「**こ・そ・あ・ど／ん な こ と**」（原稿）[*1]

CO_2 循環を理解するための数学的枠組み

小島 順（東京）

以下は本号の拙稿「「数学は役に立つか」という “問い” の意味」の補足である。数学の内容に関わる部分を別扱いにした。

人間界からの化石燃料由来の CO_2 が大気中に放出され，その一定量（58% と言われたり 56% と言われたりする）がそのまま蓄積する，という説がまかり通っている。それは大変奇妙で不自然な「理論」である。

それよりは，「１年後に 74% が残存する」という形の 指数的変化 を考えるのが普通の態度ではないだろうか (74% は仮の数値である)。

1. 年間放出量を一定として

人間界からの CO_2 が地球全体で１年当たり B という定量だけ放出される状況を設定する。はじめに，**年間放出量** B がある時点で一気に全量放出される場合を考えよう。1 年後には $0.74\,B$ つまり放出量の 74% が残留する。$a := 0.74$ とおいて，t 年後の残留量は Ba^t である。a は 1 年後の倍率を示す正数で，今の場合“ **１年残留率** ”であり，減少すること は $a < 1$ に当る。

しかし，この 1 年の変化は，途中の連続的な過程を通じて実現される。互いに逆の自然対数関数，（自然）指数関数により

$$k = \log a, \quad a = e^k$$

として a に対応する負数 $k = \log 0.74 = -0.301$ が定まり，k は途中の減少過程での“ 瞬間の ”伸び率を 1 年当たりに換算 したものを表す（乗法的な条件 $a < 1$ に対応して，加法的に $k < 0$ である)。これを“ **無限小伸び率** ”と呼ぶことにする。(仮の数値ではあるが，以後 $k = -0.3$, $a = \log k = 0.7408$ でやろう。)

実際には，CO_2 は 1 年に一度まとめて放出されるわけではなく，定量 B が年間にわたって均等にならした形で放出される。時点 t における無限小時間 $\mathrm{d}t$ に放出される CO_2 の量は $B\,\mathrm{d}t$ であるから[*2]，その分について時点 $T\,(>t)$ に残留する量は

$$B\,\mathrm{d}t\,a^{(T-t)} = B\,\mathrm{d}t\,e^{k(T-t)}$$

である。この微分式を $t = 0$ から $t = T$ まで積分すると

$$\int_0^T Be^{k(T-t)}\mathrm{d}t = \left[-\frac{B}{k}e^{k(T-t)}\right]_0^T$$
$$= -\frac{B}{k}(1-e^{kT}) = -\frac{B}{k}(1-a^T) \qquad (1)$$

となる。

2. 定常量と交換率

*1 『数学教室』2007 年 8 月号掲載予定

*2 “ 1 日 ”に対して $\mathrm{d}t$ がとる値は $1/365 = 2.74 \times 10^{-3}$ である。

つまり，毎年の放出量が B のとき，放出の始まりから T 年後の CO_2 の蓄積は $-(B/k)\left(1-a^T\right)$ であり，$T\to\infty$ のとき，それは $-B/k$ に収束する。蓄積量は定常状態 $-B/k$ に達して安定するのである。今の 1 年残留率 $a=0.7$ という設定のもとで，$-B/k=2.804B$ である。つまりこのモデルでは，人間界からの CO_2 の大気中の蓄積は年間放出量 B の 2.8 倍程度（3 年分未満）で押さえられる。この**定常残留量**を C とする。定常状態 C では 1 年間の放出量（大気への入り）と吸収量（大気からの出）がバランスするわけで，吸収量は負の値 $-B$ で表現される。個別の CO_2 分子はすべていずれは出て行き，決して蓄積しない ことに注意しよう。

$$C=-\frac{B}{k}, \quad kC=-B \tag{2}$$

である。

(2) の第 2 式の意味を考えよう。無限小時間 $\mathrm{d}t$ には C の $k\,\mathrm{d}t$ 倍である $kC\,\mathrm{d}t$ だけ CO_2 の量が変化する（大気からの「出」として負である）。その 1 年間の総和である

$$\int_0^1 kC\,\mathrm{d}t=kC\int_0^1 \mathrm{d}t=kC$$

が，吸収量 $-B$ と一致するのである。

1 年残存率 $a=70\%$ のもとでの，定常量 C の中の“ **交換率** ”が $-k=35.67\%$ ということになる。年間放出量 B は，定常量 C に達した後はその中の“ **年間交換量** ”として新しく位置づけられる。

3. 離散的な扱い

同じ問題を積分を使わない離散近似で扱って見よう。

T 年後までの CO_2 の放出総量は BT であり，T を n 等分した i 番目の時点 $t_i:=iT/n$ $(i=0,\cdots,n-1)$ における放出量が BT/n である。このような形で近似を進める。次の時点 t_{i+1} までの T/n という時間当たりの（負の）伸び率は kT/n であり，この放出量についての時点 T での残存量は（負の利息の複利計算として）

$$\frac{BT}{n}\left(1+\frac{kT}{n}\right)^{n-i}$$

である。その $0\le i\le n-1$ に対する総和は，等比数列の和の公式により

$$\begin{aligned}
S_n &:= \sum_{i=0}^{n-1}\frac{BT}{n}\left(1+\frac{kT}{n}\right)^{n-i}\\
&= \frac{BT}{n}\left(\left(1+\frac{kT}{n}\right)^{n}+\cdots+\left(1+\frac{kT}{n}\right)\right)\\
&= \frac{BT}{n}\left(1+\frac{kT}{n}\right)\frac{1-(1+kT/n)^n}{-kT/n}\\
&= -\frac{B}{k}\left(1+\frac{kT}{n}\right)\left(1-\left(1+\frac{kT}{n}\right)^{n}\right)
\end{aligned}$$

であるが，ここで $n\to\infty$ とすれば，底 e

と複利計算とを結ぶ基本極限式[*3]を使って

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{kT}{n}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n/(kT)}\right)^{n/(kT)}\right)^{kT} \\
&= e^{kT} = a^T
\end{aligned}
$$

であるから

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_n &= -\frac{B}{k}\left(1-e^{kT}\right) \\
&= -\frac{B}{k}\left(1-a^T\right) \qquad (3)
\end{aligned}
$$

となる。離散的な手法で，(1) と同じ式に到達できた。

4. 自然の CO_2 循環について

槌田敦氏の論文 [1] の中に

> IPCC によれば, 大気中の CO_2 の量は約 730 ギガトンであるが，毎年約 120 ギガトンを陸と交換し，約 90 ギガトンを海と交換している．つまり，大気中 CO_2 は毎年 30% が入れ替わり，大気中に残るのは 70 % である。

と書いてある。

この文章について，まず，交換される CO_2 の陸・海での姿は必ずしも CO_2 そのものではなく，炭素循環（質量の数値も炭素換算のもの）として理解した方が適切かも知れない。一方，年間の化石燃料（あるいは森林破壊，セメント産業など）由来の CO_2 放出量は 6 ギガトンと言われている。これは自然の循環量 210 ギガトンのせいぜい 3% に過ぎない。

これまでの B, C, k, a という記号を自然循環の CO_2 に流用すると，交換率は

$$
-k = \frac{B}{C} = \frac{210}{730} = 0.2877
$$

であり,「毎年 30% が入れ替わり」という表現は納得できる。このときは $a = e^{-0.3} = 0.7408$ となり，期首の CO_2 の中で期末に残るのは約 74%（吸収されるのは 26%）となる。化石燃料由来の CO_2 についても特に区別する理由がないとすれば，暫定的に $a = 0.7$ で出発した本稿の記述は $a = 0.74$ 辺りに手直しした方がよいかも知れないが，そのままにする。

5. おわりに

本稿の目的は現象を捉えるための基本的な数学の枠組みを整備することであった。もとより，現実の地球環境の変動は本質的に複雑であるが，その分析の道具として，CO_2 循環に絡んでの，残存率や交換率などの概念を理解する（あるいは作る）作業が私にとっては必要であった。

「地球温暖化」そのものの議論は，文献表の [1] から [4] までを参考にして頂きたい。槌田，近藤氏らの，地球温暖化「通説」への批判は次のようなポイントを含む。

1. 循環する自然の CO_2 に対して 3%

---

*3 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2.718\cdots$。瞬間伸び率が 1 年当たりに換算して 100% のとき，1 年後には約 2.72 倍（172% 増）になる。

ほどに過ぎない人間由来の CO_2 の影響を特別視する根拠がない。

2. 大気中 CO_2 濃度増大を人間由来の CO_2 の“蓄積”と重ねる考えに根拠がない。
3. さらに温暖化ガスということでは水蒸気が CO_2 よりも決定的に重要である。両者の濃度は 2 桁違う。
4. 温暖化と CO_2 濃度上昇が現在平行して進行しているが，[1] から [4] までの文献の中のグラフから分かるように，温度変化に半年あるいは一年遅れる形で CO_2 濃度変化が追従している。CO_2 濃度上昇は温度上昇の原因ではなく結果なのである[*4]

数学教育でも「地球温暖化」は教材化されている（例えば [5]）。しかし，それらは，ここで批判されているような「通説」を無批判に前提にしているように思える。

文献表

[1] 槌田 敦「CO_2 を削減すれば温暖化を防げるのか」(日本物理学会誌, Vol.62, No.2, 2007) http:// env01.cool.ne.jp/ global_warming /report/tutida01.htm （これはサイト [4] のページの一つである）

[2] 槌田 敦『CO_2 温暖化説は間違っている』（ほたる出版，2006 年）

[3] 近藤邦明『温暖化は憂うべきことだろうか』（不知火書房，2006 年）

[4] ウェブサイト“「環境問題」を考える”（管理者：近藤邦明，2000 年開設） http://env01.cool.ne.jp/index02.htm

[5] 小寺 隆幸「データ解析と関数を結びつける指導の考察 — 二酸化炭素濃度の時系列データを分析する授業を通じて — 」（学芸大数学教育研究　第 18 号　2006）

[*4] 例えば, 熱帯地方の海水温の上昇で海水からの CO_2 の放出が増加し，（本稿では定量と扱った）CO_2 年間放出量 B が増大する。それに比例する定常量 $C = -k^{-1}B$ も当然増大する。このような説明は大変自然に感じられる。