

弾性力学入門

2011年夏学期

中島 研吾

科学技術計算 I (4820-1027) ・ コンピュータ科学特別講義 I (4810-1204)

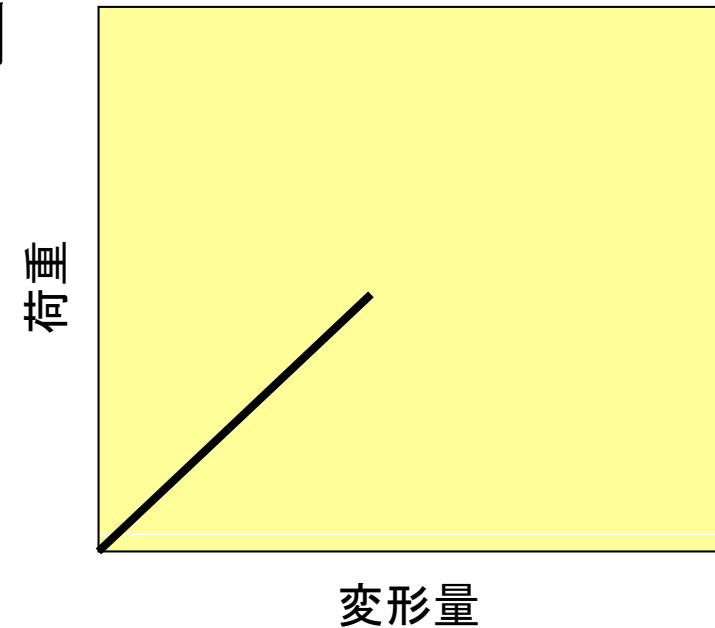
- 弾性力学
 - 弾性力学の対象
 - 応力
 - 弾性力学の支配方程式

弾性力学

- 連続体力学（Continuum Mechanics） 固体力学（Solid Mechanics）の一部
- 弾性体（Elastic Material）を対象
 - 弾性論（Theory of Elasticity）
- 中島の学生時代（航空学科）
 - 材料力学（2年冬，2コマ）：船舶，応物
 - 材料力学演習（3年夏，1コマ）
 - 材料強弱実験（3年夏，1コマ）
 - 弾性力学Ⅰ（3年夏，1コマ）
 - 弾性力学Ⅱ（3年冬，1コマ）

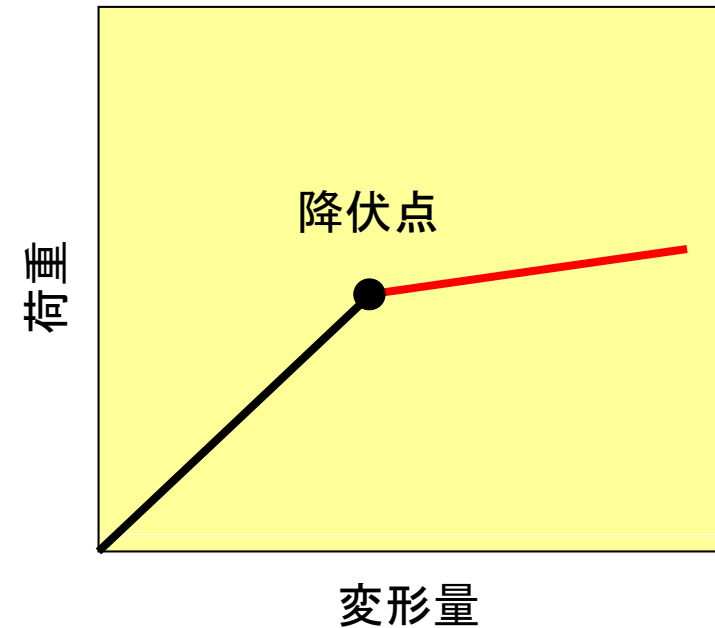
弾性体とは？

- 「荷重」と「変形量」が比例
 - Hookeの法則
 - 例
 - バネ $kx = -mg$
 - 金属, 繊維, 樹脂 . . .
 - 「荷重」を除くと「変形量」は0になる
 - もとの形状にもどる



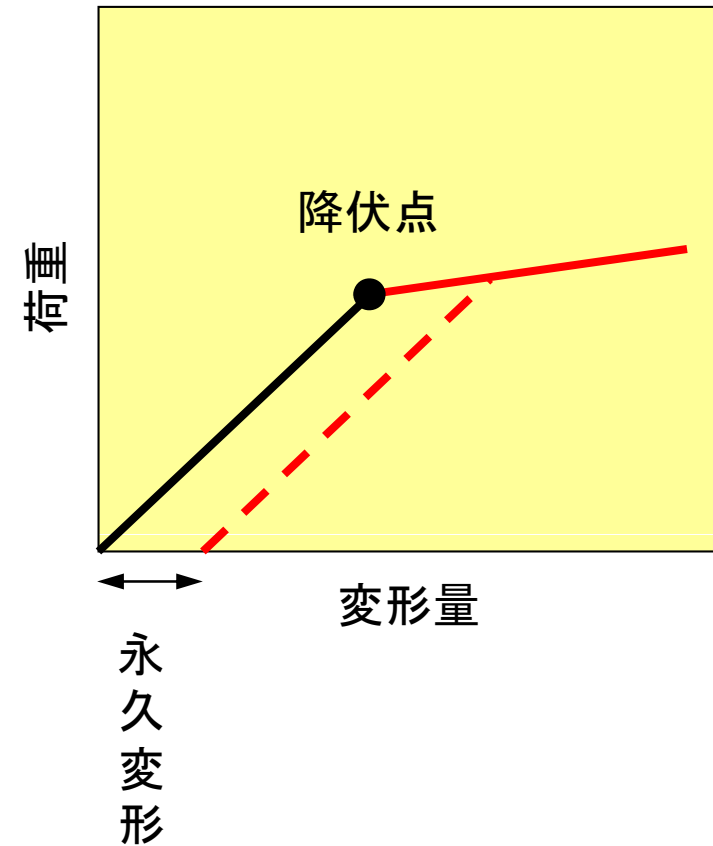
変形量（荷重）が増えると 弾性でなくなる

- 降伏
 - 降伏点
 - 弾性限界
- 非弾性
- 塑性（Plastic Material）



弾性限界を超えると，荷重が0になっても変形量は0にならない

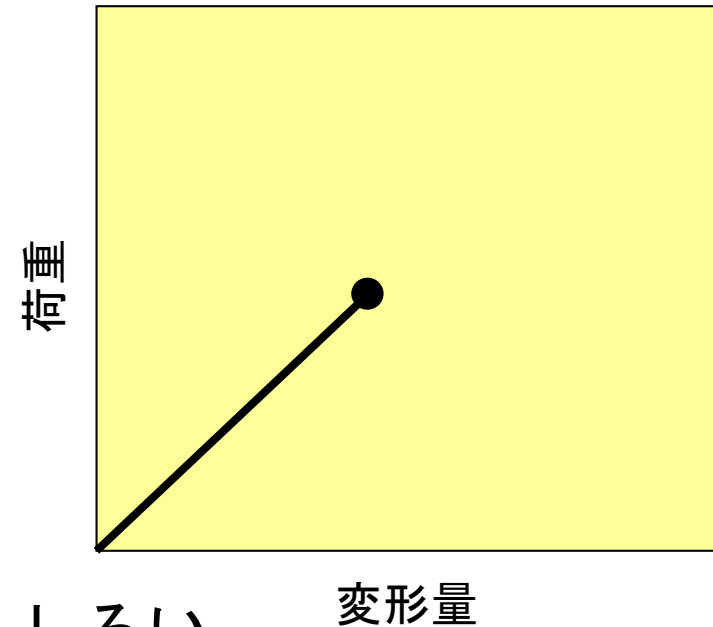
- 元の形状にもどらない
- 永久変形
- Tシャツの首
- はさみすぎたクリップ
- 伸びすぎたバネ，ゴム



弾性力学の扱う範囲

- 弾性限界，降伏点まで

- 変形量（変位）は小さい
- 微小変形理論
 - 物理的な変形量はあるが，形状は変わらないと仮定
- 線形



- 塑性，非弾性⇒非線形

- 研究としてはより難しく，おもしろい

- 工学的には「弾性」の方が重要

- 弾性限界を超えたものは再利用不可（例外：板金加工等）
 - いかに弾性限界内で荷重，変形を抑制するかが設計としては問題
- 塑性，非弾性は事故時：衝突

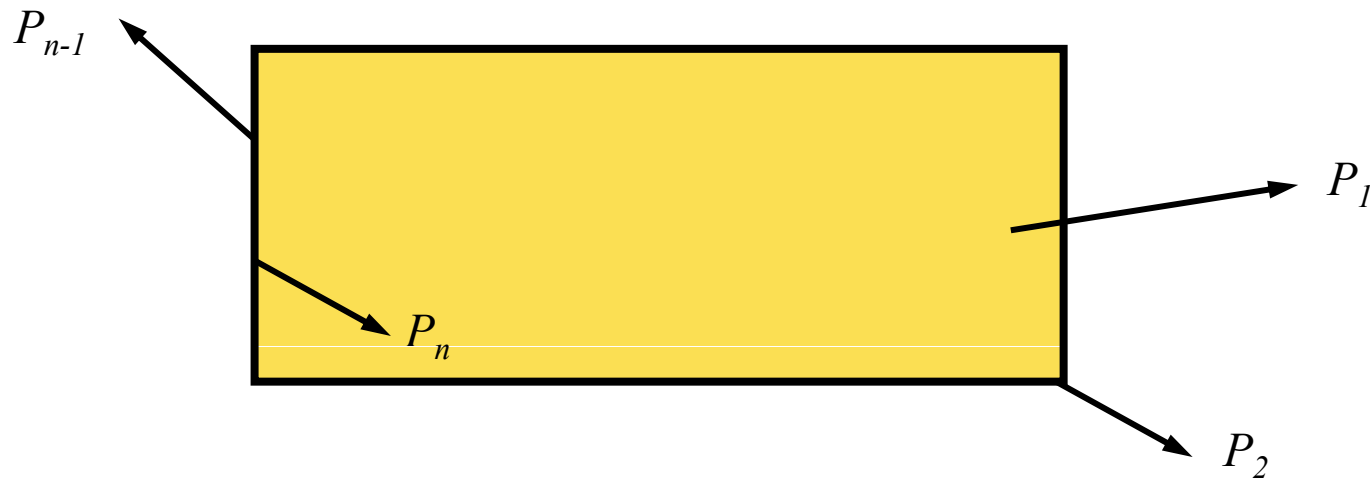
- 弾性力学
 - 弾性力学の対象
 - 応力
 - 弾性力学の支配方程式

応力とは？（1/6）

- 物体（ここでは弾性体）に外力（external force）が作用すると、物体は変形し、物体を構成する分子間の力によって内力（internal force）を発生させ、外力に抵抗する。
- 物体はこの内力と外力が釣り合うところまで変形する
- 外力
 - 表面力：軸力，荷重，内圧など
 - 物体力：重力，遠心力，磁力など
- 外力，内力は「大きさ」と「方向・向き」を持ったベクトル量

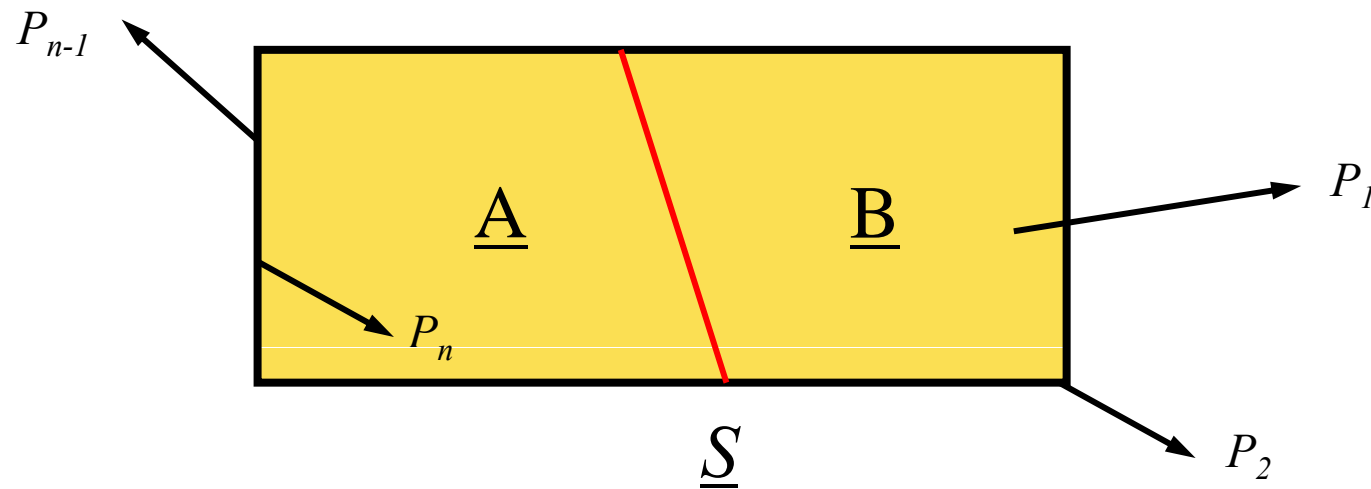
応力とは？ (2/6)

- ある弾性体が n 個の外力を受けて釣り合っているものとする



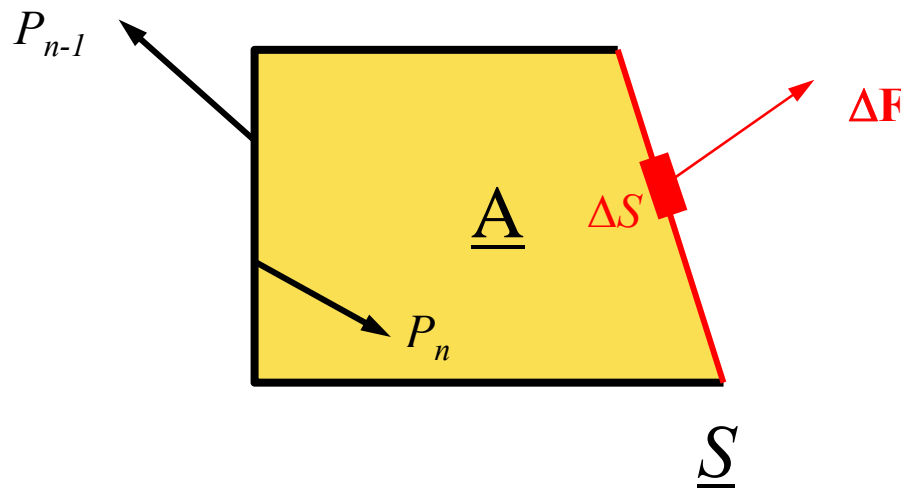
応力とは？ (3/6)

- 仮想的な断面 S で切断すると，面 S を通して， A 部分は B 部分に， B 部分は A 部分に内力を作用



応力とは？（4/6）

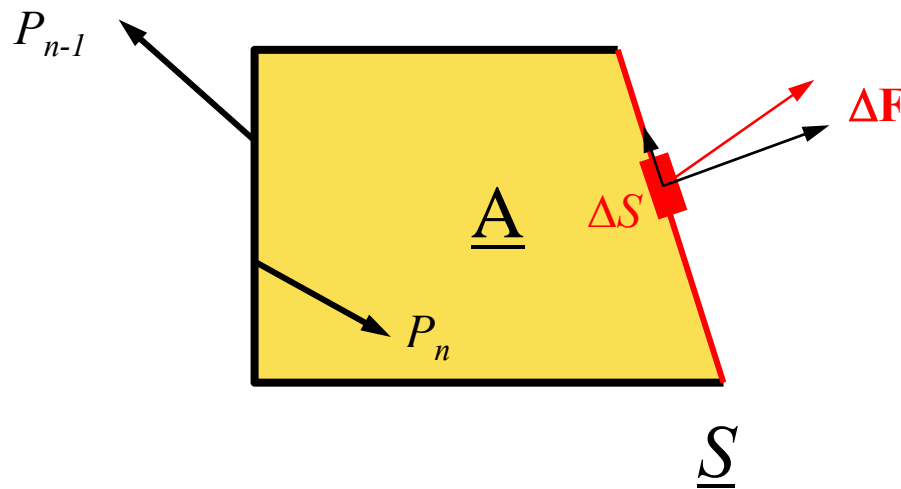
- A 部分の S 面上に微小面積要素 ΔS を考えて、 S 面上に作用する分布内力のうち ΔS に作用しているものの合力を $\Delta \mathbf{F}$ （ベクトル）とする
- 単位面積当たりの平均力 $\Delta \mathbf{F}/\Delta S$ の ΔS を無限小とした極限值 \mathbf{p} を応力ベクトル（stress vector）と言う



$$\mathbf{p} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S}$$

応力とは？ (5/6)

- 応力：単位面積当たりの力（のベクトル）
 - 引張：正，圧縮：負
- 面に対して・・・
 - 垂直：垂直応力（normal stress）
 - 平行：せん断応力（shear stress）
- 設計に当たって重要なポイント：降伏応力



$$\mathbf{p} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta S}$$

応力とは？ (6/6)

- 直交座標系に関する応力成分
 - 三次元：9成分
 - 垂直応力 (normal stress) σ
 - せん断応力 (shear stress) τ

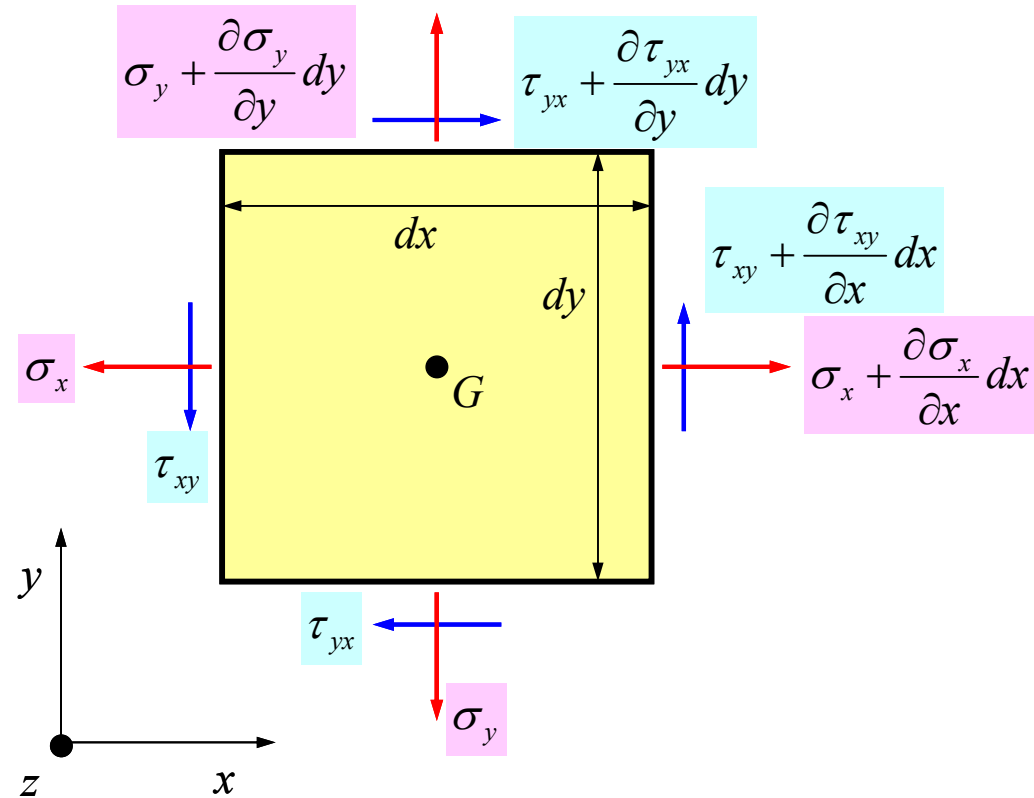
$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix}$$

- 弾性力学
 - 弾性力学の対象
 - 応力
 - 弾性力学の支配方程式

弾性力学の支配方程式

- つりあい式 (equilibrium equations)
- 適合条件式 (compatibility conditions)
 - 変位～ひずみ関係式
- 構成式 (constitutive equations)
 - 応力～ひずみ関係式
- 主に二次元モデルを使用して説明する

つりあい式 X方向 二次元微小要素



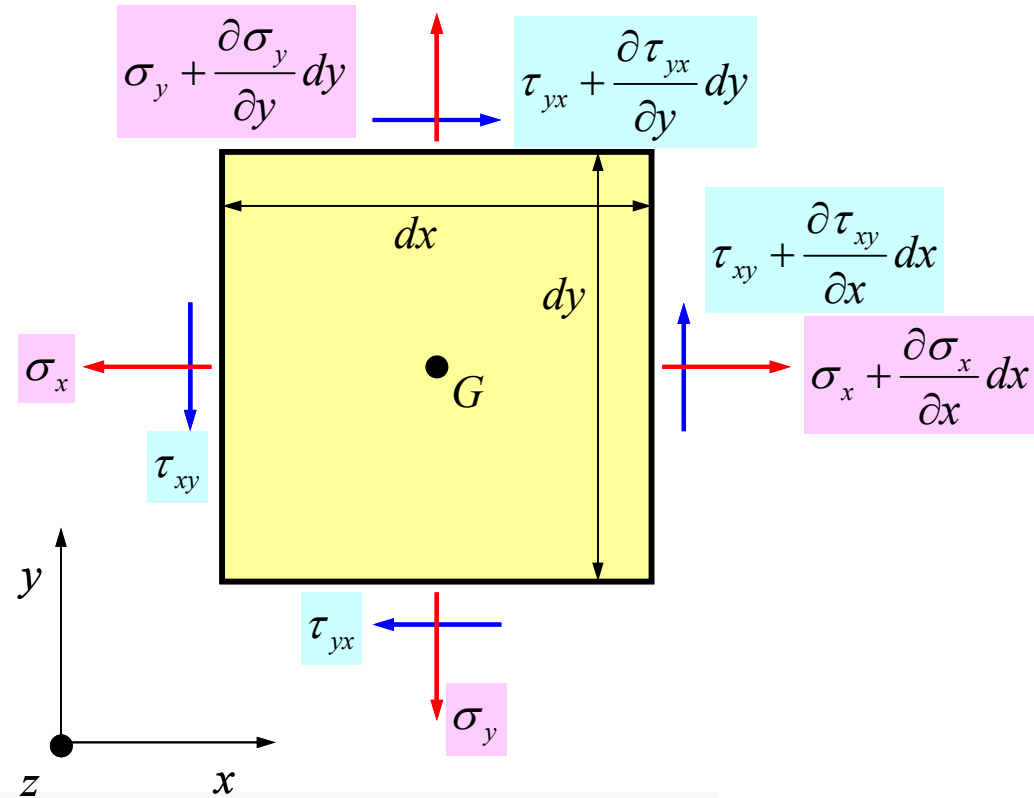
$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy \times 1 - \sigma_x \cdot dy \times 1$$

$$+ \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx \times 1 - \tau_{yx} \cdot dx \times 1 + \underline{X} \cdot dx \cdot dy \times 1 = 0$$

物体力
X方向成分

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \underline{X} = 0$$

つりあい式 Y方向 二次元微小要素



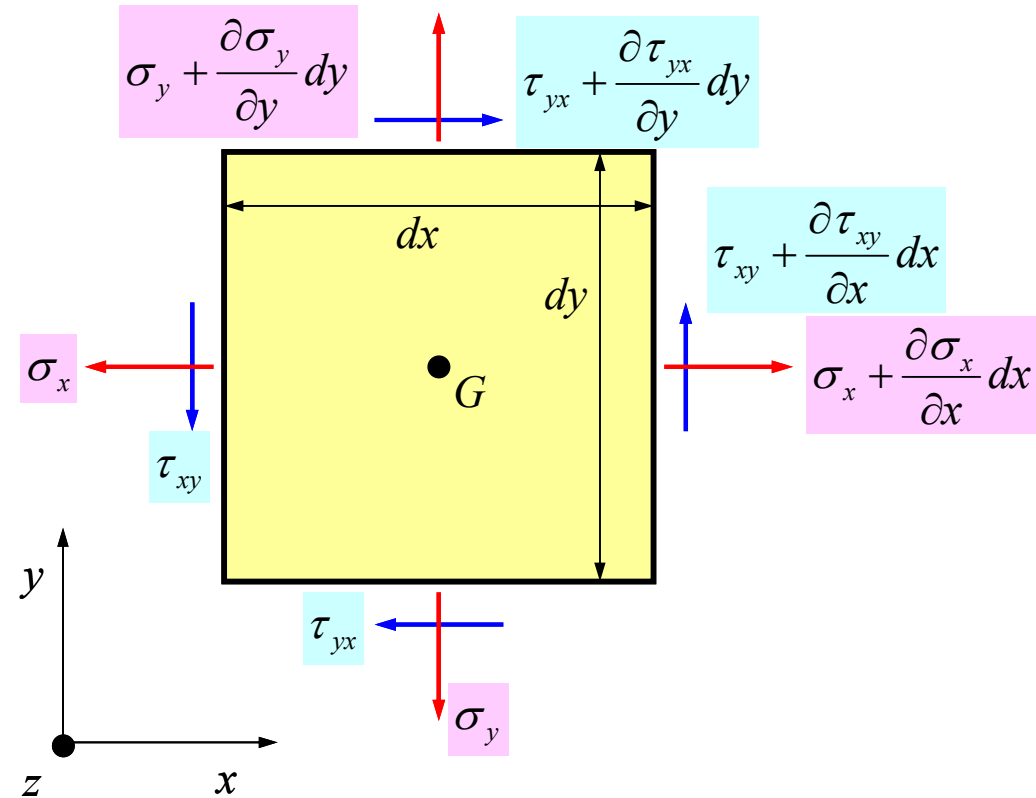
$$\left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) dx \times 1 - \sigma_y \cdot dx \times 1$$

$$+ \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy \times 1 - \tau_{xy} \cdot dy \times 1 + \underline{Y} \cdot dx \cdot dy \times 1 = 0$$

物体力
Y方向成分

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \underline{Y} = 0$$

Z軸まわり モーメント @G点



$$\left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy \times 1 \times \frac{dx}{2} + \tau_{xy} dy \times 1 \times \frac{dx}{2}$$

$$- \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx \times 1 \times \frac{dy}{2} - \tau_{yx} dx \times 1 \times \frac{dy}{2} = 0$$

$\therefore \tau_{xy} = \tau_{yx}$

二次元のつりあい式

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0$$

三次元のつりあい式 応力の独立な成分は6つ

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz}$$

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{Bmatrix}$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0$$

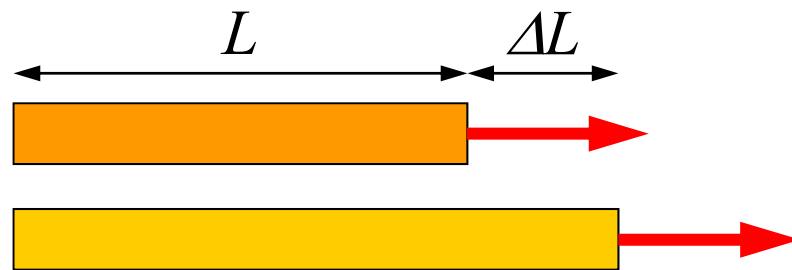
$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0$$

ひずみの概念

- 弾性力学（というか固体力学）
 - 荷重と変形量
- 応力（stress）
 - 単位面積あたりの荷重
- ひずみ（strain）
 - 相対的な変形量

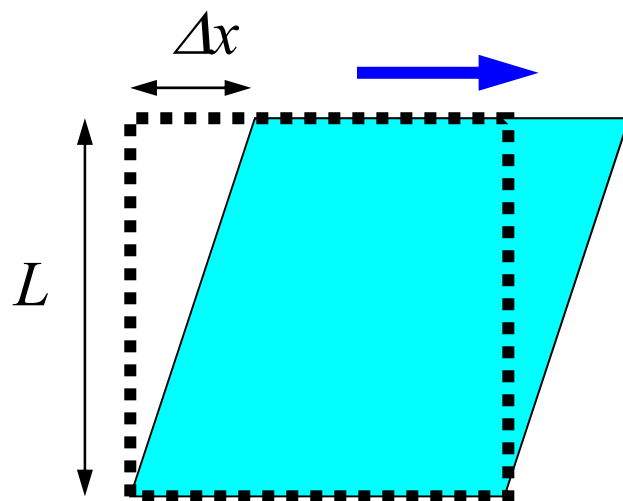
ひずみ：相対的な変形量，変位

- 垂直ひずみ (normal strain)



$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

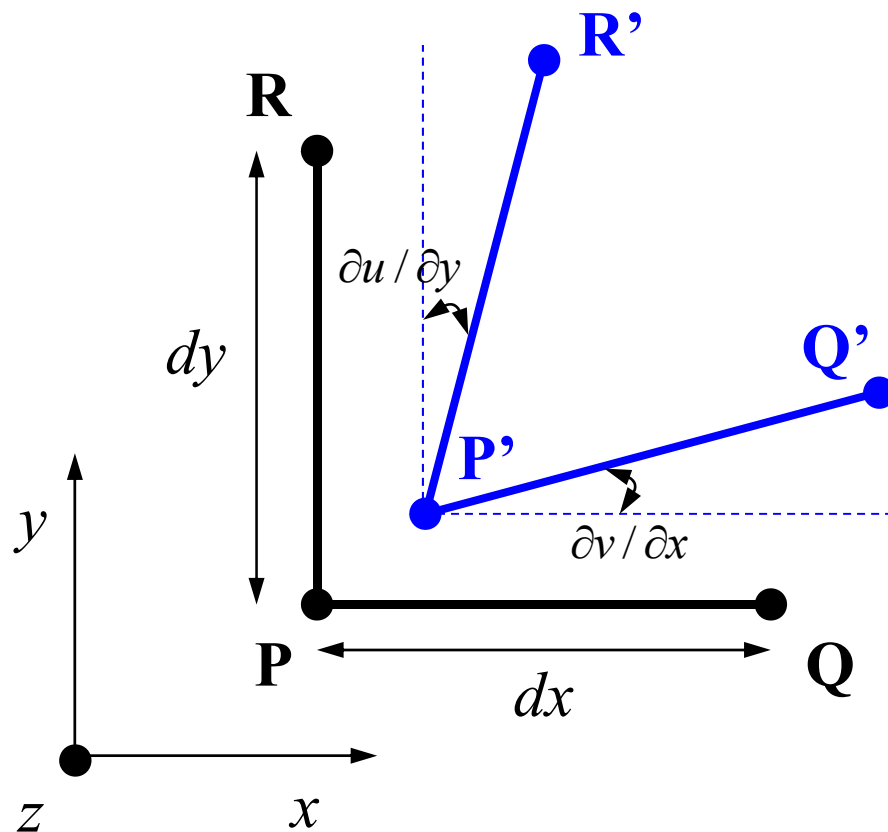
- せん断ひずみ (shear strain)



$$\gamma = \frac{\Delta x}{L}$$

ひずみ，変位の関係

- 変位（3次元）： (u, v, w)
- ここでは二次元微小要素
 - 変形前： P, Q, R ，変形後： P', Q', R'



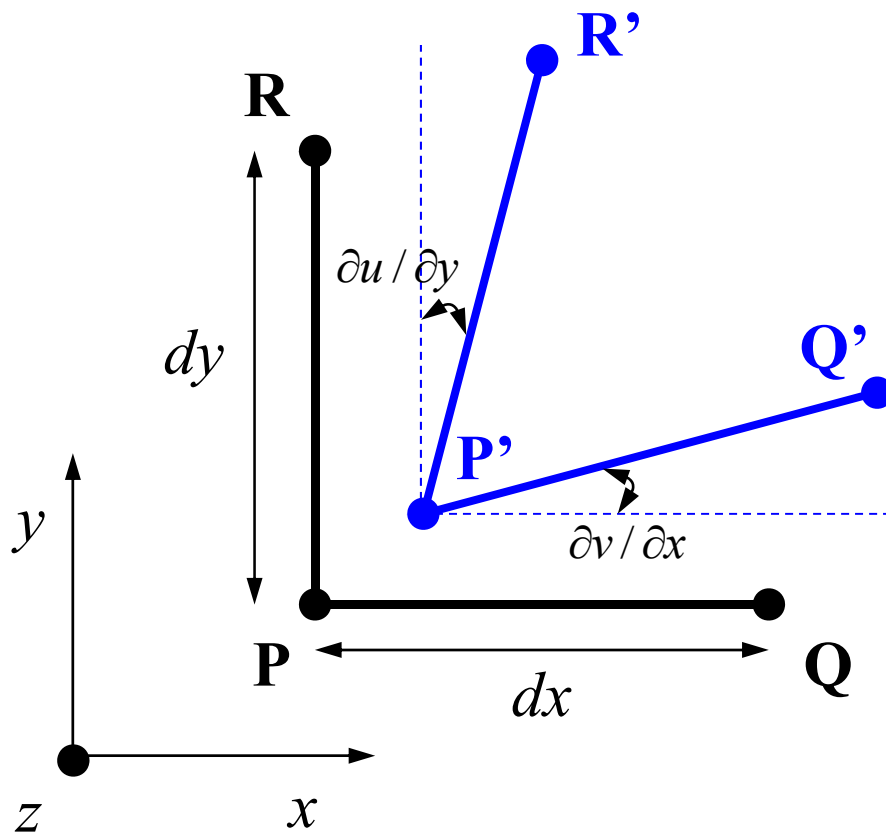
$P : (x, y)$
 $Q : (x + dx, y)$
 $R : (x, y + dy)$

$P' : (x + u, y + v)$
 $Q' : (x + dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx, y + v + \frac{\partial v}{\partial x} dx)$
 $R' : (x + u + \frac{\partial u}{\partial y} dy, y + dy + v + \frac{\partial v}{\partial y} dy)$

垂直ひずみ～変位の関係

- $PQ \Rightarrow P'Q'$

$$\varepsilon_x = \frac{\left\{ \left(x + dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) - (x + u) \right\} - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

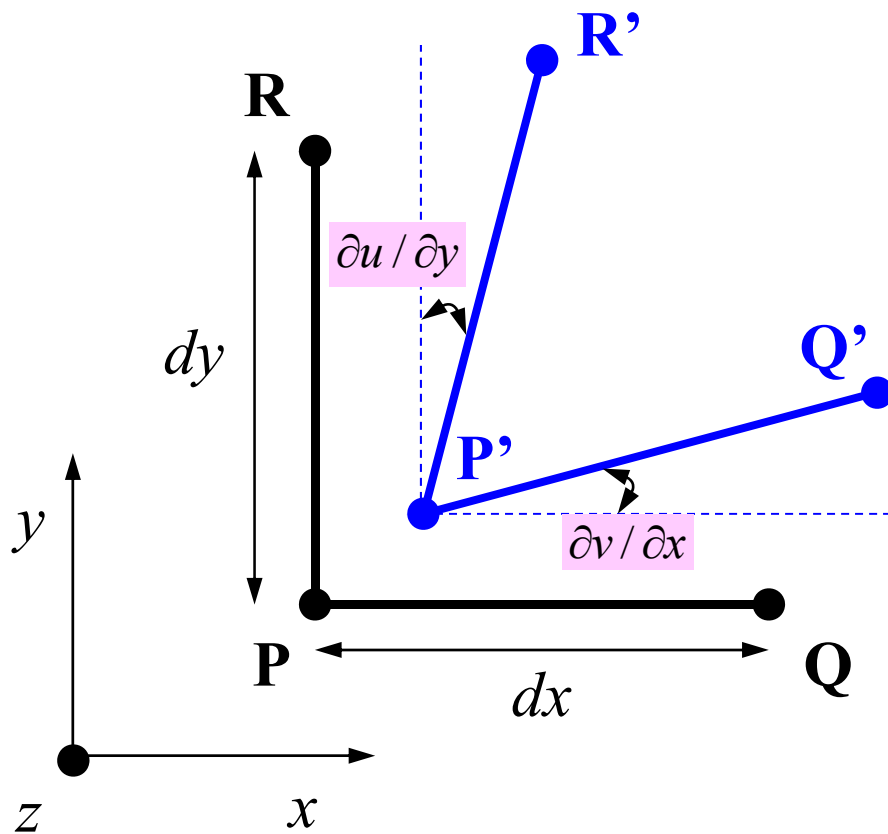


$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

せん断ひずみ～変位の関係



$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

適合条件式：ひずみ成分の関係式

- 二次元

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

- 三次元

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \right)$$

構成式：応力～ひずみ関係（1/3）

- ヤング率 E

- 応力とひずみは比例
- 比例定数をヤング率 E とする（各物質に固有の値）

$$\sigma_x = E\varepsilon_x, \quad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

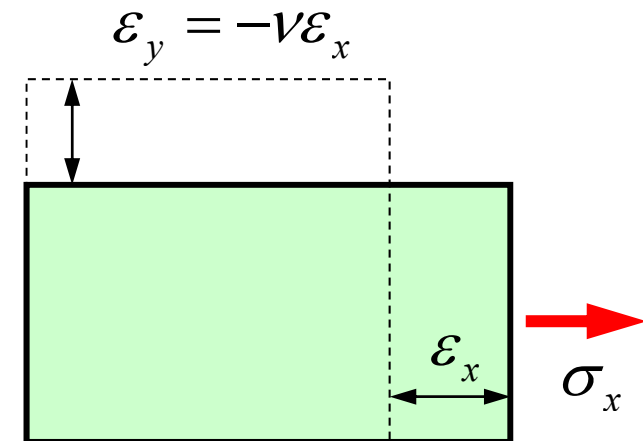
- ポアソン比 ν

- X方向に荷重をかけると，横方向（Y,Z）にも変形
- 縮み割合をポアソン比 ν とする

- 各物質に固有の値

- 金属では0.30程度
- 水：0.50，ゴム：ほぼ0.50⇒非圧縮

$$\varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$



構成式：応力～ひずみ関係 (2/3)

- 三方向の垂直応力 ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$) の効果
 - 各ひずみ成分の足し合わせ

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E} \left\{ \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) \right\}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} = \frac{1}{E} \left\{ \sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x) \right\}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \nu \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} = \frac{1}{E} \left\{ \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y) \right\}$$

構成式：応力～ひずみ関係 (3/3)

- せん断ひずみは垂直応力 ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$) に、無関係でせん断応力 τ にのみ比例
 - 比例定数：横弾性係数 G

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

応力⇒ひずみ関係

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

ひずみ⇒応力関係

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-2\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}$$

$[D]$

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$

- 非圧縮性材料 ($\nu \sim 0.50$) の場合, 特別な扱い必要

いくつかの仮定

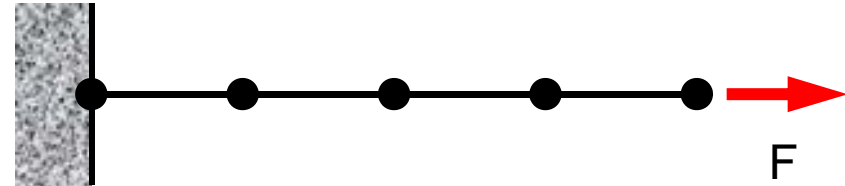
- 等方性材料を仮定
 - ヤング率, ポアソン比が一定
 - CFRP (Carbon Fiber Reinforced Plastics, 炭素繊維強化プラスチック) のような複合材料
 - 直交異方性
- ポアソン比は0.30程度

有限要素法への適用

- 変位法
 - 変位量を従属変数：一般的に広く使用されている
 - 本講義でもこのアプローチを採用
- 応力法
 - 応力を従属変数

一次元弾性問題

- 一次元トラス要素（ x 方向のみに自由度）の引っ張り



- 断面積一定 A
- ヤング率 E
- $u=0@X=0$, 引張力 $F@X=L$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + X = 0$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sigma_x = E \varepsilon_x$$

- 変位法

- 「ひずみ~変位関係」を「ひずみ \Rightarrow 応力関係」に代入,
得られた「変位 \Rightarrow 応力」関係を「つりあい式」に代入

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(E \frac{\partial u}{\partial x} \right) + X = 0$$