2013 年 01 月 06 日

地球の重力について

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

本稿では、3 重積分の極座標変換の例として、地球の重力の計算を紹介する。そしてそれにより、ついでに次のようないくつかの疑問にも答えたい。

- **疑問 1**: 地球のような星から受ける万有引力は、本来は星の各部分から受ける小さい万有引力の合力だが、その合力は、星の中心 (重心) 一点に質量が集中していると見た場合の引力と見てよいのかどうか。
- **疑問 2**: 地球の外部ではなく、地球の内部では重力はどのようにかかるのか。すなわち、中心に進むにつれて重力は大きくなるのか小さくなるのか。
- **疑問 3**: 地球の内部は実は空洞で、その中に地底人が住む、という SF があるが、彼らが受ける重力はどれくらいか。

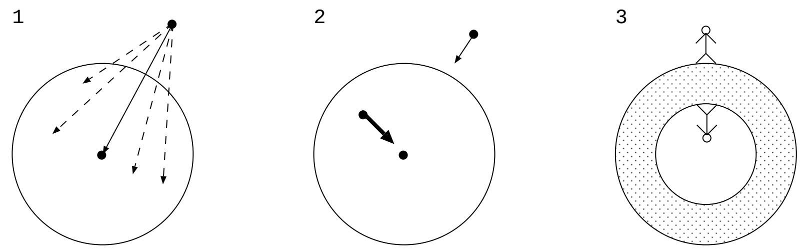

図 1: 3 つの疑問

2 ある物体から受ける万有引力

まず、形と質量のある物体 V から、点 A に置いた質量 m の小さい物体が受ける万有引力について考えてみる。

V が、点 P に置かれた質量 M の小さい物体である場合、点 A はその物体から、距離の 2 乗に反比例し、それぞれの質量に比例して、互いに引き合う力である **万有引力**

$$\boldsymbol{F} = \frac{mMG}{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2} \cdot \frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|}$$

を受ける ($G > 0$: 万有引力定数)。なお、$\overrightarrow{\mathrm{AP}}/|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$ は A から P に向かう単位ベクトルであることに注意する。

複数の点 P_j に質量 M_j の小さい物体がある場合は、その合力

$$\boldsymbol{F} = \sum_{j=1}^{n} \frac{mM_jG}{|\overrightarrow{\mathrm{AP}_j}|^2} \cdot \frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}_j}}{|\overrightarrow{\mathrm{AP}_j}|}$$

を受けることになる。

3 次元領域 V の場合は、V 内の各点 P での密度を $\psi(\mathrm{P})$ とすると、V を小片 ΔV_j に分解して考えれば、その小片の質量はほぼ $\psi(\mathrm{P}_j)\Delta V_j$ なので ($\mathrm{P}_j \in \Delta V_j$)、$V$ から A の物体が受ける万有引力は、

$$\boldsymbol{F} = \sum_{j=1}^{n} \frac{mG\psi(\mathrm{P}_j)\Delta V_j}{|\overrightarrow{\mathrm{AP}_j}|^2} \cdot \frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}_j}}{|\overrightarrow{\mathrm{AP}_j}|}$$

にほぼ等しく、厳密にはその極限としての体積分 (3 重積分) で表されることになる (積分変数は $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$):

$$\boldsymbol{F} = \int_V \frac{mG\psi(\mathrm{P})}{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2} \cdot \frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|}\, dv = mG \iiint_V \psi(\boldsymbol{x}) \frac{\boldsymbol{x} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\boldsymbol{x} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}|^3}\, dxdydz \tag{1}$$

この公式自体は、A が V の内部にあっても変わらないが、その場合は分母が 0 となりうるので、厳密には (1) は広義積分となる。

さて、V の重心点 Q の位置ベクトルは、

$$\frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \psi(\mathrm{P}_j)\Delta V_j \overrightarrow{\mathrm{OP}_j}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \psi(\mathrm{P}_j)\Delta V_j}$$

の極限として得られるので、V の総質量を M_V とすれば、

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{1}{M_V}\int_V \psi(\mathrm{P})\overrightarrow{\mathrm{OP}}\,dv \quad \left(M_V = \int_V \psi(\mathrm{P})dv\right)$$

と表される。よって、

$$\begin{aligned}\int_V \psi(\mathrm{P})(\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}})\,dv &= \int_V \psi(\mathrm{P})\overrightarrow{\mathrm{OP}}\,dv - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\int_V \psi(\mathrm{P})\,dv \\ = \quad & \int_V \psi(\mathrm{P})\overrightarrow{\mathrm{O}}\,dv - M_V\overrightarrow{\mathrm{OA}}\end{aligned}$$

より、もし重心 Q に質量 M_V が集中していると考えると、それが A におよぼす万有引力は、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= \frac{mM_VG}{|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|^2}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|} = \frac{mM_VG\left(\dfrac{1}{M_V}\displaystyle\int_V \psi(\mathrm{P})\overrightarrow{\mathrm{OP}}\,dv - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)}{\left|\dfrac{1}{M_V}\displaystyle\int_V \psi(\mathrm{P})\overrightarrow{\mathrm{OP}}\,dv - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^3} \\ &= \frac{mG\displaystyle\int_V \psi(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x} - \overrightarrow{\mathrm{OA}})\,dv}{\left|\dfrac{1}{M_V}\displaystyle\int_V \psi(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x} - \overrightarrow{\mathrm{OA}})\,dv\right|^3}\end{aligned}$$

となるが、これは (1) とは明らかに異なり、一般に両者は等しくはない。

よって、重心に質量が集中していると考えてよいのは、特別な場合であることがわかる。

3 地球のような星の場合

地球のような星の場合、V は球で[1]、さらに、その質量は中心から層状に対称に分布すると考えられるので、地球の中心を原点 O とすれば、$\psi(\boldsymbol{x})$ は $r = |\boldsymbol{x}|$ のみの関数

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \rho(r)$$

と見ることができる[2]。この条件の元で (1) を極座標変換を用いて計算してみる。

[1] 厳密には地球は球ではなく少しゆがみがある。
[2] このような層状の対称性を **球対称** と呼ぶことがある。

V は半径 R の球であるとし、極座標を

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= (r\cos\phi\cos\theta)\boldsymbol{e}_1 + (r\sin\phi\cos\theta)\boldsymbol{e}_2 + (r\sin\theta)\boldsymbol{e}_3 \\ & \quad (0 \le r \le R,\ \ 0 \le \phi < 2\pi,\ \ -\pi/2 \le \theta \le \pi/2)\end{aligned} \tag{2}$$

のように導入する。ここで、$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ は互いに直交する単位ベクトルとするが、軸方向の基本ベクトルと取る必要はないので、計算を簡単にするため、$\boldsymbol{e}_3$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の方向に取り、$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ はそれに応じて取り直すこととする。ただし、$\mathrm{A} = \mathrm{O}$ の場合は後で別に考えることとし、まずは $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| \neq 0$ の場合を考える。この場合は、$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\boldsymbol{e}_3$ となることに注意する。

まずはこの変数変換のヤコビアン $D(\boldsymbol{x})/D(r,\phi,\theta)$ であるが、これは

$$\begin{aligned}\frac{D(\boldsymbol{x})}{D(r,\phi,\theta)} &= \begin{vmatrix} \cos\phi\cos\theta & -r\sin\phi\cos\theta & -r\cos\phi\sin\theta \\ \sin\phi\cos\theta & r\cos\phi\cos\theta & -r\sin\phi\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & r\cos\theta \end{vmatrix} \\ &= r^2\cos\theta \begin{vmatrix} \cos\phi\cos\theta & -\sin\phi & -\cos\phi\sin\theta \\ \sin\phi\cos\theta & \cos\phi & -\sin\phi\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{vmatrix} \\ &= r^2\cos\theta(\cos^2\phi\cos^2\theta + \sin^2\phi\sin^2\theta + \cos^2\phi\sin^2\theta + \sin^2\phi\cos^2\theta) \\ &= r^2\cos\theta \quad (\ge 0)\end{aligned}$$

となる。また、

$$\boldsymbol{x} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (r\cos\phi\cos\theta)\boldsymbol{e}_1 + (r\sin\phi\cos\theta)\boldsymbol{e}_2 + (r\sin\theta - |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|)\boldsymbol{e}_3$$

より、

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{x} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 &= r^2\cos^2\phi\cos^2\theta + r^2\sin^2\phi\cos^2\theta + (r\sin\theta - |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|)^2 \\ &= r^2 - 2r|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\sin\theta + |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2\end{aligned}$$

となるので、(1) は極座標 (2) により以下のようになる:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= mG\iiint_W \rho(r)\frac{(r\cos\phi\cos\theta)\boldsymbol{e}_1 + (r\sin\phi\cos\theta)\boldsymbol{e}_2 + (r\sin\theta - |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|)\boldsymbol{e}_3}{(r^2 - 2r|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\sin\theta + |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2)^{3/2}} \\ & \quad \times r^2\cos\theta\, dr\, d\phi\, d\theta\end{aligned} \tag{3}$$

ここで、$W = \{(r,\phi,\theta);\ 0 \le r \le R,\ 0 \le \phi < 2\pi,\ -\pi/2 \le \theta \le \pi/2\}$ であり、

$$\int_0^{2\pi} \cos\phi\, d\phi = \int_0^{2\pi} \sin\phi\, d\phi = 0$$

なので、$\boldsymbol{F}$ の $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ 方向成分は 0 となり、よって $\boldsymbol{e}_3$ 成分のみ残ることになるが、これは ϕ にはよらないので、

$$\boldsymbol{F} = 2\pi mG\boldsymbol{e}_3 \int_0^R dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\rho(r)r^2(r\sin\theta - |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|)\cos\theta}{(r^2 - 2r|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\sin\theta + |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2)^{3/2}}\, d\theta \tag{4}$$

となる。今、$f(t)\ (t > 0)$ を、

$$f(t) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(t\sin\theta - 1)\cos\theta}{(t^2 - 2t\sin\theta + 1)^{3/2}}\, d\theta \tag{5}$$

とすると、

$$f\left(\frac{r}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}\right) = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(r\sin\theta - |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|)\cos\theta}{(r^2 - 2r|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\sin\theta + |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2)^{3/2}}\, d\theta$$

なので、(4) は $f(t)$ を用いて

$$\boldsymbol{F} = \frac{2\pi mG}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\boldsymbol{e}_3 \int_0^R \rho(r)r^2 f\left(\frac{r}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}\right) dr \tag{6}$$

と書けることになる。

$f(t)$ を積分するために $u = t^2 - 2t\sin\theta + 1$ と置換すると、

$$t\sin\theta - 1 = \frac{t^2 + 1 - u}{2} - 1 = \frac{t^2 - 1 - u}{2}, \quad \cos\theta d\theta = -\frac{1}{2t}\, du$$

より、$t \ne 1$ のとき $f(t)$ は

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{t^2+2t+1}^{t^2-2t+1} \frac{t^2 - 1 - u}{2u^{3/2}} \left(-\frac{1}{2t}\right) du = \frac{1}{4t} \int_{(t-1)^2}^{(t+1)^2} \{(t^2-1)u^{-3/2} - u^{-1/2}\} du \\ &= \frac{1}{4t}\left[-(t^2-1)\frac{2}{\sqrt{u}} - 2\sqrt{u}\right]_{u=(t-1)^2}^{u=(t+1)^2} = -\frac{1}{2t}\left[\frac{t^2 - 1 + u}{\sqrt{u}}\right]_{u=(t-1)^2}^{u=(t+1)^2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2t}\left(\frac{t^2-1+(t+1)^2}{t+1}-\frac{t^2-1+(t-1)^2}{|t-1|}\right)\\
&= -\frac{1}{2t}\left(\frac{2t^2+2t}{t+1}-\frac{2t^2-2t}{|t-1|}\right)=\frac{t-1}{|t-1|}-1\\
&= \begin{cases} 0 & (t>1 \text{ のとき}),\\ -2 & (0<t<1 \text{ のとき}) \end{cases}
\end{aligned}
$$

と計算される。よって、これを (6) に代入すると、結局

$$
\boldsymbol{F}=-\frac{4\pi mG}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\boldsymbol{e}_3\int_0^{R\wedge|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}\rho(r)r^2dr \quad (a\wedge b=\min\{a,b\}) \tag{7}
$$

と書けることになる。

さらに、地球の中心から半径 s (>0) までの部分の球の質量を $\hat{M}(s)$ と書くことにすると、

$$
\hat{M}(s)=\int_{0<r<s}\rho(r)dv=\int_0^s dr\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\int_0^{2\pi}\rho(r)r^2\cos\theta d\phi=4\pi\int_0^s\rho(r)r^2dr
$$

となるので、これを用いれば (7) は、

$$
\boldsymbol{F}=-\frac{m\hat{M}(R\wedge|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|)G}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\boldsymbol{e}_3 \tag{8}
$$

と書くこともできる。

なお、A=O の場合は $(r^2-2r|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\sin\theta+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2)^{3/2}=r^3$ となるので、(3) は、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= mG\iiint_W \rho(r)(\boldsymbol{e}_1\cos\phi\cos\theta+\boldsymbol{e}_2\sin\phi\cos\theta+\boldsymbol{e}_3\sin\theta)\cos\theta dr d\phi d\theta\\
&= =mG\int_0^R\rho(r)dr\cdot(0\boldsymbol{e}_1+0\boldsymbol{e}_2+0\boldsymbol{e}_3)=\boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

となる。しかも、この計算は、$\mathrm{A}\in V$ の場合の広義積分が発散せずに収束することも示していることに注意する。$\mathrm{A}\in V$ の場合、A を中心とする小さな球 (A の近傍) の積分は、A を中心とする極座標で積分すれば、$\psi(\boldsymbol{x})$ が $\rho(r)$ ではなく r,ϕ,θ に依存する関数となるので $\boldsymbol{0}$ にはならないが、それ以外は上の計算とほぼ同じで分母の r は分子の r と丁度約分されてしまうので、積分は発散せずに収束することがわかる。

4 考察

本節では、公式 (8) を用いて、最初にあげたいくつかの疑問について考察してみる。

まず、A が V の外にある場合は、$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| > R$ なので

$$\hat{M}(R \wedge |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|) = \hat{M}(R) = M_V$$

となり、よって引力は

$$\boldsymbol{F} = -\frac{mM_VG}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\,\boldsymbol{e}_3$$

となるが、これは原点一点に質量 M_V が集中している場合の引力と等しい。つまり、V が球で、その密度分布が球対称な場合には、それが外部におよぼす引力は、質量が中心一点に集中していると考えてよいことになる (疑問 1 の答え)。

次に A が V の内部にある場合は、$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| < R$ なので $\hat{M}(R \wedge |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|) = \hat{M}(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|)$ より、

$$\boldsymbol{F} = -\frac{m\hat{M}(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|)G}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\,\boldsymbol{e}_3$$

となる。すなわちこの場合は、A がいるところより内側の部分の球による重力と同じになるので、A より外側の部分の引力の合力はちょうどつりあって 0 になっていることになる (図 2)。

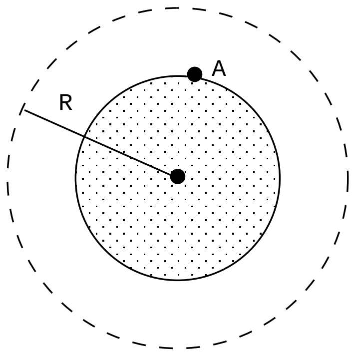

図 2: A が地球内部の場合

例えば密度が r によらず一定な場合を考えると、

$$\hat{M}(s) = \frac{4\pi}{3}s^3\rho_0 \quad (\rho(r) = \rho_0)$$

なので、重力は

$$\boldsymbol{F} = -\frac{4\pi\rho_0 mG}{3}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\boldsymbol{e}_3$$

となり、中心からの距離 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$ に比例する。つまり、地球の中心から地表までは重力は中心 (原点) からの距離に比例し、地表から外は距離の 2 乗に反比例する、ということになり、よって、地球の重力は地表が一番強く、地球から離れても、地中に潜っても小さくなり、中心では無重力になる。

実際の地球は、中心と地表近くでは構成物質が異なるため密度は一定ではないから、地中での重力は中心からの距離には比例はしないが、似たような状況にはなっていて、地中での重力は地表より強くなるわけではなく、特に中心では重力は 0 になる (疑問 2 の答え)。

最後に地球が空洞の場合を考えてみる。この場合、$\rho(r)$ は $0 < r < T$ および $r > R$ で 0 とすればいい (図 3)。よって、$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| < T$ では $\hat{M}(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|) = 0$ なので (8) より $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$

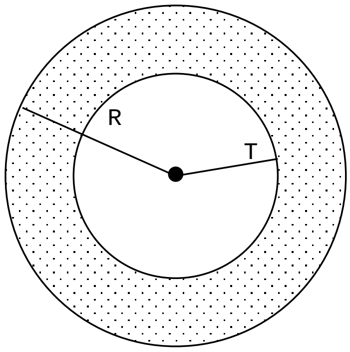

図 3: 空洞の場合

となり、空洞部分では無重力となる (疑問 3 の答え)。

なお、そのような万有引力の影響がない場では、地球の自転による遠心力が無視できなくなり、その遠心力により自転軸の外側に「重力」を感じて、自転軸を上にして立つことになる。

古い SF で、地底の空洞世界にも小規模の太陽のようなものが地球の中心に浮かんでいて、それをエネルギーとして、「地表人」とは丁度逆向きに立って (地球の中心を天として) 生活する、といった図を見たような気がするが、実際は、赤道では地表人と地底人は逆向きに立つことになるが、極に近づくにつれ地底の重力方向は地面に対して斜めになっていき、遠心力も小さくなるので重力が小さくなっていき、極では 0 になる (図 4)。

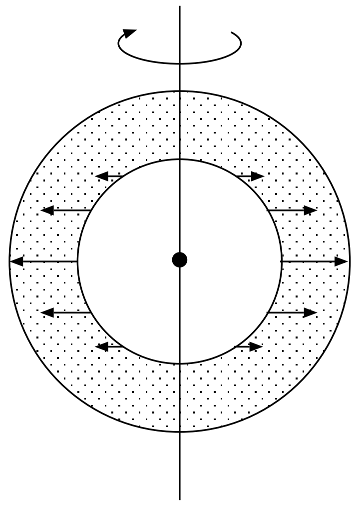

図 4: 自転による遠心力

もし中心に小規模の太陽があるなら、それによる重力も無視できないかもしれないし、もしかすると、外にある月や太陽の引力もそれなりの大きさになってしまうのかもしれない。

その世界では、地上とは物理法則がだいぶ異なるので、それをちゃんと検討すれば面白い SF ネタになるかもしれないが[3]、自転の遠心力は、最大の場所 (赤道) でも地球重力に比べて 2,3 桁位小さいので、いずれにせよそのような空洞内は、地上人の我々からすればほぼ無重力状態と言っていいだろう。

5 空洞世界の力の概算

最後に、前節に考察した、地中に空洞がある場合のその中でのいくつかの力の大きさを概算してみる。

まず、地底世界の最大の力である地球の自転の遠心力と、地表での重力との比較を行う。角速度 ω、半径 r で円運動する質量 m の物体に働く遠心力は $mr\omega^2$ なので、$r\omega^2$ と重力加速度 $g = 9.8$ [m/s^2] を比較すればよい。地球の半径 R_1、角速度 ω_1 は、地球の円周がほぼ 40000 [km] $= 4.0 \times 10^7$[m] なので、

$$R_1 = \frac{4.0 \times 10^7}{2\pi} = \frac{2.0}{\pi} \times 10^7[\mathrm{m}], \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{24 \times 60 \times 60} = \frac{\pi}{4.32} \times 10^{-4}[\mathrm{rad/s}]$$

[3]すでにそのような考察を行った SF 小説があるかどうかは知らない。

より、

$$\frac{R_1\omega_1^2}{g} = \frac{2.0\times\pi}{4.32^2\times 9.8}\times 10^{-1} = 0.00343 \tag{9}$$

なので、地表の最大自転遠心力 F_2 は地表重力 F_1 の千分の 3 程度ということになる。

地中の空洞内での最大遠心力はもちろん F_2 以下であり、次はそれを打ち消すような小太陽の質量 M_2 を考えてみる。空洞内の質量 m に働く引力の大きさは、mM_2G/R_1^2 以上であるから、それが最大遠心力 $mR_1\omega_1^2$ を越えるとどの場所でも中心向きの力が勝ってしまうことになる。よって、その限界の質量 M_2 では、

$$\frac{mM_2G}{R_1^2} = mR_1\omega_1^2$$

となる。一方、地球の重力加速度 g はほぼ地球の万有引力によるものに等しいので、地球の質量 M_1 $(= 5.97\times 10^{27}[\mathrm{kg}])$ と (9) により、

$$mR_1\omega_1^2 = 0.00343\,mg = 0.00343\times\frac{mM_1G}{R_1^2} = \frac{mM_2G}{R_1^2}$$

から、結局

$$M_2 = 0.00343\,M_1 \tag{10}$$

となる。これよりも大きければ地底世界は全部小太陽に落ちていくことになる。もしこの小太陽の密度が太陽の密度 $\rho_3 = 1.41\times 10^3[\mathrm{kg/m^3}]$ と同じであれば、その半径を R_2 とすると、(10) は地球の密度 $\rho_1 = 5.52\times 10^3[\mathrm{kg/m^3}]$ を用いて

$$M_2 = \rho_3 V_2 = \frac{4\pi}{3}\rho_3 R_2^3 = 0.00343\times\frac{4\pi}{3}\rho_1 R_1^3$$

と表され、よって

$$R_2 = R_1\sqrt[3]{0.00343\times\frac{\rho_1}{\rho_3}} = 0.238\,R_1$$

となり、地球の半径の約 1/4 程度が限界であることがわかる。

最後に、月や太陽からの引力と地球の重力との比較を行う。まず太陽質量 M_3、および太陽と地球の距離 R_3 は

$$M_3 = 3.32 \times 10^5 M_1, \quad R_3 = 1.50 \times 10^{11}[\mathrm{m}] = 2.36 \times 10^4\, R_1$$

であり、よって太陽引力の大きさ F_3 と地表面での重力の大きさ F_1 との比は、

$$\frac{F_3}{F_1} = \frac{mM_3G/R_3^2}{mM_1G/R_1^2} = \frac{M_3}{M_1}\left(\frac{R_1}{R_3}\right)^2 = 3.32 \times 10^5 \times (1/2.36)^2 \times 10^{-8} = 5.96 \times 10^{-4}$$

となり、地表重力の 1 万分の 6 程度となる。月の質量 M_4、月と地球の距離 R_2 は

$$M_4 = 0.0123\, M_1, \quad R_2 = 3.84 \times 10^8[\mathrm{m}] = 6.03 \times 10^1\, R_1$$

なので、月からの引力 F_4 は、

$$F_4 = \frac{M_4}{M_1}\left(\frac{R_1}{R_4}\right)^2 F_1 = 0.0123 \times (1/6.03)^2 \times 10^{-2}\, F_1 = 3.38 \times 10^{-6}\, F_1$$

となり、地表重力の 100 万分の 3 程度、ということになる。地表重力に代わり、最大遠心力 F_0 と比較すれば、

$$F_3 = 0.174\, F_0, \quad F_4 = 9.85 \times 10^{-4}\, F_0$$

となる。つまり太陽引力 F_4 は最大遠心力の 17% なので空洞世界ではかなり影響は強い。月の引力は最大遠心力の 1000 分の 1 程度なので太陽の引力ほどの影響はないが、しかしそれでも地表重力に対する太陽の引力の影響 (5.96×10^{-4}) よりも桁が一つ大きいので、それなりの影響があることがわかる。

つまり、地底世界は、外の太陽も月も見えないが、それら配置の影響をかなり強く受けてしまうことになる。

参考文献

[1] 国立天文台編、「理科年表 平成 2 年」(1990)、丸善.