音が作る模様 クラドニ図形
〜 微分方程式で迫る 〜

桂田 祐史

明治大学 現象数理学科

2015 年 9 月 30 日

桂田の自己紹介

- 明治大学 総合数理学部 現象数理学科
- 専門: 微分方程式の数値計算法の数理の研究 (つまり数学者)
- 目標: 新しい優れた数値計算法を開発し提唱すること
  (このこと自体は必ずしも数学ではないかもしれない)
- 私の主張: 計算して始めて分ることが多い。もっと計算を!

今日の話は

- クラドニ図形という「現象」を紹介する
  古くから知られているけれど、まだ研究すべき問題が残っている「現象数理学」を説明するのに良い題材

このスライドは

http://nalab.mind.meiji.ac.jp/koudai2015/

に載せてあります。

まずは見てみましょう (百聞は一見に如かず)

実験

- 下敷き (とカッター)
- 砂
- スピーカー (少し特別: 周波数を指定して音を出す)

を使って

→桂田研院生 遠藤小欽[1] の実験[2](2014)

[1]先端数理科学研究科 M2
[2]実験指導 末松信彦 専任講師

まずは見てみましょう (百聞は一見に如かず)

実験

- 下敷き (とカッター)
- 砂
- スピーカー (少し特別: 周波数を指定して音を出す)

を使って

→桂田研院生 遠藤小欽[1] の実験[2](2014)

もっと見たければ…

YouTube 等でキーワード

「クラドニ」,「Chladni」,「金沢健一」

[1] 先端数理科学研究科 M2
[2] 実験指導 末松信彦 専任講師

まずは見てみましょう (百聞は一見に如かず)

実験

- 下敷き (とカッター)
- 砂
- スピーカー (少し特別: 周波数を指定して音を出す)

を使って

→桂田研院生 遠藤小欽[1] の実験[2](2014)

もっと見たければ…

YouTube 等でキーワード

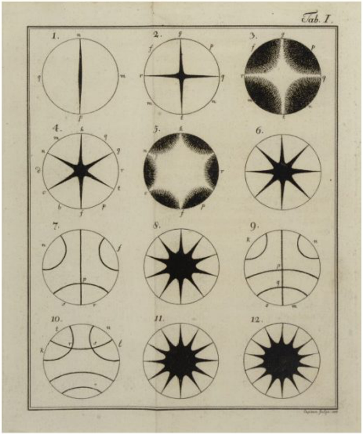
「クラドニ」,「Chladni」,「金沢健一」

ちなみに　9/27(日) 日テレ「スクール革命」に金沢さんが出演してた。

[1]先端数理科学研究科 M2
[2]実験指導 末松信彦 専任講師

発見した人: エルンスト・クラドニ (ドイツ, 1756–1827)

- 物理学者＆音楽家
- 「音響学の父」、「振動理論の元祖」 (他に隕石宇宙由来説で有名)



クラドニのしたこと

板 (金属, ガラス, ⋯) をバイオリンの弓でこすって “励起させる” とき、どこをこするかで異なるピッチ (音高) の音を出せる。そこに砂をまくと各ピッチで美しいパターンが出現することを発見した。

かなり似ている→美術作家金沢健一氏のパフォーマンス

著作

- Entdeckungen über die Theorie des Klanges (「音の理論に関する発見」, 1787)
- Die Akustik (音響学, 1802)
- Neue Beyträge zur Akustik (音響理論に関する新しい寄稿, 1817)

に多数のスケッチを掲載 (系統的な実験の成果)

- パターンを二つのインデックスで表す “クラドニの記号” $m|n$ 提案
- 音高も測定・記録し、“クラドニの法則” と呼ばれることになった経験則を提示

なぜ模様が出来る？

なぜ模様が出来る？

実は、板には振動しているところと振動していないところがある。

なぜ模様が出来る？

実は、板には振動しているところと振動していないところがある。

砂は振動しているところから振動していないところに集まる。
振動しているところに来た砂は跳ねてよそに行き、
振動していないところに来るとそこに落ち着く。

なぜ模様が出来る？

実は、板には振動しているところと振動していないところがある。

砂は振動しているところから振動していないところに集まる。
振動しているところに来た砂は跳ねてよそに行き、
振動していないところに来るとそこに落ち着く。

$$\Downarrow$$

振動していないところ (節(ふし)と呼ばれる) が浮かび上がる

なぜ模様が出来る？

実は、板には振動しているところと振動していないところがある。

砂は振動しているところから振動していないところに集まる。
振動しているところに来た砂は跳ねてよそに行き、
振動していないところに来るとそこに落ち着く。

$$\Downarrow$$

振動していないところ (節(ふし)と呼ばれる) が浮かび上がる

残る問題: 板はどのように振動するのか？

(節はどこにあるのか？)
ある意味で当たり前過ぎる問題

板はどのように振動するのか？ — モデルを求めて

クラドニの 1808 年のパリ訪問を機会に

弾性体で出来た曲面の振動理論をつくり、実験的事実とどこまで合致するか示せ

というテーマで懸賞論文のコンテスト

整数論の研究でも有名な、ソフィ・ジェルマン (1776–1831) が論文を提出 (1811, 1813, 1815)
→ 弾性板の振動の "**微分方程式**" を導いた

ジェルマン - キルヒホッフ (1850) - ラブ のモデル

メインの方程式は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -D\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)$$

$u = u(x, y, t)$ は板の点 (x, y) の時刻 t における変位を表す。
→ 膜の振動方程式である波動方程式とは違う

これで解決？

これで解決？

実はこの方程式を解くのはむつかしい。

これで解決？

実はこの方程式を解くのはむつかしい。

ちょうどその頃に発見 (発明？) された素晴らしい「**フーリエの方法**」で

半分くらい解けた

これで解決？

実はこの方程式を解くのはむつかしい。

ちょうどその頃に発見 (発明？) された素晴らしい「**フーリエの方法**」で

半分くらい解けた

要点

1. (後で説明する) 「**固有振動**」の和の形に表せる
2. 固有振動を求める方程式が作れる

これで解決？

実はこの方程式を解くのはむつかしい。

ちょうどその頃に発見 (発明？) された素晴らしい「**フーリエの方法**」で

半分くらい解けた

要点

1. (後で説明する) 「**固有振動**」の和の形に表せる
2. 固有振動を求める方程式が作れる ← 今回これを解くのが難しい
   グスタフ・キルヒホッフは円形板の場合だけしか解けなかった
   (実は現在でもそれ以外の場合は解けない)

これで解決？

実はこの方程式を解くのはむつかしい。

ちょうどその頃に発見 (発明？) された素晴らしい「**フーリエの方法**」で

半分くらい解けた

要点

1. (後で説明する) 「**固有振動**」の和の形に表せる
2. 固有振動を求める方程式が作れる ← 今回これを解くのが難しい
   グスタフ・キルヒホッフは円形板の場合だけしか解けなかった
   (実は現在でもそれ以外の場合は解けない)

20 世紀に入って (懸賞論文コンテストの約 100 年後に)
　ヴァルター・リッツ (1878–1909) が「**リッツの方法**」と呼ばれる素晴らしい**数値計算法**を開発し、正方形板の場合に手計算で解いてみせた (1909 年)。

(キーワードが目白押し —— 問題が深いからでしょう…)

小休止して一言: 現象数理学の観点から

クラシックな問題ではあるけれど、現象数理学の三本柱がはっきり見える問題

1. モデリング (現象を表す式を作る)
2. アナリシス (数学を用いてモデルを調べる)
3. シミュレーション (コンピューターの数値計算でモデルを調べる)

小休止して一言: 現象数理学の観点から

クラシックな問題ではあるけれど、現象数理学の三本柱がはっきり見える問題

1. モデリング (現象を表す式を作る)
2. アナリシス (数学を用いてモデルを調べる)
3. シミュレーション (コンピューターの数値計算でモデルを調べる)

本論に戻って

固有振動とは？

(ひとりごと: フーリエの方法抜きに理解するのは難しい…)

物体を振動させるとき、特定の周期で (言い換えると特定の振動数で) 振動しやすい。その振動のことを**固有振動** (normal mode of vibration) と呼ぶ。

その周期、振動数をそれぞれ**固有周期**、**固有振動数**と呼ぶ。

例: 振り子の場合

振り子は、重りを強制的に手でつかんで動かしたりでもしない限り、ある特定の周期で振れる。

強く揺らしても、振幅が大きくなるだけで、周期は (ほとんど) 変わらない (ガリレオ, **振り子の等時性** — 振り子時計の原理でもある。)

例: 振り子の場合

振り子は、重りを強制的に手でつかんで動かしたりでもしない限り、ある特定の周期で振れる。

強く揺らしても、振幅が大きくなるだけで、周期は (ほとんど) 変わらない (ガリレオ, **振り子の等時性** — 振り子時計の原理でもある。)

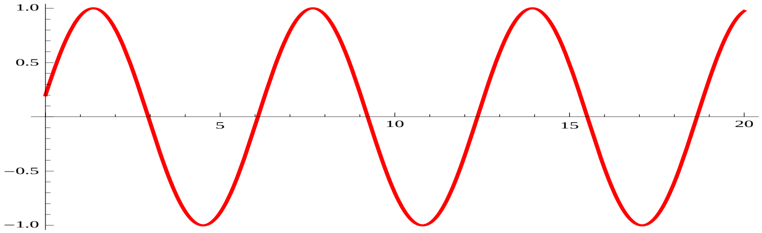
(物理を学んだ人のために) 振り子の周期 T は

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad (g = 9.8\ [\mathrm{ms}^{-2}]\ (\text{重力加速度}),\ \ell\ \text{はヒモの長さ})$$

(ただし振幅はあまり大きくないとする。)

例: 振り子の場合 (続き)

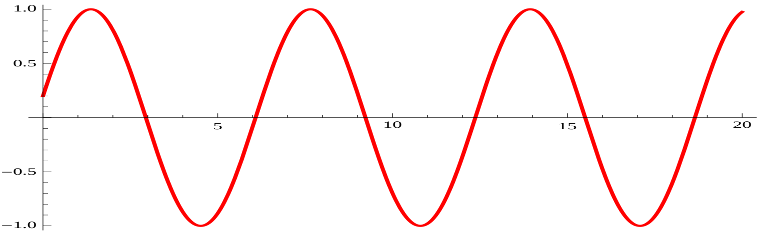
振り子の振れの角度の時間変化は



これは実は**サイン・カーブ**である。

例: 振り子の場合 (続き)

振り子の振れの角度の時間変化は



これは実は**サイン・カーブ**である。
つまり

$$\theta = A \sin(\omega t + \phi), \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{(いわゆる\textbf{単振動}の式)}.$$

揺らし方によって、振幅 A, 位相 ϕ は変わっても、周期 T は (従って ω も) 一定で、振動を表す式の形はつねにこれである。

弦の振動

弦の振動は、**フーリエの方法**で完全に解ける。
固有振動が無限にたくさんある。

ちょっとプログラムで固有振動をシミュレーション…

弦の振動

弦の振動は、**フーリエの方法**で完全に解ける。
固有振動が無限にたくさんある。

ちょっとプログラムで固有振動をシミュレーション…

黒線は関数のグラフに表せる。

$$A_1(x) = a_1 \sin\frac{\pi x}{L}, \quad A_2(x) = a_2 \sin\frac{2\pi x}{L}, \quad A_3(x) = a_3 \sin\frac{3\pi x}{L}, \cdots$$

一般に凸(でこ)(山)凹(ぼこ)(谷) 合わせて n 個の場合

$$A_n(x) = a_n \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

弦の振動 (続き)

動いている赤線は?

$$u_n = A_n(x)\sin(\omega_n t + \phi_n) \qquad \left(\omega_n = \frac{n\pi c}{L}\right)$$
$$= a_n \sin\frac{n\pi x}{L} \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t + \phi_n\right).$$

これが弦の固有振動を表す式である。

弦の各点は単振動している (x を任意に一つ選ぶと、$A_n(x)$ は定数で、単振動の式になる)。

弦の振動 (続き)

弦の一般の振動を表す式は

$$\begin{aligned} u &= A_1(x)\sin(\omega_1 t + \phi_1) + A_2(x)\sin(\omega_2 t + \phi_2) + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x)\sin(\omega_n t + \phi_n), \end{aligned}$$

$$A_n(x) = a_n \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

弦の振動 (続き)

弦の一般の振動を表す式は

$$
\begin{aligned}
u &= A_1(x)\sin(\omega_1 t + \phi_1) + A_2(x)\sin(\omega_2 t + \phi_2) + \cdots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x)\sin(\omega_n t + \phi_n),
\end{aligned}
$$

$$
A_n(x) = a_n \sin\frac{n\pi x}{L}.
$$

式は一見複雑そうだけど、要するに

固有振動の和

実は、非常に多くの振動現象で同じ形の式

$$
\text{一般解} = \text{固有振動の和}
$$

が成り立つ。違うのは $A_n(x) = a_n \sin\dfrac{n\pi x}{L}$ と ω_n の部分のみ。

共振

物体は固有周期に近い周期で力を加えられると大きく振動する。

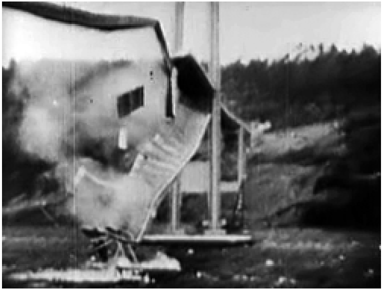
この現象を**共振**, **共鳴**と呼ぶ。

建物など製造物は共振を起こしにくいように作る。

最近は「長周期地震動」というのが話題になっている。

余談: タコマ橋 (the Tacoma Narrows Bridge) の崩壊

1940 年 11 月 7 日、アメリカのワシントン州のタコマ海峡で、建設したばかりの吊橋が、風速 19 m の風で激しく揺れて、崩壊してしまった。

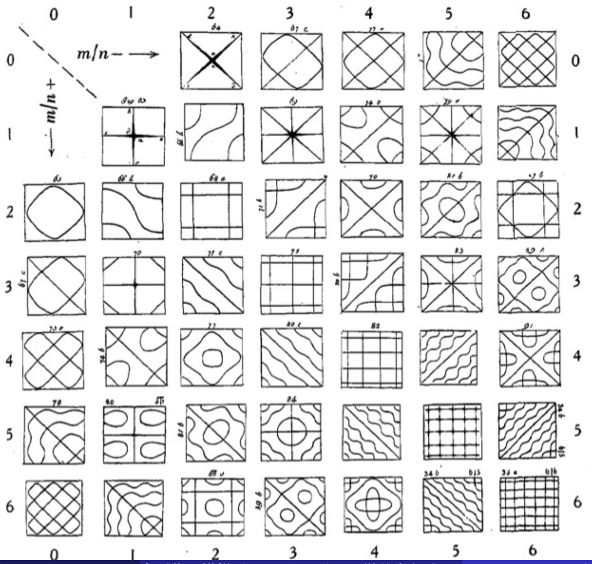


画像はウィキペディアから。ネットには動画もある。

風が吹くことで橋の周りに渦ができて、その渦からの周期的な力とタコマ橋のねじれ振動が共振を起こしてしまったため、と言われている。

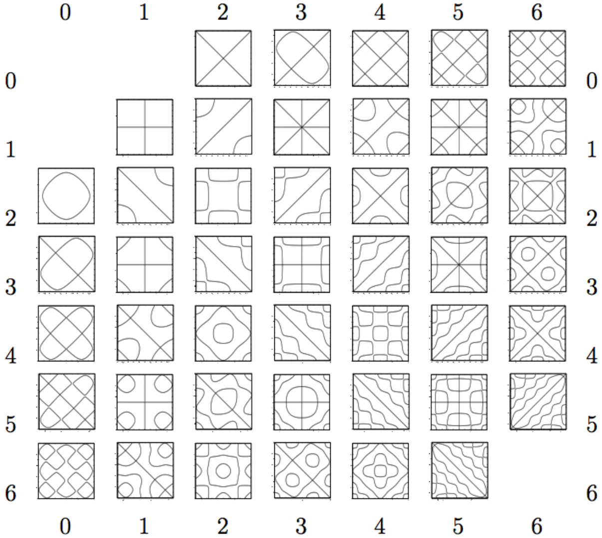
懸賞論文の課題は解決したのか？

クラドニによる正方形板の場合のスケッチ (並べ方はウォーラー [1])



懸賞論文の課題は解決したのか？ (続き)

モデルの数値計算結果



スケッチとモデルの数値計算

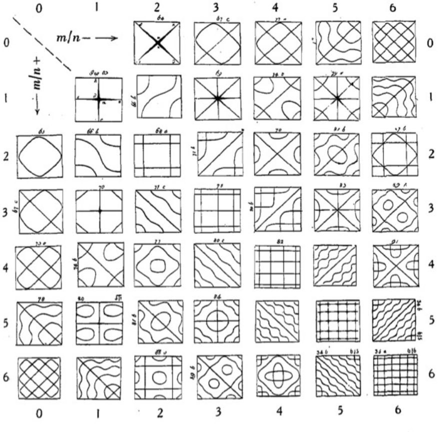
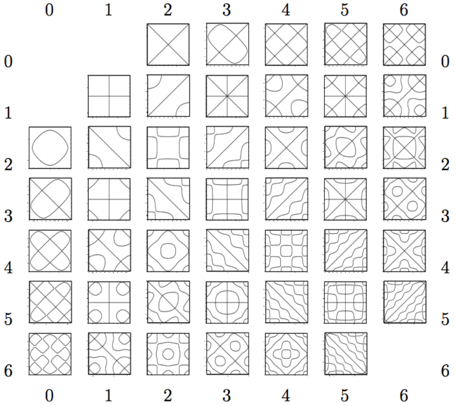


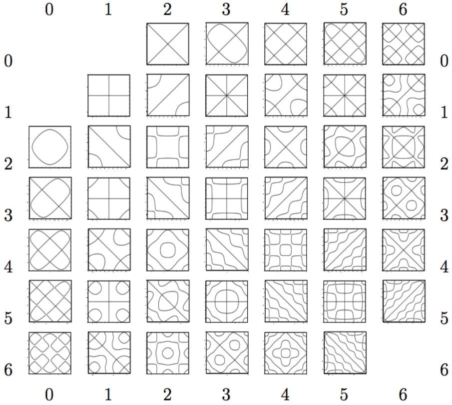
Plate 3. Selection of Chladni's drawings arranged as in plate 2, see § 5.



かなり良くあっている。近代の実験結果と比べるとさらに良く適合する。

実験写真 (ウォーラー [1]) とモデルの数値計算結果

(著作権があるため写真は WWW には載せられません)



どういう形をしているのか？ (正方形の場合)

リッツとウォーラーは正方形板のクラドニ図形を分類に成功した。

クラス	$m = n$ か？	m, n の偶奇性	対称性	ウォーラーの記号
1	$m = n$	ともに奇数	D_4	＋
2	$m = n$	ともに偶数	D_4	◯
3	$m > n$	ともに奇数	D_4	※
4	$m > n$	ともに偶数	D_4	×
5	$m > n$	ともに奇数	D_4	＋
6	$m > n$	ともに偶数	D_4	◯
7	$m > n$	偶数と奇数	D_2	／

ここで D_n は二面体群 (正 n 角形の合同変換群，ウィキペディア参照).
D_4 は 90° の回転対称性を持つが、D_2 は 180° の回転対称性のみ。

どういう形をしているのか？ (正方形の場合)

リッツとウォーラーは正方形板のクラドニ図形を分類に成功した。

クラス	$m = n$ か？	m, n の偶奇性	対称性	ウォーラーの記号
1	$m = n$	ともに奇数	D_4	＋
2	$m = n$	ともに偶数	D_4	◯
3	$m > n$	ともに奇数	D_4	※
4	$m > n$	ともに偶数	D_4	×
5	$m > n$	ともに奇数	D_4	＋
6	$m > n$	ともに偶数	D_4	◯
7	$m > n$	偶数と奇数	D_2	／

ここで D_n は二面体群 (正 n 角形の合同変換群, ウィキペディア参照).
D_4 は 90° の回転対称性を持つが、D_2 は 180° の回転対称性のみ。

これは実験してみたら、数値計算してみたらこうなった、というだけで、
数学的な証明は出来ていない。

ウォーラー (Mary Désirée Waller, 1886–1959, 実験物理学者)

- 色々な材質・形の板で綿密な実験を行ない、多くの写真を撮影
- クラドニの著書の周波数、節線パターンをすべて追試
- 板の形の対称性と節線パターンの対称性の関係を調べる
- 正方形で、膜の場合の理論的計算と板の場合の実験結果を比較した
- 著書 Chladni Figures — study in symmetry (1961) や論文に載った実験は計算結果との照合に便利　(実は大変貴重)

どういう形をしているのか？ (正多角形)

正多角形の場合、オリジナルのリッツの方法は使いにくいが、リッツの方法のコンピューター版である**有限要素法**を使って数値計算できる。

法則が発見できた？日本応用数理学会で遠藤小欽さん (先端数理科学研究科 M2) が報告 (遠藤 [5], 2015/9/9)。

証明を目指している。

世界は振動現象であふれている

振動 (oscillation, vibration) とは、何かが限られた範囲をほぼ一定の周期で揺れ動くこと

- 振り子
- 叩いたり、揺すったりして起こるものの振動 (微小なもの〜巨大な建造物〜)
- 音 (空気の振動; 楽器, 声帯, ⋯)
- 地震 (大地の振動)
- 電気回路などの振動
- 電磁波 (電波、赤外線、光、紫外線、X 線、ガンマ線)

以上は物理学の守備範囲であるが，生命現象、科学現象、社会現象など様々なところに出現

まとめ

- クラドニ図形を紹介した。
- 振動・波動現象の多くに共通の法則がある。
  - 特徴的な振動 (固有振動) があり、その時間変化は「単振動」である。
  - すべての振動は固有振動の和で表現できる。
- 個々の問題の固有振動を式変形で求めることは難しい場合もあって、コンピューターを用いた数値計算が必要である。
- 板の固有振動については、膜の場合ほど分っていなくて、今でも研究課題となる。
- 100 年ほど前のリッツが発見した方法の現代版「有限要素法」を用いて数値計算を行った。

まとめ

- クラドニ図形を紹介した。
- 振動・波動現象の多くに共通の法則がある。
  - 特徴的な振動 (固有振動) があり、その時間変化は「単振動」である。
  - すべての振動は固有振動の和で表現できる。
- 個々の問題の固有振動を式変形で求めることは難しい場合もあって、コンピューターを用いた数値計算が必要である。
- 板の固有振動については、膜の場合ほど分っていなくて、今でも研究課題となる。
- 100 年ほど前のリッツが発見した方法の現代版「有限要素法」を用いて数値計算を行った。

以上です。

参考文献

- Mary D. Waller, Vibrations of free square plates: part I. normal vibrating modes, Physical Society, Vol. 51 (1939), pp. 831–844.
- Mary D. Waller, Chladni figures — a study in symmetry, G. Bell (1961).
- von Walter Ritz, Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern, Annalen der Physik Volume 333, Issue 4, pp. 737–786 (1909).
- 平野裕輝, 正方形領域における重調和作用素の固有値問題 — 差分法によるクラドニ図形の解析—, 明治大学大学院理工学研究科基礎理工学専攻修士論文, 2012 年 3 月.
- 遠藤小欽(しゃおちん), 桂田祐史, 末松信彦, 正多角形板の Chladni 図形の対称性, 2015 年度日本応用数理学会年会 ポスター発表, 2015 年 9 月 9 日, 金沢大学角間キャンパス.

きっかけ: 小学生向けの図鑑の1頁から始まった卒研

「鉄板の上に白い砂をまいて、ゴムボール (スーパーボール) で鉄板をこすると、砂が動き出して不思議な図形が現れます。ゴムボールの大きさやこする場所を変えると模様が変化します。」
「砂は鉄板が振動しているところから、振動していないところに集まってきます。その結果、さまざまな図形が現れるのです。この不思議な現象は、200 年ほど前に物理学者クラドニによって発見され、「クラドニ図形」とよばれています。鉄板の形によっても現れる模様はちがいます。」
『ニューワイド ずかん百科 科学』学習研究社 (2006)

(▸ 平野君の言葉)

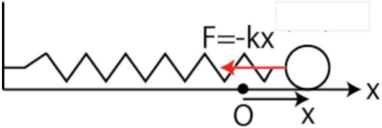
美術作家金沢健一氏の作品 (パフォーマンス？)

卒論&修論でクラドニ図形を研究した平野君の言葉

クラドニ図形を実際に見た時、非常に驚いた。まるで砂が生きているかのように動くのだ。そこで、私はクラドニ図形というものに興味を持ち、どのような時に、どのようなパターンが出るのかを理解したいと思った。

付録: バネ振り子

バネに重りを結びつけて振動させる。



基準の位置 (バネの伸びが 0) からの距離を x とすると、
重りに働く力は $-kx$ (k はバネで決まる定数, フックの法則)

ニュートンの運動の第 2 法則から

$$m\alpha(t) = -kx(t).$$

ゆえに

$$x''(t) = \alpha(t) = -\frac{k}{m}x(t) = -\omega^2 x(t) \quad \left(\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ とおいた}\right).$$

$x''(t) = -\omega^2 x(t)$ を**単振動の微分方程式**と呼ぶ。

付録: 単振動の微分方程式の一般解

$$x(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$$

や

$$(*) \qquad x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

は単振動の微分方程式 $x''(t) = -\omega^2 x(t)$ の解である。

これは周期関数で、周期は $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

高校で物理を習った人は、$(\star)$ は単振動の式と気付くかも。

付録: 単振動の微分方程式の一般解

$$x(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$$

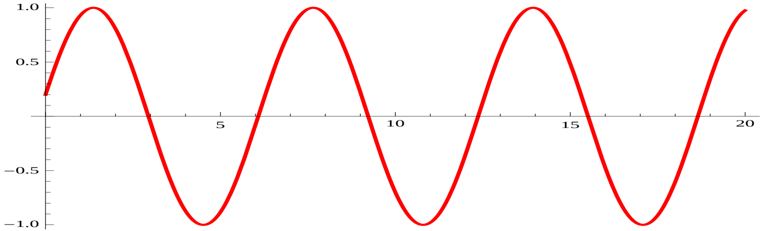
や

$$(*) \qquad x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

は単振動の微分方程式 $x''(t) = -\omega^2 x(t)$ の解である。

これは周期関数で、周期は $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

高校で物理を習った人は、$(\star)$ は単振動の式と気付くかも。



(以上は常識ではあるのだけれど、三角関数で書けるのは不思議)