、経済問題は非常に体系だってその解決方法を研究することが可能になる。経済数学を学ぶ理由もそこにあるといってよい。

1.2 最大化問題と経済理論

前節で、経済問題が制約条件つきの最大化問題として数学的に定式化される可能性をみた。今度は、経済理論は、そうした定式化の上にたって一体何を明らかにするかを、考えてみよう。この授業では、制約条件つきの最大化問題の例として、消費者の需要決定や、生産者の供給量の決定をたびたび扱うことになる。その場合、最大化問題として数学的に定式化した後、最大化問題の与件を変化させたとき、その与件の変化にともなって最適解がどのように変化するかの、依存関係を明らかにすることが、目標であると結論してさしつかえない。これは、消費者需要や生産物の供給の例でいうなら、需要関数や供給関数がどのような性質・形状を持つかをしらべることである。

上で述べた、目標を達成するためにはどうしても、最大化問題を解くこと、つまり最適解の必要条件なり十分条件をもとめたり、包絡線定理（後述）を用いて、最適解と与件の変化の関係を研究することが必要になる。

1.3 限界概念と微分概念

経済原論では、しばしば「限界条件」なるものが登場して、初学者を惑わす。この概念は数学での微分という概念とほぼ対応している。よって、限界条件を理解するために、微分を理解することは有用である。

ここでは典型的な消費者需要の問題を考える。いま消費者が２種類の財の購入の問題に直面していると考える。まず、二つの財に関する選好は効用関数

$$U(x_1, x_2)$$

であらわされると考える。無差別曲線は、ある効用水準$\bar{U}$に対応する財の組み合わせを示したものである。集合の記号を使うと$\bar{U}$に対応する無差別曲線は

$$\{(x_1, x_2) \mid U(x_1, x_2) = \bar{U}\}$$

と書ける。普通はどんな効用水準についても上の無差別曲線が連続で、原点に対して凸な曲線であると仮定する。この選好をあらわす効用関数なり、無差別曲線が経済問題をあらわす一つのポイントである。そしてもう一方のポイント、限りある資源に対応するものが、消費者の予算制約である。つまり消費者は欲望を充足するための手段は複数あるものの、限りある所得によって無制限ではないということをあらわす。具体的には、等式

$$p_1x_1 + p_2x_2 = I$$

あるいは不等式

$$p_1x_1 + p_2x_2 \leq I$$

で示される。ここで、p_iは第i財の価格である。

さて限界条件による最適な消費の特徴づけは、「限界効用の比が価格の比に等しい」という表現でなされる。いま、限界効用が何かを定義していないから生徒諸君は何のことかわからないかもしれないが、価格

比は単にp_1/p_2あるいはその逆数を指すことは明らかである。限界効用とは、すでに予告したとおり数学の微分に対応しておりある消費(x_1, x_2)からの微小な乖離(dx_1, dx_2)それぞれ１単位あたりの効用水準の変化をあらわす。つまり、

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{U(x_1 + \Delta x_1, x_2) - U(x_1, x_2)}{\Delta x_1} = \frac{\partial U}{\partial x_1}$$

あるいは

$$\lim_{\Delta x_2 \to 0} \frac{U(x_1, x_2 + \Delta x_2) - U(x_1, x_2)}{\Delta x_2} = \frac{\partial U}{\partial x_2}$$

をあらわす。[2]

前述の限界条件を導出するために、それぞれの財への所得の配分を変化させることから考えるのが普通である。つまり、dIだけx_1の購入のための支出を増やし、dIだけx_2の購入のための支出をへらすということを考える。限界条件の出発点は最適な消費そのものである。そこで、(dx_1, dx_2) の変化によりどれだけ効用水準が変化するかを考える。いま、dx_i $(i = 1, 2)$ の符号は予め決めておくことはしない。上のことから予想されるが、効用水準の総体的な変化は

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2$$

であるが、上のとおり第１財に対してはdIだけ支出を増やし、第２財に対してはdIだけ支出を減らすとすると、

$$dx_1 = \frac{dI}{p_1}$$

$$dx_2 = -\frac{dI}{p_2}$$

となるから、これを上の効用水準の相対的変化に代入すると

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x_1} / p_1 - \frac{\partial U}{\partial x_2} / p_2 \right) dI$$

さて、出発点が最適であるとすると、この値は常に非正でなくてはならない。つまり、

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x_1} / p_1 - \frac{\partial U}{\partial x_2} / p_2 \right) dI \leq 0$$

である。しかし、dIの符号は正でも負でもこの不等式は成立するはずである。つまり、どちらの財への支出を増やすか減らすかは任意であった。よって、

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x_1} / p_1 - \frac{\partial U}{\partial x_2} / p_2 \right) = 0$$

が最適な消費においては成立する。これを変形した

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} / p_1 = \frac{\partial U}{\partial x_2} / p_2$$

や

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}} = \frac{p_1}{p_2}$$

がいわゆる限界条件である。

[2] 左辺の次元が数量１単位当たりの効用になっていることに注意しよう。よって、極限操作の結果に関しても、数量１単位辺りの効用になっている。

1.4 接点条件

消費者の需要の決定の理論や、生産者の供給の決定理論では、最適な消費者需要の決定や最適な生産物供給の決定の様子を、無差別曲線や生産関数をグラフに描いた上で、そうした曲線への接点条件として図示することがある。こうしたことは、最大化問題を理解する上でしばしば有用である。

前の節での消費者の例でいえば、限界条件は「無差別曲線と予算制約線が接する」という条件で言い換えられることもある。これは、無差別曲線上の点の接線の傾きが

$$\frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}}$$

であらわさる一方で、予算制約線の傾きが

$$\frac{p_1}{p_2}$$

であらわされることに対応している。

1.5 端点条件

これまで、所得が使いきらない状況、ある財への支出がなされないなどの状況をあえて考えなかった。しかし、こうしたことは日常生活でも起こりうることである。こうした状況は経済学でいうところの自由財などの概念に対応する。つまり、欲望の充足を妨げる資源の制約が事実上ないということに対応する。つまり、空気が自由財であるという言い方は、空気が豊富にありすぎて普通の生活をしている限り、空気の量（物理的には有限量）が個人にとって経済問題の対象とならないということを意味するのである。

この端点条件は後に、クーン＝タッカー条件について学ぶとき詳しく再述するが、典型的には次のような問題において端点解が生ずる可能性がある。

問題 p, q, a, b, Iを正の実数とするとき、

$$\text{maximize} \quad xy$$

$$\begin{aligned} px + qy &\leq I \\ -ax + y &\geq 0 \\ bx - y &\geq 0 \end{aligned}$$

演習 1 各自、問題を図示し、p, q, a, bがどのような関係にあるとき、最適解が必ずしも接点解にになららないかを、考えよ。

Chapter 4

クーン＝タッカーの定理（現代的条件つき最大化）