Logique modale propositionnelle S4 et logique intuitioniste propositionnelle

Michel Lévy

29 avril 2011

1 Logique intuitioniste

On définit le sens des formules grâce à la sémantique introduite par Kripke et l'on montre l'équivalence entre deux définitions de ce sens. L'ensemble des formules considérées est l'ensemble construit à partir d'un ensemble de variables (noté *Var*) et des connectives $\wedge, \vee, \Rightarrow, \perp$. Une variable est une suite de minuscules avec ou sans indice. Les majuscules dénotent des formules. La négation et l'équivalence sont considérées comme des abréviations

- $\neg A = A \Rightarrow \perp$
- $A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

Définition 1.1 (Interprétation, Assignation)

1. *Une interprétation* intuitioniste *est un triplet* (E, R, v) *où* E *est un ensemble d'états,* R *un* préordre *sur* E *et* $v : Var \to 2^E$ *est une application qui vérifie la propriété suivante : pour tout* $p \in Var$*, si* $x \in v(p)$ *et* $x\, R\, y$ *alors* $y \in v(p)$.
   Nous rappelons qu'un préordre est une relation reflexive et transitive.
   La relation R *est la relation d'*accessibilité *de l'interprétation.*
2. *Une assignation est un couple* Ie *composé d'une interprétation* I *et d'un état* e *de cette interprétation. Une assignation permet de donner une valeur à une formule.*

On trouve, notamment dans Wikipedia , voir
`http://en.wikipedia.org/wiki/Kripke_semantics#Basic_definitions`,
une définition différente d'une interprétation intuitioniste : la relation R doit être un ordre, autrement dit un préordre antisymétrique. Une interprétation, dont la relation d'accessibilité est un ordre, sera dite *ordonnée*. Nous verrons que ces deux définitions sont équivalentes, dans un sens qui sera précisé ultérieurement.

Définition 1.2 (Modèle)
Soit $I = (E, R, v)$ une interprétation intuitioniste et $e \in E$. On définit le fait que l'assignation Ie est modèle de la formule A, en bref que $Ie \models A$ de la façon suivante :

1. $Ie \not\models \perp$
2. *Si A est une variable, $Ie \models A$ si et seulement si $e \in v(A)$*
3. $Ie \models (B \wedge C)$ *si et seulement si* $Ie \models B$ *et* $Ie \models C$
4. $Ie \models (B \vee C)$ *si et seulement si* $Ie \models B$ *ou* $Ie \models C$
5. $Ie \models (B \Rightarrow C)$ *si et seulement si*
   pour tout état f tel que $e\ R\ f$, si $If \models B$ alors $If \models C$

Lorsque le contexte indique l'interprétation I sans ambiguïté, au lieu de dire que l'assignation Ie est modèle de la formule A, nous dirons simplement que l'état e est modèle de A, ou satisfait cette formule ou encore la rend vraie.

Définition 1.3 (Valide)
Une formule est intuitionistiquement valide *si et seulement si toute assignation intuitioniste est modèle de la formule. On note par $\models_I A$, le fait que la formule A est intuitionistiquement valide.*
Une formule est intuitionistiquement valide pour les interprétations ordonnées *si et seulement si toute assignation intuitioniste ordonnée est modèle de la formule. On note par $\models_{IO} A$, le fait que la formule A est intuitionistiquement valide pour les interprétations ordonnées.*
Il est évident que $\models_I A$ implique $\models_{IO} A$. nous montrons ci-dessous la réciproque, établissant ainsi l'identité de ces deux notions de validité.

Lemme 1.4 (Équivalence entre états)
Soit $I = (E, R, v)$ une interprétation intuitioniste.
Soit $\equiv$ la relation suivante entre les états de l'interprétation : pour tous états x, y, $x \equiv y$ si et seulement si $x\ R\ y$ et $y\ R\ x$.
La relation $\equiv$ est une relation d'équivalence et elle vérifie : si $x \equiv y$ alors pour toute variable p, $x \in v(p)$ si et seulement si $y \in v(p)$

Preuve : Puisque R est un préordre, il est évident que $\equiv$ est une relation d'équivalence.
Soient x, y deux états tels que $x \equiv y$. Soit p une variable.
Supposons que $x \in v(p)$. Par définition de $\equiv$, on a $x\ R\ y$. D'après la définition 1.1, $y \in v(p)$. La réciproque est analogue. $\square$

Lemme 1.5 (Équivalence entre interprétations)
Soit $I = (E, R, v)$ une interprétation intuitioniste. Soit $\equiv$ l'équivalence entre états définie dans le lemme précédent 1.4. Notons $[x]$ la classe de l'état x.
Soit $I' = (E', R', v')$ l'interprétation dont les états sont les classes d'équivalences des états de E, où R' et v' sont définies ainsi :

– *$c\ R'\ d$ si et seulement si il existe $x, y \in E$ tels que $c = [x]$, $d = [y]$ et $x\ R\ y$*
– *toute variable p, $v'(p) = \{c \in E' \mid \exists x (x \in c \wedge x \in v(p)\}$*

L'interprétation I' est une interprétation intuitioniste ordonnée *qui vérifie, pour toute formule A et état $x \in E$: $I, x \models A$ si et seulement si $I', [x] \models A$*

Preuve :

1. Pour $x,y \in E$, $[x]\ R'\ [y]$ si et seulement si $x\ R\ y$.
   Par définition de R', si $x\ R\ y$ alors $[x]\ R'\ [y]$.
   Réciproquement supposons $[x]\ R'\ [y]$. Par définition de R', il existe $x',y' \in E$ tels que $x \equiv x', x'\ R\ y', y' \equiv y$. Par définition de $\equiv$, nous avons $x\ R\ x', x'\ R\ y', y'\ R\ y$. Puisque R est transitive, $x\ R\ y$.

2. R' est un ordre. D'après la propriété ci-dessus, R' est un préordre. Montrons que c'est un ordre. Supposons $x,y \in E$, $[x]\ R'\ [y]$ et $[y]\ R'\ [x]$.
   D'après la propriété qui vient d'être prouvée, xRy et yRx, donc $x \equiv y$ et par suite $[x] = [y]$. L'interprétation I' est donc une interprétation intuitioniste ordonnée.

3. Pour toute variable p, $v'(p) = \{[x] \mid x \in v(p)\}$.
   Par définition de v', si $x \in v(p)$ alors $[x] \in v'(p)$.
   Réciproquement supposons que $[x] \in v'(p)$. Par définition de v', il existe $x' \in E$ tel que $x \equiv x'$ et $x' \in v(p)$.
   Par définition de $\equiv$, on a $x'Rx$.
   D'après la propriété de v (voir définition 1.1), puisque $x' \in v(p)$ et $x'Rx$, on a $x \in v(p)$.

4. Par récurrence sur les formules, on a : $I,x \models A$ si et seulement si $I',[x] \models A$
   (a) Supposons que A est une variable.
   $I,x \models A$ si et seulement si, par définition des modèles, $x \in v(A)$ si et seulement si, d'après 3, $[x] \in v'(A)$ si et seulement si, par définition des modèles, $I',[x] \models A$
   (b) Supposons que $A = (B \wedge C)$.
   $I,x \models (B \wedge C)$ si et seulement si, par définition des modèles, $I,x \models B$ et $I,x \models C$ si et seulement si, par récurrence, $I',[x] \models B$ et $I',[x] \models C$ si et seulement si, par définition des modèles, $I',[x] \models (B \wedge C)$.
   (c) Le cas où A est une disjonction est analogue au cas de la conjonction.
   (d) Supposons que $A = (B \Rightarrow C)$.
   $I,x \models (B \Rightarrow C)$ si et seulement si pour tout $y \in E$ tel que $x\ R\ y$, si $I,y \models B$ alors $I,y \models C$ si et seulement si, par récurrence et d'après la propriété 1, pour tout $[y] \in E'$ tel que $[x]\ R\ [y]$, si $I',[y] \models B$ alors $I',[y] \models C$ si et seulement si, par définition des modèles, $I',[x] \models (B \Rightarrow C)$

□

Théorème 1.6 *Une formule est intuitionistiquement valide si et seulement si elle est intuitionistiquement valide pour les interprétations ordonnées.*

Preuve : Ainsi que nous l'avons déjà remarqué dans la définition 1.3 il suffit de prouver que si une formule est intuitionistiquement valide pour les interprétations ordonnées, elle est intuitionistiquement valide. Supposons, au contraire, que la formule A n'est pas intuitionisquement valide. Il existe une interprétation I et un état e de de cette interprétation telle que $Ie \not\models A$. D'après le lemme 1.5, il existe I' une interprétation *ordonnée* et un état e' de cette interprétation telle que $I'e' \not\models A$. Donc A n'est pas intuitionistiquement valide pour les interprétations ordonnées. □

2 Traduction de la logique intuitioniste dans la logique modale S4

L'ensemble des formules modales considérées est l'ensemble construit avec le même ensemble de variables, les mêmes opérations auxquelles on ajoute l'opération nécessaire notée $\Box$. L'opération duale de $\Box$, le possible $\Diamond$ est considérée comme une abréviation définie pas $\Diamond A = \neg\Box\neg A$.
Notre étude suit et prouve les résultats énoncées à l'adresse :
`http://www.princeton.edu/~jburgess/Kripke1.doc`.

Définition 2.1 (Interprétation, modèle et validité pour S4)
Une interprétation pour S4 est un triplet (E,R,v) où E est un ensemble d'états, R un préordre *sur ces états et v une application des variables dans les sous-ensembles de E. Soit I cette interprétation et e un état de cette interprétation. Pour distinguer le fait qu'une assignation est modèle intuitioniste d'une formule, du fait qu'elle est S4-modèle d'une formule, on note par $Ie \models_{S4} A$ le fait que l'assignation Ie est un S4-modèle de la formule A et on définit ainsi cette relation entre assignation et formule :*

1. $Ie \not\models_{S4} \bot$
2. *Si A est une variable, $Ie \models_{S4} A$ si et seulement si $e \in v(A)$*
3. $Ie \models_{S4} (B \wedge C)$ *si et seulement si* $Ie \models_{S4} B$ *et* $Ie \models_{S4} C$
4. $Ie \models_{S4} (B \vee C)$ *si et seulement si* $Ie \models_{S4} B$ *ou* $Ie \models_{S4} C$
5. $Ie \models_{S4} (B \Rightarrow C)$ *si et seulement si si* $Ie \models_{S4} B$ *alors* $Ie \models_{S4} C$
6. $Ie \models_{S4} \Box B$ *si et seulement si pour tout état f tel que $e\ R\ f$,* $If \models_{S4} B$

La formule A est valide pour S4, ce qu'on note $\models_{S4} A$, si et seulement toute assignation pour S4 est modèle de A.

Lemme 2.2 (Propriété caractérisque de S4)
Soit $I = (E,R,v)$ une interprétation pour S4. Soit A une formule et e, f deux états de l'interprétation. Si $e\ R\ f$ et $Ie \models_{S4} \Box A$ alors $If \models_{S4} \Box A$.

Preuve : Conséquence immédiate de la définition de modèle et de ce que R est un préordre. $\Box$

Définition 2.3 (Traduction des formules)
Soit A une formule de la logique intuitioniste propositionnelle. La formule A^* est définie par récurrence de la façon suivante

1. $\bot^* = \bot$
2. *Si A est une variable alors $A^* = \Box A$*
3. $(B \wedge C)^* = (B^* \wedge C^*)$
4. $(B \vee C)^* = (B^* \vee C^*)$
5. $(B \Rightarrow C)^* = \Box(B^* \Rightarrow C^*)$

En résumé, la formule A^* est obtenue en ajoutant $\Box$ devant chaque sous-formule de A qui est une variable ou une implication.

Lemme 2.4 (De la logique modale à la logique intuitioniste)
Soit $I = (E,R,v)$ une interprétation pour S4 et soit $J = (E,R,w)$ l'interprétation ainsi définie : pour toute variable p, $w(p) = \{e \mid Ie \models_{S4} \Box p\}$.
L'interprétation J est une interprétation intuitioniste et pour toute formule intuitioniste A, autrement pour toute formule sans $\Box$, et pour tout $e \in E$ on a :
$Je \models A$ si et seulement si $Ie \models_{S4} A^*$.

Preuve :

1. Montrons que J est une interprétation intuitioniste.
   Soit p une variable et soit $e \in w(p)$.
   Supposons que $e\ R\ f$ et montrons que $f \in w(p)$.
   Par définition de w, $Ie \models_{S4} \Box p$. D'après le lemme 2.2, on a $If \models_{S4} \Box p$, donc par définition de w, $f \in w(p)$.
2. Montrons que $Je \models A$ si et seulement si $Ie \models_{S4} A^*$. La preuve est par récurrence sur les sous-formules de A.
   (a) Supposons que $A = \perp$. Puisque $A^* = \perp$ et qu'aucune assignation n'est modèle de $\perp$, la propriété est vérifiée.
   (b) Supposons que A est une variable.
   $Je \models A$ si et seulement si, par définition des modèles intuitionistes, $e \in w(A)$ si et seulement si, par définition de w, $Ie \models_{S4} \Box A$ si et seulement si, par définition de A^*, $Ie \models_{S4} A^*$.
   (c) Supposons que $A = (B \wedge C)$.
   $Je \models A$ si et seulement si, par définition des modèles intuitionistes, $Je \models B$ et $Je \models C$ si et seulement si, par récurrence, $Ie \models_{S4} B^*$ et $Ie \models_{S4} C^*$ si et seulement si, par définition des modèles pour S4, $Ie \models_{S4} (B^* \wedge C^*)$ si et seulement si, par définition de A^*, $Ie \models_{S4} A^*$.
   (d) Le cas où A est une disjonction est analogue au cas de la conjonction.
   (e) Supposons que $A = (B \Rightarrow C)$.
   $Je \models A$ si et seulement si, par définition des modèles intuitionistes, pour tout f tel que $e\ R\ f$, si $Jf \models B$ alors $Jf \models C$, si et seulement si, par récurrence, pour tout f tel que $e\ R\ f$, si $If \models_{S4} B^*$ alors $If \models_{S4} C^*$ si et seulement si, par définition du sens de l'implication dans S4, pour tout f tel que $e\ R\ f$, $If \models_{S4} (B^* \Rightarrow C^*)$ si et seulement si, par définition du sens du nécessaire dans S4, $Ie \models_{S4} \Box(B^* \Rightarrow C^*)$ si et seulement si, par définition de A^*,
   $Ie \models_{S4} A^*$

$\Box$

Lemme 2.5 (De la logique intuitioniste à la logique modale)
Soit $I = (E,R,v)$ une interprétation intuitioniste. Pour toute formule intuitioniste A, $Ie \models A$ si et seulement si $Ie \models_{S4} A^*$.

Preuve : Nous pouvons prouver la propriété par récurrence sur les sous-formules de A. Comme cette preuve est analogue à celle du lemme 2.4, nous examinons seulement le cas où A est une variable.

$Ie \models A$ si et seulement si $e \in v(A)$ si et seulement si, d'après la définition 1.1, pour tout f tel que $e\ R\ f$, $f \in v(A)$ si et seulement si, pour tout f tel que $e\ R\ f$, $If \models_{S4} A$ si et seulement si, d'après le sens du nécessaire, $Ie \models_{S4} \Box A$ si et seulement si, par définition de A^*, $Ie \models_{S4} A^*$. $\Box$

Théorème 2.6 *Soit A une formule intuitioniste. A est valide intuitionistiquement si et seulement si A^* est valide pour S4.*

Preuve :

1. Supposons A valide intuitionistement.
   Supposons que A^* ne soit pas valide pour S4. Il existerait un contre-modèle Ie tel que $Ie \not\models_{S4} A^*$. D'après le lemme 2.4, ce contre-modèle pourrait être transformé en un contre-modèle intuitioniste de A.
   Donc A^* est valide pour S4.
2. Supposons A^* valide pour S4.
   Supposons que A n'est pas intuitionistiquement valide. Il existerait un contre-modèle Ie telque $Ie \models A$. D'après le lemme 2.5, ce contre-modèle serait un contre-modèle pour S4 de A^*.
   Donc A est intuitionistiquement valide.

$\Box$