実数の集合論の基礎の基礎

渕野 昌 (Sakaé Fuchino)

fuchino@isc.chubu.ac.jp

2002 年 8 月 24 日 軽井沢にて起稿
2002 年 11 月 11 日 新横浜名古屋間の新幹線の車中にて脱稿
2002 年 11 月 23 日 訂正補筆
2002 年 11 月 29 日 原稿提出後の補筆
2003 年 10 月 30 日 footnote の一つの補正.

目次

0　はじめに

以下のテキストは，2002 年 7 月 26 日 (金) から 7 月 29 日 (月) にかけて名古屋大学 情報文化学部にて行われた「2002 年度数学基礎論サマースクール」における講義の内容を，このサマースクールの講義録のために整理し直したものである．

2002 年度数学基礎論サマースクールのテーマは実数の集合論であったが，筆者は，この理論で用いられる集合論からの予備知識についての講義を行なった．

講義は，カントル空間やベール空間における，ベールの一種の（現代の用語では meager な）集合の全体のイデアルと零集合のイデアルに関する基礎的な知識について述べた第一部と，超限帰納法，順序数，基数といった，(実数の集合論を含む）集合論の応用で縦横に用いられることになる手法や概念への入門について述べた第二部からなるものだったが，本稿では第 1 章と第 2 章が，これらに対応している．

本稿では，さらに第 3 章で，第 1 章と第 2 章で導入した手法や概念の応用として，講義では時間的な制約のために述べることのできなかった，実数の集合論での古典的な —— つまり，主にのポーランド学派[1]の数学者たちによって，強制法 (forcing) の理論以前の時代にすでに得られていたような —— 結果のいくつかに触れる．

講演の第一部は主に [12] を参考した．また本稿のこの部分に対応する第 1 章の書きおろしにあったっては，上智大学数学科の五十嵐真奈さんにサマースクールの講義の折にとってもらったノートを下敷きにした．

第二部に対応する第 2.1 節から第 2.6 節では，Sabine Koppelberg 教授が 1995 年にベルリン自由大学の数学・計算機科学系で行なった数理論理学の入門の講義における講義録 [10] を参考にした．

第 3 章は，第 1 章と第 2 章で準備した材料の応用例であるが，ここで述べたこと以外にも 第 1 章 と第 2 章の知識の範囲で理解できる古典的な結果は数多くある．

そのような話題に関する参考文献としては，[15], [2], [3] などがあげられる．[15] は本稿で準備した集合論的な背景の知識のみで最後まで読みすすむことができる．一方，[2] はこのような古典的な結果にとどまらず，実数の集合論のごく最近までの研究成果を網羅した教科書である．[3] は著者が「集合論的解析学」と呼ぶところの集合論と解析学の中間領域に関する研究結果の鳥瞰を与えるものとなっている．

また，集合論全般についての標準的な教科書としては [11] や [7] がある．この講義録に目を通した後で，実数の集合論を本格的に勉強したくなった人は，たとえば [11] から [2] と読みすすむのがよいだろう．[7] も標準的な教科書と言えるが，最近の増補版では，集合論の多義にわたるトピックスに関する，ごく最近までの研究結果について（見通しのよい，しかし，多くの場合技術的な細部をかなりはぶいた）解説が付け加えられている．

[1] ポーランド学派の数学に関する非常にすぐれた読みものとして [14] がある．なお，ついでに言えば，この本はポーランドの数学の盛衰について述べたものであるが，ポーランド学派の数学の継承の 1 つである実数の集合論に関する記述が，全く欠けているのが気になる．また，この本の基本情緒はスラヴ的というより平家物語的であるような印象を受ける．

1　カントル空間とベール空間

1.1　カントル空間

この節では，カントル空間を定義し，その性質を考察する[2]．カントル空間は実数空間 $\mathbb{R}$ と “ほとんど” 位相同型になり，実数の集合論で考察することになる多くの性質に関して，$\mathbb{R}$ と同一視することができる．集合論的議論では，カントル空間や後で述べるベール空間の方が実数空間に比べて扱いやすいことが多いため，実数の集合論では $\mathbb{R}$ で議論する代りに，これらの空間を用いて議論することが多い．まず必要となる記号や概念をいくつか導入しておく．

ω で自然数の全体の集合をあらわす．自然数の全体の集合は通常 $\mathbb{N}$ であらわされるが，集合論では，第 2.2 節で説明されることになる順序数として $\mathbb{N}$ をとらえたときに，これを ω と表記することが多い．

$$\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

である．集合論では考察の対象はすべて集合であるが，そこでは自然数も集合として，導入される： 自然数 n は

$$(*) \qquad n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

として定義される．特に $0 = \emptyset$ で，これから出発して $(*)$ により，$1 = \{0\} = \{\emptyset\}$, $2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots$ となる．ω はこのような集合 0, 1, 2,... を全部集めて得られる集合となっている[3]．

集合 X, Y に対し，${}^{X}Y = \{f : f$ は X から Y への写像$\}$ とする[4]．この記法により，集合 ${}^{\omega}2$ を考えることができる（$2 = \{0, 1\}$ に注意!）．${}^{\omega}2$ は，値 0, 1 をとる自然数の全体上の関数を，すべて集めて得られる集合である．

$f : X \rightarrow Y$ で $X' \subseteq X$ のとき，$f''X'$ で X' の f による像をあらわす．つまり，$f''X' = \{f(x) : x \in X'\}$ である．また，$Y' \subseteq Y$ に対し，$f^{-1}{}''Y'$ で Y' の f による逆像をあらわす．$f^{-1}{}''Y' = \{x \in X : f(x) \in Y'\}$ である．

${}^{\omega}2$ は $2 = \{0, 1\}$ の ω 個のコピーの積と見ることもできる[5]．2 に離散位相を入れて，${}^{\omega}2$ でこの積位相を $\mathcal{O}$ を考えるとき，$({}^{\omega}2, \mathcal{O})$ のことをカントル空間とよぶ．

$\mathcal{O}$ は次の基本開集合により生成される位相になっている：

$${}^{\omega>}2 = \{s : \text{ある } n \in \omega \text{ に対し } s : n \rightarrow 2\}$$

[2]以下の議論は，形式的には，すべて Zermelo-Fraenkel の集合論の公理系に選択公理を加えた体系（これを ZFC とよぶ）の中で行われている，と考えられる．ZFC の公理系については例えば [6] や [11] などを参照されたい．

[3]これらの用語については第 2.1 節で再説する．

[4]「f は X から Y への写像である」を $f : X \rightarrow Y$ という記号であらわすことにする．

[5]X_i, $i \in I$ を集合族とするとき，X_i, $i \in I$ の積集合 $\prod_{i \in I} X_i$ は，

$$\prod_{i \in I} X_i = \{f : f \text{ は } I \text{ 上の関数で，すべての } i \in I \text{ に対し } f(i) \in X_i\}$$

と定義される．したがって，特に X_i がすべてある集合 X に等しいときには，$\prod_{i \in I} X_i = {}^{I}X$ となる．

とする[6]．$s \in {}^{\omega>}2$ に対し，$[s] = \{f \in {}^{\omega}2 : s \subseteq f\}$ とする[7]．$[s] \subseteq {}^{\omega}2$ である．このとき，

$$\{[s] : s \in {}^{\omega>}2\}$$

は ${}^{\omega}2$ の位相 $\mathcal{O}$ を生成する．

$\mathbb{R}$ と ${}^{\omega}2$ は位相同型ではない．これは，たとえば次のようにして見ることもできる．よく知られているように，$\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^2$ は位相同型でない．しかし，${}^{\omega}2 \ni f \mapsto (f(2n), f(2n+1)) \in ({}^{\omega}2)^2$ をにより，${}^{\omega}2$ と $({}^{\omega}2)^2$ は位相同型になることがわかる．

それにもかかわらず，$\mathbb{R}$ と ${}^{\omega}2$ は，ある意味でほとんど位相同型であると考えられる．以下でこのことの説明をする．まず，$\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ と閉区間 $\mathbb{I} = [0, 1]$ は同型になることに注意しておく．

$$k : {}^{\omega}2 \to \mathbb{I};\ f \mapsto \sum_{n \in \omega} f(n) \cdot 2^{-(n+1)}$$

$$W = \{f \in {}^{\omega}2 : f(n) \text{ の値はどこから先も一定になることはない}\}$$

$$\mathbb{Q}^* = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ は二進数表示で表わしたとき有限桁であらわせる}\}$$

とする．

$s \in {}^{\omega>}2$ に対し，$s^\frown\vec{0} \in {}^{\omega}2$ を，$n \in \omega$ に対し，

$$(s^\frown\vec{0})(n) = \begin{cases} s(n) & n \in \mathrm{dom}(s) \text{ のとき} \\ 0 & n \geq \mathrm{dom}(s) \text{ のとき} \end{cases}$$

となるものと定義する．同様に，$s^\frown\vec{1} \in {}^{\omega}2$ を，$n \in \omega$ に対し，

$$(s^\frown\vec{1})(n) = \begin{cases} s(n) & n \in \mathrm{dom}(s) \text{ のとき} \\ 1 & n \geq \mathrm{dom}(s) \text{ のとき} \end{cases}$$

となるものとする．

補題 1 (a)　k は上射である．

(b)　k は連続写像となる．

(c)　k の W への制限 $k \restriction W$ は W から $\mathbb{I} \setminus \mathbb{Q}^*$ への同型写像となる．

証明．　(a): $x \in \mathbb{I}$ を 2 進数表示で表わしたものを

$$0 . x_0 x_1 x_2 \ \ldots$$

とする（たとえば，$0 = 0.000\ldots$，$1 = 0.111\ldots$ とあらわされることに注意）．このとき，$f : \omega \to 2$ を $f(n) = x_n$ により定義すれば，$k(f) = x$ となる．このことから，k は上射であることがわかる．

[6]「${}^{\omega>}2$」ではなく「${}^{<\omega}2$」という記号を使うことも多い．

[7] f, g が関数のとき，$f \subseteq g$ は，「g は f の（関数としての）拡張になる」，という意味になることに注意．

(b): $\mathbb{Q}^*$ は $\mathbb{I}$ で稠密だから，$\mathcal{O}^* = \{(q_0, q_1) : 0 \leq q_0 < q_1 \leq 1,\, q_0, q_1 \in \mathbb{Q}^*\}$ は $\mathbb{I}$ の位相の基底の一つとなる．したがって，この $\mathcal{O}^*$ 元の k による逆像が ${}^{\omega}2$ の開集合になることを示せば十分である．ところが，$(q_0, q_1) \in \mathcal{O}^*$ とすると，

$$k^{-1}{}''(q_0, q_1) = \bigcup\{[s] : s \in {}^{\omega>}2,\, q_0 < k(s^\frown\vec{0}),\, k(s^\frown\vec{1}) < q_1\}$$

となる．上の等式の右辺は ${}^{\omega}2$ の開集合の和集合となっているから，${}^{\omega}2$ の開集合である．

(c): $k\restriction W$ が W から $\mathbb{I} \setminus Q^*$ への全単射になることは明らかである．(b) によりこの写像は連続だから，$s \in {}^{\omega>}2$ とするとき，$k''[s] \setminus \mathbb{Q}^*$ が $\mathbb{I} \setminus \mathbb{Q}^*$ で開集合になることを言えば十分である．ところが，$q_0 = k(s^\frown\vec{0}),\, q_1 = k(s^\frown\vec{1})$ とすれば，$q_0,\, q_1 \in \mathbb{Q}^*$ で，

$$k''[s] = (q_0, q_1) \cap (\mathbb{I} \setminus \mathbb{Q}^*)$$

となるから，$k''[s]$ は $\mathbb{I} \setminus \mathbb{Q}^*$ での開集合であることがわかる． ❑ (補題 1)

$\mathbb{Q}^*$ も ${}^{\omega}2 \setminus W$ も可算であることに注意する．一方 $\mathbb{I}$ も ${}^{\omega}2$ も連続体濃度[8]を持つから，$\mathbb{Q}^*$ と ${}^{\omega}2 \setminus W$ は，それぞれ $\mathbb{I}$ と ${}^{\omega}2$ で濃度に関して “小さな” 集合となっている，と解釈できる．補題 1 は，これらの小さな集合をとりのぞくと $\mathbb{I}$ と ${}^{\omega}2$ を位相同型にすることができることを主張しているわけである．

1.2 ボレル集合

$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とするとき，$Bor(X)$（または $Bor(\mathcal{O})$）で $\mathcal{O}$ から生成される σ-代数[9]をあらわす．$Bor(X)$ の元は $X = (X, \mathcal{O})$ のボレル集合とよばれる．

$$\begin{aligned} Bor(X) = \bigcap\{\mathcal{A} : \mathcal{O} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X),& \\ &\mathcal{A} \text{ は補集合と可算個の元の共通部分に関して閉じている }\} \end{aligned}$$

となる．$Bor(X)$ は

$$Bor(X) = \bigcup\{B(\alpha) : \alpha < \omega_1\}$$

とあらわすこともできる．ただし，$B(\alpha),\, \alpha < \omega_1$ は，

$$\begin{aligned} &B(0) = \mathcal{O}, \\ &B'(\alpha) = B(\alpha) \cup \{X \setminus b : b \in B(\alpha)\} \text{ として} \\ &B(\alpha + 1) = \{y : y \text{ は } B'(\alpha) \text{ の可算個の元の和集合 }\} \\ &B(\gamma) = \bigcup\{B(\alpha) : \alpha < \gamma\},\ \gamma \text{ が limit のとき} \end{aligned}$$

として帰納的に定義する[10]．可算個の閉集合の和集合としてあらわせるような集合を F_σ-集合とよび，可算個の開集合の共通部分としてあらわせるような集合を G_δ-集合とよぶ．F_σ-集合と G_δ-集合は $\mathcal{S}_1$ に含まれる集合となっている．特に F_σ-集合や G_δ-集合はボレル集合である．

[8]集合の濃度に関しては第 2.4 節であらためて詳しく述べる．

[9]X の部分集合の族 $\mathcal{S}$ が X 上の σ-代数 である，とは，$\mathcal{S}$ が，補集合をとる操作と，可算個の元の和集合をとる操作に関して閉じていることである．

[10]より詳しくは，第 3.1 節 を参照．

1.3 疎集合

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の部分集合 $D \subseteq X$ が X で稠密 (dense) とは，任意の空集合と異なる開集合 $O \in \mathcal{O}$ に対し，$D \cap O \neq \emptyset$ となることとする．たとえば $\mathbb{R}$ を普通の位相で考えたとき，$\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ で稠密である．

これと反対に，位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の部分集合 $Y \subseteq X$ が X で nowhere dense とは，任意の空集合と異なる開集合 $O \in \mathcal{O}$ に対し，空集合と異なる開集合 $O' \subseteq O$ で，$O' \cap Y = \emptyset$ となるものが存在することとする．

カントル空間の位相に上の定義を翻訳してみると，カントル空間 ${}^{\omega}2$ の部分集合 Y が nowhere dense とは，

$$\forall\, s \in {}^{\omega>}2\ \exists\, t \in {}^{\omega>}2\ (s \subseteq t\ \wedge\ Y \cap [t] = \emptyset)$$

が成り立つことであることがわかる．

$Y \subseteq X$ が疎集合 (meager set) であるとは，X の nowhere dense な部分集合 $Y_n \subseteq X$, $n \in \omega$ で $Y = \bigcup_{n\in\omega} Y_n$ となるものがとれることとする．

補題 2 $X = (X, \mathcal{O})$ を位相空間とする．

(1) $Y \subseteq X$ が nowhere dense なら，Y の閉包 $cl(Y)$ も nowhere dense である．

(2) $Y \subset X$ が疎集合なら，$Y \subseteq Y' \subseteq X$ となる F_σ 集合で疎集合となるものが存在する．

証明． (1): $O \in \mathcal{O}$, $O \neq \emptyset$ とするとき，Y が nowhere dense であることから，空でない $O' \subseteq O$ で $O' \cap Y = \emptyset$ となるものが存在する．このとき，$O' \cap cl(Y) = \emptyset$ となから， $cl(Y)$ も nowhere dense であることがわかる．

(2): $Y = \bigcup_{n\in\omega} Y_n$ で各 Y_n は nowhere dense であるとする．このとき，$Y' = \bigcup_{n\in\omega} cl(Y_n)$ とすると，$Y \subseteq Y'$ で Y' は F_σ 集合になるが，(1) により各 $cl(Y_n)$ は nowehre dense だから，Y' は疎集合でもある． ❑ (補題 2)

カントル空間 ${}^{\omega}2$ の位相は，次の距離 d からひきおこされる位相と見ることもできる：$f, g \in {}^{\omega}2$ に対し，

$$d(f, g) = \sum_{n\in\omega f(n)\neq g(n)} 2^{-(n+1)}$$

とする．${}^{\omega}2$ はこの距離に関して完備になる．このこと（あるいは ${}^{\omega}2$ がコンパクト（+ ハウスドルフ）であること）と次の定理から，${}^{\omega}2$ 自身は ${}^{\omega}2$ の中で疎集合とはならないことがわかる．

定理 3 （ベールのカテゴリー定理） X を局所コンパクトまたは完備距離付け可能な位相空間とするとき，X の任意の空でない開集合は疎集合ではない． ❑

系 4 カントル空間 ${}^{\omega}2$ の任意の空でない開集合は疎集合でない．特に ${}^{\omega}2$ 自身は ${}^{\omega}2$ で疎集合な集合ではない[11]．

[11] 実はこの系はさらに「X を ${}^{\omega}2$ の任意の疎集合とするとき，${}^{\omega}2 \setminus X$ は完全集合を含む」という形に改良できる．特に，このことから，X が ${}^{\omega}2$ の疎集合なら，${}^{\omega}2 \setminus X$ は連続体濃度を持つことがわかる．

$$\mathcal{M} = \{X \subseteq {}^{\omega}2 : X \text{ は疎集合 }\}$$

とする．系 4 により，${}^{\omega}2$ の任意の空でない開集合は $\mathcal{M}$ に含まれない．次の補題は，より一般的には任意の位相空間で成り立つ．証明は疎集合の定義から明らかである（演習!）．

補題 5 (1)　$X \subseteq {}^{\omega}2$ が可算なら，X は ${}^{\omega}2$ の疎集合である．

(2)　$X \subseteq {}^{\omega}2$ が疎集合で $Y \subseteq X$ なら Y も疎集合である．

(3)　$X_n \subseteq {}^{\omega}2$, $n \in \omega$ がすべて ${}^{\omega}2$ の疎集合なら，$\bigcup_{n\in\omega} X_n$ も ${}^{\omega}2$ の疎集合となる．

S を任意の集合とするとき，$I \subseteq \mathcal{P}(S)$ が[12] S 上の σ-イデアルであるとは，

(0)　$S \notin I$;

(1)　各 $x \in S$ に対し，$\{x\} \in I$;

(2)　$X \in I, Y \subseteq X$ なら，$Y \in I$;

(3)　$X_n \in I, n \in \omega$ なら，$\bigcup_{n\in\omega} X_n \in I$

を満たすこととする．I が S 上の σ-イデアルのときには，上の (1) と (3) により，任意の S の可算部分集合は I の元となる．このことと (0) により，S 上に σ-イデアルが存在するためには，少なくとも S が不可算である必要があることがわかる．S 上の σ-イデアル I は，S の “小さな部分集合” の概念を与えると解釈することができる：σ-イデアルの定義から，$X \in I$ を “X は I の意味で S の小さな部分集合である” と読みくだすことが妥当となる．

系 4 と 補題 5 により：

系 6 $\mathcal{M}$ は ${}^{\omega}2$ 上の σ-イデアルである．

ことがわかる．

$I \subseteq \mathcal{P}(S)$ を σ-イデアルとするとき，$I' \subseteq I$ が I を生成するとは，

$$I = \{Y \in \mathcal{P}(S) : \text{ある } Y' \in I' \text{ に対し } Y \subseteq Y'\}$$

となることである．

位相空間 $X = (X, \mathcal{O})$ で，σ-イデアル $I \subseteq \mathcal{P}(X)$ が Borel supported であるとは，X のボレル集合からなる $I' \subseteq I$ で I を生成するものが存在することをいう．

F_σ-集合はボレル集合だから，補題 2 と上の系 6 により，

命題 7 $\mathcal{M}$ は Borel supported な ${}^{\omega}2$ 上の σ-イデアルである．

$$\mathcal{M}_{\mathbb{I}} = \{X \subseteq \mathbb{I} : X \text{ は （}\mathbb{I}\text{ の標準的な位相に関して）疎集合 }\}$$

とする．“疎集合” が位相的な性質であること，補題 1, および，$\mathbb{Q}^*$ と ${}^{\omega}2 \setminus W$ が可算であることから，次がわかる：

補題 8 (1) $X \in \mathcal{M}_{\mathbb{I}}$ なら，$k''X \in \mathcal{M}$.

(2) $X \in \mathcal{M}$ なら，$k^{-1}{}''X \in \mathcal{M}_{\mathbb{I}}$.

---

[12] $\mathcal{P}(S) = \{X : X \subseteq S\}$ である．つまり “$I \subseteq \mathcal{P}(S)$” は，$I$ が S の部分集合からなる集合，ということである．

1.4 零集合

$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(S)$ が σ-代数 のとき，$\mu : B \to \mathbb{R}^+$ が $\mathcal{B}$ 上の（確率）測度であるとは，μ が次の (0), (1), (2) を満たすことである．

(0) $\mu(\emptyset) = 0$;

(1) $\mu(S) = 1$;

(2) $A_n \in \mathcal{B}$, $n \in \omega$ を互いに素な集合とするとき（つまり，異なる $m, n \in \omega$ に対し $A_m \cap A_n = \emptyset$ となるとき），$\mu(\bigcup_{n\in\omega} A_n) = \sum_{n\in\omega} \mu(A_n) \ \Big(= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} \mu(A_n)\Big)$ が成り立つ．

上の (2) で m から先の $n \in \omega$ に対し，A_n がすべて空になるような列 A_n, $n \in \omega$ を考えて (0) を使うことにより，(2) の有限版

(2') $A_n \in \mathcal{B}$, $n < m$ を互いに素な集合とするとき， $\mu(\bigcup_{n<m} A_n) = \sum_{n<m} \mu(A_n)$

が得られる．また (2') から，

(3) $X \subseteq Y$ なら $\mu(X) \leq \mu(Y)$

が成り立つことがわかる．このことから，

(4) 任意の集合 $A_n \in \mathcal{B}$, $n \in \omega$ に対し，$\mu(\bigcup_{n\in\omega} A_n) \leq \sum_{n\in\omega} \mu(A_n)$

が成り立つことが示せる： 互いに素な $B_n \in \mathcal{B}$, $n \in \omega$ を，すべての $n \in \omega$ に対し $B_n \subseteq A_n$ で，$\bigcup_{n\in\omega} A_n = \bigcup_{n\in\omega} B_n$ となるようにとれば，(2) と (3) から，$\mu(\bigcup_{n\in\omega} A_n) = \sum_{n\in\omega} \mu(B_n) \leq \sum_{n\in\omega} \mu(A_n)$ となるからである．

次の補題の (1) は，測度論の積測度に関する定理から導ける．(2) は実数空間上のボレル位相の存在定理である．証明は，いずれも測度論の教科書を参照されたい．

補題 9 (1) $\mathcal{O}$ をカントル空間 ${}^{\omega}2$ の位相として，$\mathcal{B} = Bor(\mathcal{O})$ とする．このとき測度 $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^+$ で，すべての $s \in {}^{n}2$ に対し，$\mu([s]) = 2^{-n}$ となるようなものが一意に存在する．

(2) $\mathcal{O}$ を単位区間 $\mathbb{I}$ 上の標準的な位相として $\mathcal{B} = Bor(\mathcal{O})$ とする．このとき測度 $\mu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}^+$ で，すべての区間 $[a, b] \subseteq \mathbb{I}$ に対し $\mu([a, b]) = b - a$ となるようなものが一意に存在する．

μ を σ-代数 $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(S)$ 上の測度とするとき，$X \subseteq S$ が（μ に関する）零集合 (null-set) であるとは，$\mu(X') = 0$, $X \subseteq X'$ となるような $X' \in \mathcal{B}$ が存在することとする．特に，$S = {}^{\omega}2$ または $S = \mathbb{I}$ の零集合といったときは，補題 9 (1) または (2) での標準的な μ に関する零集合のこととする．

$$\mathcal{N} = \{X \subseteq {}^{\omega}2 : X \text{ は零集合 }\}$$

とする．次の補題の (1) は，例えば 補題 9 (1) の証明での μ の具体的な構成を見ることで証明できる．補題の (2) は (1) からただちに導ける．

補題 10 (1)　X を ${}^{\omega}2$ のボレル集合とするとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対し ${}^{\omega}2$ の開集合 O で，$X \subseteq O$, $\mu(O \setminus X) < \varepsilon$ となるようなものが存在する．

(2)　X を ${}^{\omega}2$ の零集合とするとき，G_δ な零集合 $X' \subseteq {}^{\omega}2$ で，$X \subseteq X'$ となるものが存在する．

系 11 $\mathcal{N}$ は ${}^{\omega}2$ 上の Borel-supported な σ-イデアルである．

証明．　演習　□ (補題 11)

$$\mathcal{N}_{\mathbb{I}} = \{X \subseteq \mathbb{I} : X \text{ は零集合}\}$$

とする．零集合に対しても，補題 8 と同様の命題が成り立つ：

補題 12 (1) $X \in \mathcal{N}_{\mathbb{I}}$ なら，$k''X \in \mathcal{N}$.

(2) $X \in \mathcal{N}$ なら，$k^{-1}{}''X \in \mathcal{N}_{\mathbb{I}}$.

以上で見たように $\mathcal{M}$ と $\mathcal{N}$ はよく似た性質を持っているが，この 2 つの σ-イデアルは同じものでないし，一方が他方に含まれるという関係も成り立たない．このことは，次の補題で見ることができる：

補題 13 $X \subseteq {}^{\omega}2$ で $X \in \mathcal{N}$ かつ ${}^{\omega}2 \setminus X \in \mathcal{M}$ となるようなものが存在する．

証明．　${}^{\omega>}2$ は可算だから，${}^{\omega>}2 = \{s_n : n \in \omega\}$ と枚挙できる[13]．各 $n, j \in \omega$ に対し，$t_{n,j} \in {}^{\omega>}2$ を，

(1)　$s_n \subseteq t_{n,j}$;
(2)　$j < j'$ なら $t_{n,j} \subseteq t_{n,j'}$;
(3)　$\mathrm{dom}(t_n) > n + j$

となるように選ぶ．$G_j = \bigcup_{n\in\omega}[t_{n,j}]$ とすると，(3) と，8 ページの (4) により，

$$\mu(G_j) \leq \sum_{n\in\omega} \mu([t_{n,j}]) \leq \sum_{n\in\omega} 2^{-(n+j)} = 2^{-(n-1)}$$

である．(2) により，$j < j'$ なら $G_{j'} \subseteq G_j$ となるから，

$$G = \bigcap_{j\in\omega} G_j$$

とすると，$\mu(G) \leq \lim_{j\in\omega} \mu(G_j) = 0$ となる．したがって G は零集合である．一方 $F_j = {}^{\omega}2 \setminus G_j$ とすると，F_j は nowhere dense となる（任意の $s \in {}^{\omega>}2$ に対し，$s = s_i$ とすると，$[t_i] \subseteq [s_i]$ で $[t_i] \cap F_j = \emptyset$）．したがって，${}^{\omega}2 \setminus G = \bigcup_{j\in\omega} F_j$ は疎集合となることがわかる．　□ (補題 13)

[13] 30 ページの脚注を参照．

1.5 ベール空間

${}^{\omega}\omega = \{f : f$ は ω から ω への関数 $\}$ は ω の ω 個のコピーの積と見ることができるが[14]，これに ω 上の離散位相の積位相を入れて得られる空間を，ベール空間 (Baire space) と呼ぶ．カントル空間のときと同じように，ベール空間の位相は次のような標準的な開集合基により生成されるものとなる：

$$^{\omega>}\omega = \{t : t : n \to \omega,\, n \in \omega\}$$

とする．各 $t \in {}^{\omega>}\omega$ に対し，

$$[t] = \{f \in {}^{\omega}\omega : t \subseteq f\}$$

と書き，$\mathcal{O} = \{[t] : t \in {}^{\omega>}\omega\}$ を考えると，これが ${}^{\omega}\omega$ の 1 つの開集合基になっていることがわかる．

${}^{\omega}\omega$ も可算集合の取捨により ${}^{\omega}2$ や $\mathbb{I}$ と位相同型にでき，${}^{\omega}2$ や $\mathbb{I}$ の測度と自然に対応づけのできるような測度を導入することができる．（したがって，$\mathcal{M}_{^{\omega}\omega}, \mathcal{N}_{^{\omega}\omega}$ をそれぞれ ${}^{\omega}\omega$ の位相や測度に関する疎集合と零集合の σ-イデアルとするとき，実数の集合論で扱われる $\mathcal{M}_{^{\omega}\omega}$ や $\mathcal{N}_{^{\omega}\omega}$ の集合論的な性質に関する命題は，ほとんどの場合，$\mathcal{M}, \mathcal{N}$ の集合論な性質に関する命題と同値になる.）

$n, k \in \omega$ に対し，

$$a^k_n = \begin{cases} \langle \overbrace{1, \ldots, 1}^{n}, 0\rangle & k \text{ が偶数のとき} \\ \langle \overbrace{1, \ldots, 1}^{n}, 1\rangle & k \text{ が奇数のとき} \end{cases}$$

とする．$W \subseteq \mathbb{I}$ を 補題 1 の前と同じようにとり，$j : {}^{\omega}\omega \to W$ を，

$$j(f) = a^0_{f(0)} {}^\frown a^1_{f(1)} {}^\frown a^2_{f(2)} {}^\frown \cdots$$

により定義する[15]．${}^{\omega}\omega$ 上の測度 μ を，$s \in {}^{\omega>}\omega$ に対し，$n = \mathrm{dom}(s)$ として，

$$\mu([s]) = \prod_{i<n} 2^{-(s(i)+1)}$$

となるようなものとして定義する．このとき，次は容易に確かめられる．次の補題で，W は 4 ページで定義した ${}^{\omega}2$ の部分集合とする．

補題 14 (a)　j は ${}^{\omega}\omega$ から W への位相同型になっている．

(b)　j は ${}^{\omega}\omega$ の上で導入したような測度と，W での $\mathbb{I}$ の測度から導かれる測度に関して測度を保存する写像となっている．　❏

[14] 3 ページの脚注 5 を参照．

[15] つまり，$j(f)$ は，有限列 $a^0_{f(0)}, a^1_{f(1)}, a^2_{f(2)}, \ldots$ を繋げてできる無限列（に対応する ω 上の関数）とする．

2　超限帰納法，順序数，基数

2.1　整列順序

定義 15 X を集合として $<$ を X 上の二項関係とする．$\langle X, <\rangle$ が整列順序集合 (well-ordered set あるいは well-ordering) である[16]とは，次が成り立つことである．

(1)　$\langle X, <\rangle$ は全順序である[17].

(2)　すべての空でない X の部分集合 a は $<$ に関する最小元を持つ（これを $\min a$ であらわす）.

$\langle X, <\rangle$ が整列順序で，$C \subseteq X$ なら，

$$<\restriction C = < \cap (C \times C) = \{\langle x, y\rangle : x \in C, y \in C \text{ かつ } x < y\}$$

は C 上の整列順序となる．簡単のために $<\restriction C$, $<\cap(C \times C)$ などと書くかわりに，単に $<$ と書くことが多く，たとえば，“$\langle C, <\rangle$ は整列順序である”，などと言うことにする．後で二項関係の一つとして，集合の要素関係 “$\in$” を考えることになる．このときも，たとえば，$\langle X, \in\rangle$ と書いたときには，ここでの $\in$ は $\in\restriction X = \{\langle x, y\rangle \in X^2 : x \in y\}$ のことである．

$\langle X, <\rangle$ が整列順序集合なら，$\langle X, <\rangle$ は最小元を持つ : 定義 15 (2) で，a として X 自身をとればよい.

一方，X は最大元を持つ必要はない — 例えば，次の例がそうである : $\langle X, <\rangle = \langle \mathbb{N}, <\rangle$ とすると，X は上界を持たず，特に最大元も持たない.

$x \in X$ が X の最大元でないなら，X での x の次の元，つまり，$y \in X, x < y$ で，どんな $z \in X$ に対しても $x < z < y$ とはならないようなものがとれる[18]．このような y を x の（X での）次の元 (successor) と言う．x の X での次の元 y は，

$$x' = \min\{z \in X : z < y\}.$$

として与えることができるからである.

X の元 z は X の最小元でなく，どの $x \in X$ によっても，x' と表せないとき，X の極限点 (limit) とよばれる．X のすべての元は，X の最小元であるか,（ただ一つに決まる $x \in X$ の）次の元であるか，極限点であるかのどちらかである．z が X の極限点なら，すべての $x \in X$ に対し，

$$x < z \;\Rightarrow\; x' < z$$

がなりたつ : $x < z$ なら $x' \leq z$, だが z は次の元でないことから，“$=$” は成り立たないからである.

---

[16] $<$ は X 上の整列順序 (well-ordering) である，あるいは，$<$ は X を整列する，などとも言うことにする.

[17] X 上の二項関係 $<$ が全順序であるとは，次の (i), (ii), (iii) が成り立つことである : (i) すべての $x \in X$ に対し $x < x$ でない; (ii) $x, y, z \in X$ に対し，$x < y$ かつ $y < z$ なら $x < z$; (iii) すべての異なる $x, y \in X$ に対し，$x < y$ または $y < x$ のどちらかが成り立つ．このとき X の元は $<$ によって「一列に 並べられる」ので，全順序のことを “線型順序” という言い方をすることもある.

[18] このときには，$\{z \in X : x < z\}$ は空でないから，この集合の最小元がとれるが，これが求める性質を持つものとなっている.

例 16 自然数の全体の集合[19]$\mathbb{N}$ は自然な順序により整列順序集合となる．実数の全体の集合 $\mathbb{R}$ を自然な順序で考えると，これは整列順序集合とはなっていない．たとえば，$\mathbb{R}$ の部分集合 $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x\}$ や，$\{x \in \mathbb{R} : 2 < x^2\}$ は最小元を持たない．

補題 17 $\langle X, < \rangle$ を整列順序として，　$F : X \to X$ を真に単調増加な関数とする[20]．このとき，すべての $x \in X$ に対し，$x \leq F(x)$ が成り立つ．

証明．　$F_0 : X \to X$ が補題の反例となっているとして矛盾を導く．つまり F_0 は単調増加だが，$F_0(x) < x$ となるような $x \in X$ が存在するとする．このとき，$x_0 = \min\{x \in X : F_0(x) < x\}$ がとれるが，$F_0(x_0) < x_0$ だから，x_0 の最小性より，$F_0(x_0) \leq F_0(F_0(x_0))$ となる．一方 F_0 の単調増加性から，$F_0(x_0) < x_0$ の両辺に F_0 を施すと $F_0(F_0(x_0)) < F_0(x_0)$ となるから，これは矛盾である．　□ (補題 17)

系 18 $\langle X, < \rangle$ を整列順序とする．このとき，X 上の恒等写像 id_X は，$\langle X, < \rangle$ からそれ自身への唯一の同型写像[21]となる．

証明．　id_X が $\langle X, < \rangle$ から $\langle X, < \rangle$ への同型写像であることは明らかである．$F : X \to X$ を任意の同型写像とするとき，F も F^{-1} も単調な増加関数となるから，補題 17 により，すべての $x \in X$ に対し，$x \leq F(x)$ かつ $x = F^{-1}(F(x)) \geq F(x)$, したがって $x = F(x)$ が成り立つ．よって $F = id_X$ である．　□ (系 18)

系 19 $\langle X, < \rangle$ と $\langle Y, < \rangle$ を整列順序集合とする．もし，$\langle X, < \rangle$ から $\langle Y, < \rangle$ への同型写像が存在すれば，この同型写像は一意に決まる．

証明．　$F : X \to Y$ と $G : X \to Y$ を $\langle X, < \rangle$ から $\langle Y, < \rangle$ への同型写像とすれば，$F^{-1} \circ G$ は $\langle X, < \rangle$ から $\langle X, < \rangle$ への同型写像となるから，系 19 により，$F^{-1} \circ G = id_X$ である．したがって，この等式の両辺に F を適用すると $G = F$ がわかる．　□ (系 19)

□ (系 19)

定義 20 $\langle X, < \rangle$ を整列順序集合とする．X の始片 (initial segment) とは X の部分集合 C で，

$$c \in C, x \in X, x \leq c \Rightarrow x \in C.$$

が成り立つようなもののことである．C は $C \neq X$ が成り立つとき真の始片 (proper initial segment) であるという．

C が X の真の始片のとき，$x = \min(X \setminus C)$. として，x で定義される始片を $X_{<x} = \{y \in X : y < x\}$ と定義すると，$C = X_{<x}$ となる： $y \in X_{<x}$ なら，$y < x$ だから，x の定義

[19]実は，ここでの議論の展開では，自然数の全体の集合 $\mathbb{N}$ は，整列集合の理論の立場から，第 2.3 節で，はじめて導入されることになる．数学を集合論の枠組の中で厳密に展開してゆくには，自然数の全体の集合を用いて有理数の全体を定義し，これの部分集合の全体を使うことで実数を定義することになる．

[20]f が集合 X から Y への関数であるとき，$f : X \to Y$ と書く．関数 $f : X \to Y$ が真に単調増加とは，任意の $x, y \in X$ が $x < y$ を満たすとき，　$F(x) < F(y)$ がつねに成り立つことである．

[21]f が整列順序 $\langle X, < \rangle$ から $\langle Y, < \rangle$ への同型写像（順序同型写像とも言う）とは，f は X から Y への全単射で，　$x, x' \in X$ に対し，$x < x' \Leftrightarrow f(x) < f(y)$ が成り立つことである．

から $y \in C$ がわかる．逆に，$c \in C$ なら，$c < x$ である［そうでなければ（$<$ が全順序であることから）$x \le c$ となり，C は始片だから $x \in C$ となってしまい，x の定義に矛盾である］．したがって，$c \in X_{<x}$ である．

系 21 $\langle X, <\rangle$ が整列順序集合なら，$\langle X, <\rangle$ は，$\langle X, <\rangle$ の，どの真の始片とも同型にならない．

定理 23 の証明のために次の補題を用意しておく：

補題 22 $\mathcal{F}$ を関数を要素とする集合とする[22]．$F = \bigcup \mathcal{F}\,(= \bigcup_{f \in \mathcal{F}} f)$ が関数となるのは，$\mathcal{F}$ に含まれる関数が互いに矛盾しない (compatible な) ときである[23]．また，このときには，$\operatorname{dom} F = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} \operatorname{dom}(f)$ となる．

定理 23 $\langle X, <\rangle$ と $\langle Y, <\rangle$ を整列集合とするとき，次の 3 つのうち（ちょうど）1 つが成り立つ：

(a)　$\langle X, <\rangle$ と $\langle Y, <\rangle$ は同型である．
(b)　$\langle X, <\rangle$ は $\langle Y, <\rangle$ の真の始片の 1 つと同型である．
(c)　$\langle Y, <\rangle$ は $\langle X, <\rangle$ の真の始片の 1 つと同型である．

証明.　定理が成り立たないとすると，整列集合 $\langle X, <\rangle, \langle Y, <\rangle$ で，(a), (b), (c) のいずれも成り立たないようなものが存在する．

$$\mathcal{F} = \{f : \text{ある } X \text{ の始片 } X' \text{ と } Y \text{ の始片 } Y' \text{ に対し } f : \langle X', <\rangle \overset{\cong}{\to} Y', <\}$$

とする．このとき，

Claim 23.1 $f, g \in \mathcal{F}$ なら，$f \subseteq g$ か $g \subseteq f$ のいずれかが成り立つ．

$\vdash$　$f, g \in \mathcal{F}$ なら，$\operatorname{dom}(f), \operatorname{dom}(g)$ はともに X の始片だから，$\operatorname{dom}(f) \subseteq \operatorname{dom}(g)$ か $\operatorname{dom}(g) \subseteq \operatorname{dom}(f)$ のいずれかが成り立つ．仮に $\operatorname{dom}(f) \subseteq \operatorname{dom}(g)$ とすると，系 19 により，$f = g\restriction \operatorname{dom}(f)$ となるから，$f \subseteq g$ である．同様に $\operatorname{dom}(g) \subseteq \operatorname{dom}(f)$ とすると，$g \subseteq f$ が成り立つ．　$\dashv$ (Claim 23.1)

Claim 23.1 と補題 22 により，$f^* = \bigcup \mathcal{F}$ は $\operatorname{dom}(f^*) = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} \operatorname{dom}(f)$ 上の関数となるが，

Claim 23.2 f^* は $\mathcal{F}$ の最大元となる．

---

[22] 一般の数学での議論では，関数 f とそのグラフを，区別して考えることが多いが，ここでは，関数とはグラフのことであるという立場で議論する．つまり，$f \subseteq X \times Y = \{\langle x, y\rangle : x \in X, y \in Y\}$ で，

(†)　各 $x \in X$ に対し，$\langle x, y\rangle \in f$ となるような y がちょうど一つ決まる

ようなものを X から Y への関数とよぶ．$x \in X$ に対し，$\langle x, y\rangle \in f$ のときに，$f(x) = y$ と書く．関数 f に対し，$f : X \to Y$ となるような，X は (†) により一意に決まるが，これを $\operatorname{dom}(f)$ であらわし f の定義域とよぶ．また，“f は X 上の関数である”，という言い方もする．また，Y を f の値域とよび，$\operatorname{rng}(f)$ であらわす．

[23] $\mathcal{F}$ に含まれる関数が互いに矛盾しない，とは，すべての $f, g \in \mathcal{F}$ に対し，$f \cap g$ が（$\operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g)$ 上の）関数となるとき（つまり，すべての $x \in \operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g)$ に対し，$f(x) = g(x)$ となるとき）である．

$\vdash$ f^* が写像になることは，補題 22 によりよい．$\mathrm{dom}(f^*) = \bigcup\{\mathrm{dom}(f) : f \in \mathcal{F}\}$, $f^{*\prime\prime}\mathrm{dom}(f^*) = \bigcup\{f''\mathrm{dom}(f) : f \in \mathcal{F}\}$ だから，f^* は X の始片から Y の始片への写像となっている．$X^* = \mathrm{dom}(f^*)$, $Y^* = f^{*\prime\prime}\mathrm{dom}(f^*)$ とおく．

f^* が順序を保存することを見るために $x, y \in X^*$, $x < y$ をとる．このとき $f, g \in \mathcal{F}$ で，$x \in \mathrm{dom}(f)$, $y \in \mathrm{dom}(g)$ となるものがあるが，Claim 23.1 により，たとえば，$g \subseteq f$ としてよい．したがって x, $y \in \mathrm{dom}(f)$ としてよいが，$f \in \mathcal{F}$ により，$x < y$ から $f^*(x) = f(x) < f(y) = f^*(y)$ となる．

したがって $f^* \in \mathcal{F}$ となるが，f^* の定義から，すべての $f \in \mathcal{F}$ に対し，$f \subseteq f^*$ となるから，f^* は $\mathcal{F}$ の最大元である． $\dashv$ (Claim 23.2)

仮定により，$X^* \neq X$, $Y^* \neq Y$ だから，$x^* = \min(X \setminus X^*)$, $y^* = \min(Y \setminus Y^*)$ がとれるが，

$$f^{**} = f^* \cup \{\langle x^*, y^*\rangle\}$$

とすれば，明らかに $f^{**} \in \mathcal{F}$ となる．ところが，$f^* \subsetneq f^{**}$ だから，これは f^* が $\mathcal{F}$ の最大元であることに矛盾である． ❑ (定理 23)

2.2 帰納法による証明と定義

整列順序集合上では，命題を帰納的に証明したり，関数を帰納的に定義したりすることができる．

定理 24 $\langle X, <\rangle$ を整列順序集合として $E(x)$ を，X の元 x に関する命題とする．すべての $x \in X$ に対し， 条件：

(∗) すべての $y < x$ に対し命題 E が成り立つなら，x に対しても命題 E が成り立つ

が成り立つなら，すべての $x \in X$ に対し，命題 E が成り立つ．

証明. 定理が成り立たないと仮定して，矛盾を導く．この仮定により，整列集合 $\langle X, <\rangle$ と X の元 x に関する命題 $E(x)$ で，E は (∗) を満たすが，$E(x)$ とならないような $x \in X$ が存在するようなものがとれる．したがって，

$$Y = \{x \in X : E(x) \text{ は成り立たない}\}$$

とすると Y は空でない．よって，X が整列集合であることから，Y の最小元 x_0 がとれる．x_0 の最小性から，すべての $y \in X$, $y < x_0$ に対し，$E(y)$ が成り立つ．したがって (∗) により，$E(x_0)$ も成り立つことが帰結できてしまうが，これは，$x_0 \in Y$ に矛盾である．

❑ (定理 24)

整列順序 $<$ 上の帰納法は，次のようなやり方で行われることも多い（11 ページでのように， $x \in X$ が X の最大元でないとき，x' で x の X での次の元をあらわす)：

定理 24′ $\langle X, <\rangle$ を整列順序集合として $E(x)$ を，X の元 x に関する命題とする．次の (a), (b), (c) が成り立つとする：

(a) X の最小元は E を満たす．

(b)　$x \in X$ が E を満たし x は X の最大元でないなら，x' も E を満たす．

(c)　x が極限点で，すべての $y < x$ が E を満たすなら，x も E を満たす．

このとき，すべての $x \in X$ は E を満たす．

証明.　E が 定理 24 での $(*)$ を満たすことを示せばよい．$x \in X$ を任意にとり，$E(y)$ がすべての $y < x$ に対し成り立つとして，$E(x)$ を示す．

x が X の最小元のときには，(a) により $E(x)$ となるから，$(*)$ は成り立つ．x が最小元でないときには，x は（ある X の元の）次の元であるか，極限点であるかのどちらかであるが，x が次の元のときには，(b) により，x が極限点であるときには，(c) により，$E(x)$ が成り立つ．

したがって，$(*)$ が成り立つことがわかるが，このことと定理 24 により，すべての $x \in X$ に対し $E(x)$ が成り立つことが帰結できる．　□ (定理 24′)

定理 25　（帰納的定義あるいは再帰的定義）$\langle X, < \rangle$ を整列順序集合として，Y をある集合とする．G を，

$$\mathrm{dom}(G) = \{ f : f \text{ は，ある } X \text{ の真の始片から } Y \text{ への関数} \}$$

となるような関数とする[24]．このとき，$F : X \to Y$ で，すべての $x \in X$ に対し，

$(**)$　$F(x) = G(F{\restriction} X_{<x})$

となるようなものが，ちょうど一つ存在する[25]．

証明.　まず，$(**)$ を満たすような F がたかだか一つしか存在しないことを示す．X 上の関数 F と F' が，ともに $(**)$ を満たしていると仮定する．$F \neq F'$ だったとすると，$\{x \in X : F(x) \neq F'(x)\}$ は空でないから，この集合の最小元 x_0 がとれるが，$y < x_0$ なら x_0 の最小性から，$F(y) = F'(y)$ となる．したがって，$F{\restriction} X_{<x_0} = F'{\restriction} X_{<x_0}$ となるが，このことから，

$$F(x_0) = G(F{\restriction} X_{<x_0}) = G(F'{\restriction} X_{<x_0}) = F'(x_0)$$

となってしまい x_0 のとり方に矛盾する．したがって $F = F'$ である．

次に，$(**)$ を満たすような F が実際に存在することを示す．

$$\begin{aligned}\mathcal{F} = \{ f : &\ f \text{ は } X \text{ のある始片 } I \text{ 上の関数で} \\ &\quad \text{すべての } x \in I \text{ に対し，} \ f(x) = G(f{\restriction} X_{<x}) \text{ が成り立つ} \}\end{aligned}$$

とする．

以下で，この $\mathcal{F}$ に補題 22 を適用して，$F = \bigcup \mathcal{F}$ が求めるようなものであることを示す．

Claim 25.1 $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

[24] 直観的には，G は，F が X のある始片まで定義できたときに，これを一つ先の元にどう延長するかを指定する関数である．$(**)$ は，F がこの延長を “くりかえす” ことで得られる関数となっていることを主張している．

[25] $F{\restriction} S$ で関数 F の S への制限をあらわす．$f : X \to Y$ のとき，$f{\restriction} S = f \cap (S \times Y)$ である．

$\vdash$ $\emptyset \in \mathcal{F}$ によりよい[26]. $\dashv$ (Claim 25.1)

Claim 25.2 $f \in \mathcal{F}$, $\mathrm{dom}(f) = I$ で，$x \in I$ なら，$f{\restriction} X_{<x} \in \mathcal{F}$.

$\vdash$ $\mathcal{F}$ の定義から明らか．$X_{<x}$
$subseteqI$ に注意する． $\dashv$ (Claim 25.2)

Claim 25.3 $f, g \in \mathcal{F}$ なら f と g は矛盾しない．

$\vdash$ 一般性を失うことなく $\mathrm{dom}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$ と仮定してよいが，一意性の証明から，$f = g{\restriction}\,\mathrm{dom}(f)$ がわかる．したがって $f \subseteq g$ である． $\dashv$ (Claim 25.3)

Claim 25.4 $X = \{x \in X :$ ある $f \in \mathcal{F}$ に対し $x \in \mathrm{dom}(f)\}$.

$\vdash$ そうでなかったとすると，

$$\{x \in X : \text{すべての } f \in \mathcal{F} \text{ に対し } x \notin \mathrm{dom}(f)\} \neq \emptyset$$

だから，x_0 をこの集合の最小元とする．$f^* = \bigcup \mathcal{F}$ とすると，Claim 25.3 と補題 22 により，$f^* \in \mathcal{F}$ がわかるが，x_0 の最小性から，$\mathrm{dom}(f^*) = X_{<x_0}$ となることがわかる．ここで，

$$f^{**} = f^* \cup \{\langle x_0, G(f^*)\rangle\}$$

とすると，$f^{**} \in \mathcal{F}$ となるが，$x_0 \in \mathrm{dom}(f^{**})$ だから，これは x_0 の定義に矛盾である．
$\dashv$ (Claim 25.4)

$F = \bigcup \mathcal{F}$ とすると，上の証明でも示したように $F \in \mathcal{F}$ となるが，Claim 25.4 により，F は X 上の関数となる．$\mathcal{F}$ の定義から，F は $(**)$ を満たすから，これが求めるものである． ❑ (定理 25)

注意． 定理 $24''$ と同じように，定理 25 に対しても，X 上の F が 場合分けをともなった再帰によって定義されているような形のヴァージョンが考えられる：

定理 25′ $\langle X, <\rangle$ を整列順序集合として， Y を集合とする．H, K を関数で $\mathrm{dom}(H) = \mathrm{rng}(H) = \mathrm{rng}(K) = Y$, $\mathrm{dom}(K) = \{f : f$ は，ある X の真の始片から Y への関数$\}$ として，$a \in Y$ とする．このとき，関数 $F : X \to Y$ で，

$$(***) \quad F(x) = \begin{cases} a & x \text{ が } X \text{ の最小元のとき} \\ H(F(y)) & y \in X \text{ で } x = y' \text{ のとき} \\ K(F{\restriction} X_{<)} & x \text{ が } X \text{ の極限点のとき} \end{cases}$$

となるものがただ一つ存在する．

集合 C は，すべての $y \in C$ と $x \in y$ に対し，つねに $x \in C$ が成り立つとき，つまり，

$$x \in y \in C \Rightarrow x \in C$$

となるとき，**推移的** (transitive) であるという．

[26] 関数の定義から，$\emptyset : \emptyset \to \emptyset$ だが，$\emptyset$ は $\emptyset$ 上の唯一の関数で，x_0 を X の最小元とするとき，$X_{<x_0} = \emptyset$ であることに注意すると，$\emptyset \in \mathrm{dom}(E)$ がわかる．

例 26 (a)　$\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ は推移的である．$\{\{\emptyset\}\}$ は推移的でない．$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}$ は推移的である．

(b)　各 $i \in I$ に対し，集合 t_i が推移的であるとき，$\bigcap_{i\in I} t_i$ も $\bigcup_{i\in I} t_i$ も推移的である．

(c)　t が推移的なら $t \cup \{t\}$ も推移的である．

補題 27 T を推移的として，$\in$ は T 上の全順序となっているとする．このとき，

(a)　すべての $x \in T$ は推移的となる．

(b)　$x, y \in T, x \in y$ で，y は（$\in$ の意味で）x の次の元になっているとする．このとき，$y = x \cup \{x\}$ である．

(c)　$U \subseteq T$ で，U は推移的で，最大元を持たないとする，$x \in T$ が U の（$\in$ の意味での）最小上界になっているとき，$U = x$ である．

証明.　(a): $z \in y \in x$ なら，$\in$ が T 上の全順序であることから，$z \in x$ である．

(b): $x \in y$ と (a) により，$x \subseteq y$ である．したがって，$x \cup \{x\} \subseteq y$ だが，もし $x \cup \{x\} \neq y$ だったとすると，ある $z \in y \setminus (x \cup \{x\})$ がとれる．特に $z \neq x$ である．T は推移的だから，$z \in T$ となるが，$z \notin x \cup \{x\}$ だから，$\in$ が T 上で全順序となっていることから，$x \in z$ となる．したがって，$x \in z \in y$ となるが，$\in$ は T 上全順序であることから $z \neq y$ である．これは y が x の次の元であることに矛盾する．

(c): x が U の上界により，$U \subseteq x$ となる．したがって，$U \neq x$ とすれば，$z \in x \setminus U$ がとれるが，すべての $u \in U$ に対し，$u \in z$ となる： もしそうでないなら，$\in$ が T 上全順序であることから，$u = z$ または，$z \in u$ となるが，U が推移的であることから，いずれの場合にも $z \in U$ となり z のとり方に矛盾である．したがって z は U の上界となるが，$z \in x$ だから，これは x が U の最小上界であることに矛盾する．　□ (補題 27)

定理 28 (Mostowski の同型定理)
$\langle X, < \rangle$ を，整列順序集合とする．このとき，推移的な集合 T と同型写像

$$\pi : \langle X, < \rangle \xrightarrow{\cong} \langle T, \in \rangle$$

がとれる．特に $\in$ は T 上の整列順序となっている．さらに，ここでの π と T は一意に決まる．

T は $\langle X, < \rangle$ の**モストフスキー像**とよばれ，π は**モストフスキー同型写像**とよばれる．

証明.　(Step I): まず，T が存在するとすれば一意に存在することを示す．そうでなかったとして，$\pi : \langle X, < \rangle \xrightarrow{\cong} \langle T, \in \rangle$ と $\pi' : \langle X, < \rangle \xrightarrow{\cong} \langle T', \in_{T'} \rangle$ を異なる同型写像とする．このとき，

$$\{x \in X : \pi(x) \neq \pi'(x)\}$$

は空でないから，最小元 x_0 を持つ．

もし，x_0 が ある $y \in X$ の次の元なら，x_0 の最小性から，$\pi(y) = \pi'(y)$ となる．π は同型写像だから，$\pi(x_0)$ は $\pi(y)$ の T での次の元となる．したがって，補題 27 (b) により，$\pi(x_0) = \pi(y) \cup \{\pi(y)\}$ となることがわかる．同様に，$\pi'(x_0) = \pi'(y) \cup \{\pi'(y)\}$ となるから，$\pi(x_0) = \pi'(x_0)$ となってしまい矛盾である．

もし x_0 が極限点なら，x_0 の最小性から，$\pi\restriction X_{<x_0} = \pi'\restriction X_{<x_0}$ となるが，$\pi(x_0)$ は，$\pi''X_{<x_0}$ の最小上界で，$\pi''X_{<x_0}$ は T の始片だから推移的である．したがって，補題 27 (c) により $\pi''X_{<x_0} = \pi(x_0)$ である．同様に，$\pi'{}''X'_{<x_0} = \pi'(x_0)$ となるから，$\pi(x_0) = \pi'(x_0)$ となり矛盾である．

(Step II): 次に，命題

$(*)$　すべての $x \in X$ に対し，推移的な T_x と，写像 π_x で $\pi_x : \langle X_{<x}, <\rangle \overset{\cong}{\to} \langle T_x, \in\rangle$ となるものが存在する

を $x \in X$ に関する帰納法で示す．

(IIa): $x \in X$ が X の最小元であるときには，$X_{<x} = \emptyset$ だから $T_x = \emptyset$, $\pi = \emptyset$ とすればよい．

(IIb): ある $x \in X$ に対し，推移的な T_x と，π_x で $\pi_x : \langle X_{<x}, <\rangle \overset{\cong}{\to} \langle T_x, \in\rangle$ となるようなものがとれない，とすると，このような x のうちで最小のものがとれる．これを x_0 とすると，すべての $x < x_0$（つまり $x \in X_{<x_0}$）に対し，推移的な T_x と，写像 π_x で $\pi_x : \langle X_{<x}, <\rangle \overset{\cong}{\to} \langle T_x, \in\rangle$ となるものがとれる．(IIa) により，x_0 は X の最小元ではないから，$X_{<x_0} \neq \emptyset$ である．

(IIb1): x_0 がある $x^* \in T$ の次の元だとすると，$\pi_{x_0} = \pi_{x^*} \cup \{\langle x^*, T_{x^*}\rangle\}$ とすれば，

$$\pi_{x_0} : \langle X_{<x_0}\rangle \overset{\cong}{\to} \langle T_{x^*} \cup \{T_{x^*}\}, \in\rangle$$

となるが，$T_{x^*} \cup \{T_{x^*}\}$ は推移的だから，これは x_0 のとり方に矛盾である．

(IIb2): x_0 が極限点だとすると，(Step I) を各 $x < x_0$ に対する T_x, π_x に適用すると，$x < y < x_0$ なら，$\pi_y\restriction X_{<x}$ が $\langle X_{<x}, <\rangle$ から，$\langle \pi_y{}''X_{<x}, \in\rangle$ への同型写像となっていることから，$\pi_x \subseteq \pi_y$, $T_x = \{z \in T_y \,:\, z \in \pi_y(x)\}$ となることがわかる．したがって，$\pi_{x_0} = \bigcup\{\pi_x \,:\, x < x_0\}$ とすると，

$$\pi_{x_0} : \langle X_{<x_0}, <\rangle \overset{\cong}{\to} \bigcup\{T_x \,:\, x < x_0\}$$

となるが，$\bigcup\{T_x \,:\, x < x_0\}$ は推移的だから，これは，x_0 のとり方に矛盾である．

(Step III): (Step II) と (Step I) により（つまり (Step I) を使って (IIb2) でのように議論することにより），すべての $x \in X$ に対し，推移的な T_x と，写像 π_x で $\pi_x : \langle X_{<x}, <\rangle \overset{\cong}{\to} \langle T_x, \in\rangle$ となるものが存在して，$x, y \in X$, $x < y$ なら，$\pi_x \subseteq \pi_y$, $T_x = \{z \in T_y \,:\, z \in \pi_y(x)\}$ となることがわかる．したがって，(IIb1) と (IIb2) でと同様に議論して，これらの T_x, π_x $(x \in X)$ から，求めているような $\langle X, <\rangle$ 上の同型写像が構成できる．　❑ (定理 28)

補題 29 $\langle X, <\rangle$ を整列順序として，Y を X の始片とする．(したがって $\langle Y, <\rangle$ も整列順序である．) $\pi_X : \langle X, <\rangle \to \langle T, \in\rangle$ と $\pi_Y : \langle Y, <\rangle \to (S, \in)$ をこれらに属するモストフスキー同型写像とする．このとき $\pi_Y = \pi_X\restriction Y$ となり，したがって $S \subseteq T$ で，S は T の $\in$ に関する始片となる．

証明.　$\pi_X\restriction Y : \langle Y, <\rangle \overset{\cong}{\to} (\pi''Y, \in)$ はモストフスキー同型写像となる．したがって，定理 28 でのモストフスキー同型写像の一意性から $\pi_Y = \pi_X\restriction Y$ である．よって，$S \subseteq T$ で π_X は同型写像だから，S は T の $\in$ に関する始片となることがわかる．　❑ (補題 29)

2.3　順序数

この節で，順序数のクラス On を導入する．On の持つべき性質は：

(1)　On は真のクラスで[27]，推移的で[28]，$\in$ に関し整列順序となっている[29].

(2)　各順序数 α は,（推移的な）集合で,（$\in$ により）整列されている.

(3)　任意の整列集合 $\langle X, < \rangle$ は，一意に決まる順序数 $\langle \alpha, \in \rangle$ と順序同型となる.

この性質により，順序数の全体のクラスは，すべての整列順序集合のクラスの（順序同型に関する同値類の）自然な代表元を集めたクラスになっていることがわかる.

推移的な集合 α, が $\in$ により整列されているとき，α は**順序数** (ordinal number) であるという.

$$\mathrm{On} = \{\alpha : \alpha \text{ は順序数 }\}.$$

とする[30].

$\alpha, \beta \in \mathrm{On}$ に対し,

$$\alpha < \beta \ \Leftrightarrow \ \alpha \in \beta.$$

とする.

補題 30 α が順序数となるのは，$\langle \alpha, \in \rangle$ が，ある整列順序集合のモストフスキー像となる，ちょうどそのときである.

証明.　モストフスキー像の定義から，$\langle \alpha, \in \rangle$ が，ある整列順序集合のモストフスキー像となるなら，α が順序数となることは明らかである．逆に α が順序数なら，$\langle \alpha, \in \rangle$ は整列集合で，$\langle \alpha, \in \rangle$ は自分自身のモストフスキー像となる.　❏ (補題 30)

補題 31 (a)　$\beta \in \alpha \in \mathrm{On}$ なら $\beta \in \mathrm{On}$ である．したがって，On は推移的なクラスである.

(b)　$\alpha \in \mathrm{On}$ なら，$\alpha = \{\beta \in \mathrm{On} : \beta < \alpha\}$ となる.

(c)　$\alpha, \beta \in \mathrm{On}$ に対し，$\alpha = \beta$ または，$\alpha \subsetneq \beta$ または $\beta \subsetneq \alpha$ のいずれかが成り立つ.

(d)　$\alpha \in \mathrm{On}$ なら $\alpha \notin \alpha$ である.

(e)　$\alpha, \beta \in \mathrm{On}$ に対し，同値性 $\beta < \alpha \ \Leftrightarrow \ \beta \subsetneq \alpha$ が成り立つ.

(f)　M を順序数からなる集合とするとき，$\bigcup M \in \mathrm{On}$ となり，さらに（上の $<$ に関し）$\bigcup M = \sup M$ である.

(g)　On は真のクラスである.

証明.　(a): $\beta \in \alpha \in \mathrm{On}$ なら，β は推移的で，$\in$ により整列されていることを示せばよい．$\delta \in \gamma \in \beta$ とすると，$\in$ が α 上の整列順序であることから，$\delta \in \beta$ となる．したがって β は推移的である．α が推移的により $\beta \subseteq \alpha$ となるから，$\in$ は β 上の整列順序になっていることがわかる.

(b): $\alpha = \{x : x \in \alpha\}$ だから，(a) によりよい.

[27] 集合の族はそれが集合とならないときに真のクラスであると言う．たとえば，すべての集合の族は真のクラスである.

[28] つまり，$\alpha \in \mathrm{On}$ で $\beta \in \alpha$ なら $\beta \in \mathrm{On}$ が成り立つ.

[29] つまり，$\in$ は On 上線型順序となり，On のどの部分クラスも，$\in$ に関する最小元を持つ.

[30] On のかわりに Ord という記号を使うこともある.

(c): 定理 23 により， α と β は同型であるか，α は β の真の始片と同型であるか，β は α の真の始片と同型であるかのいずれかが成り立つ．ここで α と β が同型なら，α と β は両方とも α のモストフスキー像になるから，モストフスキー同型写像の一意性から $\alpha=\beta$ である．

もし α が β の真の始片 γ と同型なら，α と γ はともに α のモストフスキー像となるから，$\alpha=\gamma$ である．したがって $\alpha \subsetneqq \beta$ が成り立つ．

同様にして，β た α の真の始片と同型なら，$\beta \subsetneqq \alpha$ となることがわかる．

(d): もし $\alpha \in \alpha$ だったとすると，α の元 x で $x \in x$ となるものが存在することになるが，これは $\in$ が α 上の全順序になっていることに矛盾する．

(e): $\beta<\alpha$ つまり，$\beta \in \alpha$ なら，α の推移性から，$\beta \subseteq \alpha$ となる．(d) により，$\beta \in \alpha \backslash \beta$ だから，$\beta \subsetneqq \alpha$ である．

逆に，$\beta \subsetneqq \alpha$ とする．ξ を，$\alpha \setminus \beta$ の $\in$ に関する最小元とすると，$\beta \subseteq \xi$ となるが，$\beta \neq \xi$ なら，$\eta \in \xi \setminus \beta$ がとれ，$\beta \subseteq \eta<\xi$ となってしまうから，ξ の最小性に矛盾である．したがって $\beta=\gamma<\alpha$ がわかる．

(f): M を順序数からなる集合とするとき，$\bigcup M$ が推移的で $\in$ により整列されることは容易に示せる（演習）．したがって，$\bigcup M \in \mathrm{On}$ である．$\beta \in M$ なら，$\beta \subseteq \bigcup M$ だから，(e) により，$\bigcup M$ は，M の（$<$ に関する）上界になっている．これが M の最小上界となることも (e) により明らかである．

(g): (a) により，$\mathrm{On}=\bigcup \mathrm{On}$ である．したがって，On が集合だったとすると，(f) により $\mathrm{On} \in \mathrm{On}$ となってしまうが，これは (d) に矛盾である． □ (補題 31)

補題 32 (a) On 上の関係 $\in$ （つまり上で定義した On 上の関係 $<$）は，On 上の全順序となる．

(b) $<$ は On 上の整列順序である．より詳しく言うと，$C \subseteq \mathrm{On}$ が空でなければ，$\bigcap C \in \mathrm{On}$ で $\bigcap C=\min C$ が成り立つ．

(c) $0=\emptyset$ は順序数で，$<$ に関して $<$ の最小元となる．

(d) $\alpha \in \mathrm{On}$ なら，$\alpha+1=\alpha \cup\{\alpha\} \in \mathrm{On}$ となり，$\alpha+1$ は，$\langle\mathrm{On},<\rangle$ での α の次の元である．

証明. (a): 補題 31 (c), (e) によりよい．

(b): $C \subseteq \mathrm{On}$ が空でなければ，$\bigcap C \in \mathrm{On}$ は，$\bigcap C$ が推移的で，$\in$ によって整列されることを示すことによりわかる（演習）．補題 31 (e) により，$\bigcap C$ は C の最大下界である．

(c): $\emptyset$ が順序数であることはよい（順序数の定義は $\emptyset$ に対して vacantly に成り立つ）．補題 31 (e) により，$\emptyset$ は（ $<$ に関する） On の最小元である．

(d): $\alpha+1 \in \mathrm{On}$ は，$\alpha+1$ が推移的で，$\in$ によって整列されることを示すことによりわかる（演習）．補題 31 (e) により，$\alpha+1$ は α の次の元であることは明らか． □ (補題 32)

補題 32 により，$0=\emptyset$, $1=0+1$, $2=1+1$, $\ldots$ $n+1=n+1$ が[31] On の元となる．$n=\{0,1,\ldots,n-1\}$ である[32]．

---

[31] $n+1=n+1$ はトートロジーに見えるかもしれないが，ここでの意図する意味は，左辺の $n+1$ は数表記に関して我々の普通に知っている足し算で，右辺の $n+1$ は，補題 32 (d) で導入された順序数に対する $+1$ である．

[32] ここでの $n-1$ は数表記としての $n-1$ である!

$\alpha \in \mathrm{On}$ は，$\alpha \neq \emptyset$ で最大元を持たないとき極限順序数 (limit ordinal) であるという．$\alpha, \beta \in \mathrm{On}$ で，$\beta < \alpha$ のとき，β が極限順序数であることと，β が $\langle \alpha, < \rangle$ の極限点であることは同値である．

極限順序数の概念を使って自然数の全体の集合 $\mathbb{N}$ を定義することができる： $n \in \mathrm{On}$ が自然数であるとは，n が極限点を含まないこと，とする．

$$\mathbb{N} = \{n \in \mathrm{On} : n \text{ は自然数 }\}.$$

厳密に言うと，$\mathbb{N}$ が集合になることは，集合論の枠組の中では公理として保証しておく必要がある．これが保証されていると，$\mathbb{N} \subseteq \mathrm{On}$ で $\bigcup \mathbb{N} = \mathbb{N}$ となるから，補題 31 (f) により，$\mathbb{N} \in \mathrm{On}$ となる．集合論では，$\mathbb{N}$ が順序数であることを強調するときには，$\mathbb{N}$ のかわりに ω という記号を用いることが多い．

2.4 基数

この節では基数の全体のクラス Card を順序数の全体のクラスの部分クラスとして導入する．自然数 n に対し，$n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ だったことを思い出すと，集合 E が n 個の要素を持つ有限集合である（記号： $|\,E\,| = n$），という概念を

n から E への全単射が存在する

により定義してよいことがわかる．基数の概念はこの有限集合の要素の個数の定義の拡張から自然に導入されるものになっている．

以下の議論では，選択公理 (AC — Axiom of Choice) とよばれる公理を常に仮定する．選択公理とは，任意の集合（族） $\mathcal{F}$ に対し，写像 $f : \mathcal{F} \to \bigcup \mathcal{F}$ で，すべての $a \in \mathcal{F}$ に対し，$f(a) \in a$ となるようなものが存在することを主張する公理である[33]．選択公理は，現代の数学では非常に頻繁に用いられている．選択公理なしでは証明できない日常的な（？）命題の例としては，線型空間の基底の存在定理などがあげられる．

「整列可能性定理」として知られる次の命題は,（集合論の他の公理の仮定のもとで）選択公理と同値になることが知られている：

定理 33 （整列可能性定理）すべての集合 X に対し，$\langle X, < \rangle$ が整列順序となるような X 上の二項関係 $<$ が存在する．

整列可能性定理のもとで，任意の集合 X の**濃度** $|\,X\,|$ を次のように定義することができる：

$$|\,X\,| = \min\{\alpha \in \mathrm{On} : X \text{ から } \alpha \text{ への全単射が存在する }\}$$

整列可能性定理により，$\langle X, < \rangle$ が整列順序になるような，X 上の二項関係 $<$ が存在するが，$\langle X, < \rangle$ のモストフスキー像を α とすると，$\alpha \in \mathrm{On}$ で，モストフスキー同型写像は，X から α への全単射である．したがって，$\{\alpha \in \mathrm{On} : X \text{ から } \alpha \text{ への全単射が存在する }\}$ は空集合でなく，上の $|\,X\,|$ はすべての集合に対し，well-defined である．集合の濃度となるような On の元 κ は,

[33] このような f を $\mathcal{F}$ 上の選択関数とよぶ.

すべての $\alpha < \kappa$ に対し，α から κ への全単射は存在しない．

という性質を満たすが，このような κ のことを**基数** (cardinal) とよぶ．次のカントル–ベルンシュタインの定理（定理 35）により，κ が基数であることと，すべての $\alpha < \kappa$ に対し，α から κ への上射は存在しないことは同値である．

次の 2 つの補題は，集合の濃度や基数に関する基本的な性質である．補題 34 で x を可算集合としたものは，Cantor により 1873 年に見出されているが，これは，数学史上，この命題の発見によって，集合論が数学の研究分野として確立された，とみなすことができるような数学史の里程標識となっている．

補題 34 x を集合とするとき，上射 $f : x \to \mathcal{P}(x)$ や全単射 $g : \mathcal{P}(x) \to {}^{x}2$ が存在するが[34]，上射 $h : x \to \mathcal{P}(x)$ は存在しない（したがって，もちろん全単射も存在しない）．

証明. $f : x \to \mathcal{P}(x); a \mapsto \{a\}$ は単射である．$g : \mathcal{P}(x) \to {}^{x}2; y \mapsto ch_y$ は全単射である（演習!）．ただし，$ch_y : x \to 2$ は，y の特性関数である．つまり，$a \in x$ に対し，

$$ch_y(a) = \begin{cases} 1 & a \in y \text{ のとき} \\ 0 & a \notin y \text{ のとき} \end{cases}$$

で定義される関数である．

最後に $h : x \to \mathcal{P}(x)$ が上射だったとして矛盾を導く．

$$y = \{a \in x : a \notin h(a)\}$$

とする．$y \in \mathcal{P}(x)$ で，h は上射だから，$a^* \in x$ で，$h(a^*) = y$ となるものが存在する．

もし，$a^* \in y$ とすれば，y の定義から，$a^* \notin h(a^*) = y$ となり矛盾である．

一方 $a^* \notin y$ としても，y の定義から，$a^* \in h(a^*) = y$ となってしまい矛盾である．

❑ (補題 34)

定理 35 （カントル–ベルンシュタインの同値定理）A と C を集合として，$g : A \to C$ と $h : C \to A$ を単射とする．このとき，A から C への全単射が存在する．

証明. この定理は選択公理を用いずに証明できるのであるが[35]，その証明は多少やっかいなものになる．ここでは，それと比べてずっと簡単な選択公理を用いた証明を与えておく．

$C' = g''A$ として，R' を C' 上の整列順序とする．R'' を $C \setminus C'$ 上の整列順序として，

$$< \;=\; R' \cup R'' \cup \{\langle c', c''\rangle : c' \in C',\, c'' \in C \setminus C'\}$$

とすると，$<$ は C 上の整列順序になり（演習!），C' は $<$ に関して C の始片となる．したがって，$\pi : \langle C, <\rangle \overset{\cong}{\to} \langle \alpha, \in\rangle$ をモストフスキー写像とすると，$\beta = \pi''C'$ は α の始片となるから，$\beta \leq \alpha$ である．$\pi \circ g : A \to \beta$ は全単射だから，$|A| \leq \beta$ となる．したがって，$|A| \leq |C|$ である[36]．h を用いて同様に議論すると $|C| \leq |A|$ がわかるから，$|A| = |C|$ である．したがって，$j : A \to |A|$ と，$k : C \to |C|$ をそれぞれ全単射とすると，$f = k^{-1} \circ j$ は A から C への全単射となる．

❑ (定理 35)

[34] $2 = \{0, 1\}$ で ${}^{x}2 = \{f : f : x \to 2\}$ だった．

[35] 現代集合論では，選択公理を満たさない集合論のモデルを考察する必要も出てくるので，実は，この事実は重要である．

[36] ここで “$\leq$” は Card 上の線型順序となっていることが用いられている．

補題 36 (a)　自然数はすべて基数である．最小の無限順序数 ω は基数である．

(b)　すべての無限基数は，極限順序数である．

(c)　M が基数の集合なら，$\sup M$ $(=\bigcup M)$ は基数である．

証明.　(a) 基数でない自然数があったとして，そのようなもののうち最小な n をとる．このとき $m < n$ で上射 $f : m \to n$ の存在するものがとれる．$m < n$ により $n \neq 0$ だから，$n = n' \cup \{n'\}$ となる $n' < n$ がとれる．また，上射 $f : m \to n$ の存在により，$m \neq 0$ だから，同様に $m = m' \cup \{m'\}$ となる $m' < m$ がとれる．必要なら f の 2 個所での値を変更することで，$f(m') = n'$ となっているとしてよい．このとき，$f' : m' \to n'$ を

$$f'(k) = \begin{cases} f(k) & f(k) < m' \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

と定義すると，f' は m' から n' への上射となるが，$m' < n' < n$ だから，これは n の最小性に矛盾である．

もしも ω が基数でなかったとすれば，ある自然数 n で上射 $f : n \to \omega$ の存在するようなものがとれる．$\ell < n$ に対し，$f'(\ell) = \min\{n, f(\ell)\}$ として $f' : n \to n+1$ を定義すると f' は上射となるが，これは，ここでの証明の前半に矛盾である．

(b): α を無限順序数とする（つまり $\omega \leq \alpha$）．このとき $\alpha + 1$ から α への写像 f を

$$f(\beta) = \begin{cases} \beta + 1 & \beta < \omega \text{ のとき} \\ \beta & \omega \leq \beta < \alpha \text{ のとき} \\ \alpha & \beta = \alpha \text{ のとき} \end{cases}$$

と定義すると，f は全単射となる．したがって $\alpha + 1$ は基数ではない．

(c): M が最大元 κ^* を持つときは $\bigcup M = \kappa^*$ となるから，主張は明らかに成り立つ．M が最大元を持たないとする．$\bigcup M$ が順序数であることは補題 31 (f) によりよいから，$\bigcup M$ が基数でなかったとすると，ある基数 $\kappa < \bigcup M$ で，上射 $f : \kappa \to \bigcup M$ の存在するものがある．$\kappa < \lambda$ となる $\lambda \in M$ をとると $\lambda \leq \bigcup M$ だから，$f' : \kappa \to \lambda$ を

$$f'(\alpha) = \begin{cases} f(\alpha) & f(\alpha) < \lambda \text{ のとき} \\ 0 & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

とすると，f' は上射となる．ところが $\lambda \in M$ により λ は基数だから，これは矛盾である．

□ (補題 36)

次の補題は基数の定義から明らかである：

補題 37 x, y を集合として，$x \neq \emptyset$ とする．

(a)　$|\,x\,| = |\,y\,|$ となるのは，全単射 $f : x \to y$ が存在する，ちょうどそのときである．

(b)　以下は同値である：

(i)　$|\,x\,| \leq |\,y\,|$

(ii)　単射 $f : x \to y$ が存在する

(iii)　上射 $g : y \to x$ が存在する．

すべての基数 κ に対し，基数 μ で $\kappa < \mu$ となるものが存在する： x を $|x| = \kappa$ となる集合とする（たとえば $x = \kappa$ とすればよい）．補題 34 と補題 37 により，$\kappa = |x| < |\mathcal{P}(x)|$ となるから，

$$\kappa^+ = \min\{\mu \in \mathrm{Card} : \kappa < \mu\}$$

が定義できる．κ^+ は基数 κ の次の基数である．次の関数 $\aleph : \mathrm{On} \to \mathrm{On}$ は[37]無限基数を小さい順に枚挙する[38].

$$\begin{aligned}
&\aleph(0) = \omega \\
&\aleph(\alpha+1) = (\aleph(\alpha))^+ \\
&\aleph(\lambda) = \sup\{\aleph(\alpha) : \alpha < \lambda\}, \qquad \lambda \text{ が極限順序数のとき．}
\end{aligned}$$

$\alpha \in \mathrm{On}$ に対し，$\aleph(\alpha)$ のことを $\aleph_\alpha$ と書く．$\aleph_\alpha$ が順序数であることを強調したいときには，ω_α という書き方もすることにする．アレフ関数は真に増加的である．したがって Card は真のクラスとなる．すべての無限基数 κ は $\aleph_\alpha$ という形をしていて，このような $\alpha \in \mathrm{On}$ は一意に決まる：そうでないとすると $\mu = \min(\mathrm{Card} \setminus (\{\aleph_\alpha : \alpha \in \mathrm{On}\}) \cup \omega)$. がとれるが，$\aleph_\alpha, \alpha \in \mathrm{On}$ は基数を小さい順にすきまなくならべているのだから，すべての α に対し $\aleph_\alpha < \mu$ が成り立つ．したがって $\{\xi \in \mathrm{On} : \xi < \mu\} \supseteq \{\aleph_\alpha : \alpha \in \mathrm{On}\}$ は集合となってしまうが，これは矛盾である．よって，

$$\mathrm{Card} \setminus \omega = \{\aleph_\alpha : \alpha \in \mathrm{On}\}$$

である．

$|X| \leq \aleph_0$ となるような集合を**可算集合** (countable set) とよぶ．$|X| = \aleph_0$ のとき，X が無限集合であることを強調したいときには，**可算無限**という言い方をすることもある．$|X| > \aleph_0$ のとき X は不可算である[39]

α が非極限順序数で，$\kappa = \aleph_\alpha$ のとき，(つまり，$\alpha = \beta + 1$ となる β があり，$\kappa = (\aleph_\beta)^+$ のとき） κ を**非極限基数** (successor cardinal) とよぶ．また α が極限順序数で，$\kappa = \aleph_\alpha$ となるとき，κ を**極限基数** (limit cardinal) とよぶ.

2.5 基数算術入門

κ と λ を基数とするとき，$\kappa + \lambda, \kappa \cdot \lambda, \kappa^\lambda$ を次のように定義する．集合 A, B を $|A| = \kappa$, $|B| = \lambda$ となるようにとる．ただし $A \cap B = \emptyset$ となるようにしておく[40]．このとき，

$$\kappa + \lambda = |A \cup B|, \quad \kappa \cdot \lambda = |A \times B|, \quad \kappa^\lambda = |{}^B A|$$

[37] $\aleph$ （アレフ）はヘブライ語の最初のアルファベットである．ただし某宗教団体とは何の関係もない．念のため.

[38] 本稿では，関数の帰納的定義では，集合上の関数を扱いクラス上の関数については触れなかったが，実は On 上のクラス関数についても同様に定義することができる．クラス関数は，ZFC の立場では関数を規定する論理式にほかならないが，帰納的定義を与える論理式が，クラス関数を一意に指定するものになっていることは，定理 25 とまったく同様に示せる.

[39] 日本語の文献では,「非可算」という言い方の方が普通である.「不可算」という言い方は，愛媛大学の藤田博司氏の提唱による.

[40] たとえば，$A = \kappa \times \{0\}$, $B = \lambda \times \{1\}$ とすればよい.

とする．これらの定義が A と B のとりかたに依存しない: つまり，$|A| = |A'|, |B| = |B'|$ なら，$|A \cup B| = |A' \cup B'|$ （ただし，この場合には特に $A \cap B = A' \cap B' = \emptyset$ となっているとする），$|A \times B| = |A' \times B'|, |{}^{B}A| = |{}^{B'}A'|$ が成り立つことが（容易に）示せる．

$f \in {}^{\lambda}2$ に $f^{-1}{}''\{1\} \in \mathcal{P}(\lambda)$ を対応させる写像は全単射となる．したがって $|\mathcal{P}(\lambda)| = |{}^{\lambda}2| = 2^{\lambda}$ となる．

次は上の定義からただちに導ける：

補題 38 κ, λ, μ を基数とする．このとき：

(a) $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa, \quad \kappa \cdot \lambda = \lambda \cdot \kappa$

(b) $(\kappa + \lambda) + \mu = \kappa + (\lambda + \mu), \quad (\kappa \cdot \lambda) \cdot \mu = \kappa \cdot (\lambda \cdot \mu)$

(c) $\kappa \cdot (\lambda + \mu) = \kappa \cdot \lambda + \kappa \cdot \mu$

(d) $(\kappa \cdot \lambda)^{\mu} = \kappa^{\mu} \cdot \lambda^{\mu}$

(e) $\kappa^{\lambda + \mu} = \kappa^{\lambda} \cdot \kappa^{\mu}$

(f) $(\kappa^{\lambda})^{\mu} = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$

(g) $\kappa \leq \kappa', \lambda \leq \lambda'$; ($\kappa', \lambda'$ は基数), とするとき，

$$\kappa + \lambda \leq \kappa' + \lambda', \quad \kappa \cdot \lambda \leq \kappa' \cdot \lambda', \quad \kappa^{\lambda} \leq \kappa'^{\lambda'}$$

$\alpha, \beta \in \mathrm{On}$ に対し，$\max(\alpha, \beta)$ で α と β のうち大きいほうをあらわすことにする．$\mathrm{On}^2 = \mathrm{On} \times \mathrm{On}$ 上の半順序 $<$ を次のように定義する：

$$\begin{aligned}(\alpha, \beta) < (\gamma, \delta) \ \Leftrightarrow\ & \max(\alpha, \beta) < \max(\gamma, \delta) \\ & \text{または} \Big(\max(\alpha, \beta) = \max(\gamma, \delta) \ \text{かつ} \ \alpha < \gamma \Big) \\ & \text{または} \Big(\max(\alpha, \beta) = \max(\gamma, \delta) \ \text{かつ} \ \alpha = \gamma \ \text{かつ} \ \beta < \delta \Big).\end{aligned}$$

このとき，

補題 39 $<$ は On^2 上の整列順序となる．

証明. $<$ が線型順序になることは容易に示せる．

$X \subseteq \mathrm{On}^2$ が空でないとき，X が $<$ に関する最小元を持つことを示す．まず，$\alpha_1 = \min\{\max\{\alpha, \beta\} : (\alpha, \beta) \in X\}$ として $X_1 = \{(\alpha, \beta) \in X : \max\{\alpha, \beta\} = \alpha_1\}$ とする．$\alpha_2 = \min\{\alpha :$ ある β に対し $(\alpha, \beta) \in X_1\}$ として，$X_2 = \{(\alpha, \beta) \in X_1 : \alpha = \alpha_2\}$ とする．さらに，$\alpha_3 = \min\{\beta : (\alpha_2, \beta) \in X_2\}$ とする．このとき，$<$ の定義から，(α_2, α_3) は X の最小元となる． □ (補題 39)

$(\mathrm{On}, \in)$ と $(\mathrm{On}^2, <)$ は両方とも整列順序となっている真のクラスだから，定理 23 と同様の議論により，順序同型

$$K : (\mathrm{On}^2, <) \to (\mathrm{On}, \in)$$

が一意に存在することがわかる．

補題 40 すべての $\nu \in \mathrm{On}$ に対し，$\nu \times \nu$ は On^2 の $<$ に関する真の始片で，$\nu \times \nu = \{(\alpha, \beta) : (\alpha, \beta) < (0, \nu)\}$ となる．

証明.　$(\alpha,\beta)\in\nu\times\nu$ で $(\xi,\eta)<(\alpha,\beta)$ とすると，$\max\{\xi,\eta\}\le\max\{\alpha,\beta\}<\nu$ だから，$(\xi,\eta)\in\nu\times\nu$ となる．したがって，$\nu\times\nu$ は On^2 の $<$ に関する真の始片である．$<$ の定義から，$(0,\nu)$ が $\mathrm{On}^2\setminus\nu\times\nu$ の最小元となることは明らかである．　□ (補題 40)

上の補題により，$K''\nu\times\nu$ は $(\mathrm{On},\in)$ の真の始片となる，したがって，On の元となることがわかる．

補題 41 (a)　すべての $n,\, m\in\omega$ に対し，$K((m,n))<\omega$ となる．

(b)　すべての無限基数 κ に対し $K((0,\kappa))=\kappa$ となる．

(c)　すべての無限基数 κ に対し $\kappa\cdot\kappa=\kappa$ が成り立つ．

証明.　(a): $k=\max\{m,n\}+1$ とすると，$(m,n)<(0,k)$ となる．補題 40 により，$\{(\alpha,\beta):(\alpha,\beta)<(0,k)\}=k\times k$ となるから，$|\,k\times k\,|<\omega$ により，$K((m,n))<K((0,k))<\omega$ である．

(b) と (c): $\kappa\in\mathrm{Card},\,\kappa\ge\aleph_0$ に関する帰納法により示す．$\kappa=\aleph_0$ のときには，補題 40 と (a) により $K((0,\omega))=\{K((m,n)):m,n\in\omega\}=\omega$ となるから，(b) が成り立つことがわかる．したがって，$K\restriction\omega\times\omega$ は $\omega\times\omega$ から ω への全単射となる．よって $\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$ がわかる．

すべての基数 $\lambda<\kappa$ に対し，(b) と (c) が成り立つと仮定して，κ に対しても (b) と (c) が成り立つことを示す．$|\,\kappa\times\kappa\,|\ge\kappa$ だから，$K((0,\kappa))=K''\kappa\times\kappa\ge\kappa$ である．一方，帰納法の仮定から，すべての $\alpha<\kappa$ に対し，$|\,\alpha\times\alpha\,|=|\,\alpha\,|<\kappa$ となる．したがって，$K((0,\alpha))<\kappa$ である．$(0,\kappa)$ は $(0,\alpha),\,\alpha<\kappa$ の極限となっているから，$K((0,\kappa))\le\kappa$ がわかる．このことから，$\kappa=\aleph_0$ の場合と同様に，$K\restriction\kappa\times\kappa$ は $\kappa\times\kappa$ から κ への全単射となることがわかるから，$\kappa\cdot\kappa=\kappa$ が帰結できる．　□ (補題 41)

定理 42 (a)　$\kappa,\,\lambda$ を $\kappa\ge\omega$ または $\lambda\ge\omega$ となるような基数とする．このとき，$\kappa+\lambda=\max\{\kappa,\lambda\}$ となる．もし $\kappa,\,\lambda\ne 0$ なら，$\kappa\cdot\lambda=\max\{\kappa,\lambda\}$ である．

(b)　$\kappa,\,\lambda$ を無限基数とする．$|\,X\,|\le\kappa$ で，すべての $x\in X$ に対して $|\,x\,|\le\lambda$ となるとき，$|\bigcup X\,|\le\max\{\kappa,\lambda\}$ が成り立つ．

証明.　(a): κ か λ のどちらかが 0 のときは，定理の前半は明らかである．そこで $\kappa\ne 0$, $\lambda\ne 0$ とする．このとき $(\kappa\times\{0\})\cup(\lambda\times\{1\})$ から $\kappa\times\lambda$ への単射が容易に定義できるから，$\kappa+\lambda\le\kappa\cdot\lambda$ となることがわかる．ところが，$\mu=\max\{\kappa,\lambda\}$ とすると，補題 41 により，

$$\mu\le\kappa+\lambda\le\kappa\cdot\lambda\le\mu\cdot\mu=\mu$$

となるから定理の主張が実際に成り立っていることがわかる．

(b): $X=\emptyset$ のときには，主張は明らかである．そうでないときには，$|\,X\,|\le\kappa$ により，$X=\{x_\alpha:\alpha<\kappa\}$ と枚挙できる[41]．一般性を失うことなく．すべての x_α は空でない，としてよい．すべての $\alpha<\kappa$ に対し，$|\,x_\alpha\,|\le\lambda$ により，$x_\alpha=\{a_{\alpha,\beta}:\beta<\lambda\}$ と枚挙できる．ここで $g:\kappa\times\lambda\to\bigcup X$ を $g((\alpha,\beta))=a_{\alpha,\beta}$ により定義すると g は上射となるから，補題 37 (b) と (a) により $|\bigcup X\,|\le\kappa\cdot\lambda=\max\{\kappa,\lambda\}$ である．　□ (定理 42)

[41]補題 37 (b) により κ から X への上射 f が存在するから，$x_\alpha=f(\alpha)$ とすればよい．

系 43 κ, μ を $2 \le \mu \le 2^\kappa$, $\omega \le \kappa$ となるような基数とするとき，$\mu^\kappa = 2^\kappa$ となる．特に，$\kappa^\kappa = 2^\kappa$ である．

証明． $2^\kappa \le \mu^\kappa \le (2^\kappa)^\kappa = |\, 2^{\kappa\times\kappa} \,| = 2^{\kappa\cdot\kappa} = 2^\kappa$ によりよい．最後の等式は補題 41 (c) による． □ (系 43)

以上により，無限基数の足し算とかけ算 $\kappa + \lambda$, $\kappa \cdot \lambda$ については完全にわかったと言えるが，基数の冪乗 κ^λ については，多くの問題が残されている．これについては，連続体仮説（第 3.2 節 を参照）のように，普通の集合論の範囲で決定できない問題も数多く存在する．

なお，基数算術に関しては，Saharon Shelah による最近の研究により，多くの深い結果が得られている．Shelah の基数算術の理論の入門書としては，[8] がある．

2.6 共終数

$\alpha \in \mathrm{On}$ として，$X \subseteq \alpha$ が α で**共終** (cofinal) とは，すべての $\beta < \alpha$ に対し，$\gamma \in X$ で $\beta \le \gamma$ となるものが存在することである．α の共終数 $\mathrm{cf}(\alpha)$ を，

$$\mathrm{cf}(\alpha) = \min\{|\, X \,| : X \subseteq \alpha,\ X \text{ は } \alpha \text{ で共終}\}$$

と定義する．

補題 44 すべての $\kappa \in \mathrm{Card}$ に対し，$\mathrm{cf}(\kappa^+) = \kappa^+$ となる．

証明． $X \subseteq \kappa^+$ が κ^+ で共終とすると，すべての $\beta \in X$ に対し，$|\,\beta\,| \le \kappa$ となるから，もし $|\,X\,| \le \kappa$ とすると，定理 42 (b) により，$\kappa^+ = |\,\kappa^+\,| = |\bigcup X\,| \le \kappa \times \kappa = \kappa$ となり矛盾である． □ (補題 44)

基数 κ が，$\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$ を満たすとき κ は**正則** (regular) であるという．補題 44 により，非極限基数はすべて正則基数である．これに対し，正則な極限基数の存在は ZFC では証明できない．

たとえば，$\mathrm{cf}(\aleph_\omega) = \omega$ である：$\{\aleph_n : n \in \omega\}$ が $\aleph_\omega$ で共終になるからである．

次の定理はカントルの定理（補題 34 の後半）の拡張となっている：

定理 45 （König の定理） κ を任意の基数とするとき，$\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} > \kappa$ が成り立つ．

証明． $\{f_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq {}^{\mathrm{cf}(\kappa)}\kappa$ とするとき，つねに $f \in {}^{\mathrm{cf}(\kappa)}\kappa \setminus \{f_\alpha : \alpha < \kappa\}$ がとれることを示せばよい．

$\{\alpha_\xi : \xi < \mathrm{cf}(\kappa)\} \subseteq \kappa$ を κ で共終とする．このとき，$f : \mathrm{cf}(\kappa) \to \kappa$ を，

$$f(\xi) = \min(\kappa \setminus \{f_\alpha(\xi) : \alpha < \alpha_\xi\})$$

で定義する．$|\,\{f_\alpha(\xi) : \alpha < \alpha_\xi\}\,| < \kappa$ だから，$\kappa \setminus \{f_\alpha(\xi) : \alpha < \alpha_\xi\} \ne \emptyset$ となり，この定義は可能である．すべての $\alpha < \kappa$ に対し，$f \ne f_\alpha$ である：$\alpha < \alpha_\xi$ となる $\xi < \mathrm{cf}(\kappa)$ がとれるが，f の定義から $f(\xi) \ne f_\alpha(\xi)$ となるからである．したがって証明が完了した． □ (定理 45)

定理 46 (König) すべての基数 κ に対し，$\mathrm{cf}(2^\kappa) > \kappa$ が成り立つ．

証明. $|{}^{\kappa}(2^{\kappa})| = 2^{\kappa}$ だから，X_{α}, $\alpha < \kappa$ で，すべての $\alpha < \kappa$ に対し，$|X_{\alpha}| < 2^{\kappa}$ かつ ${}^{\kappa}(2^{\kappa}) = \bigcup_{\alpha<\kappa} X_{\alpha}$ となるようなものが存在しないことを示せばよい．このようなものがあったとして，$f : \kappa \to 2$ を

$$f(\alpha) = \min(2^{\kappa} \setminus \{f(\alpha) : f \in X_{\alpha}\})$$

により定義する．このとき，すべての $\alpha < \kappa$ に対し，$f \notin X_{\alpha}$ となるから，$f \notin \bigcup_{\alpha<\kappa} X_{\alpha}$ となるが，これは X_{α} のとり方に矛盾である． □ (定理 46)

3　実数の集合論の古典的理論から

順序数 α は $<$ ($=\in$) に関して整列順序集合となっているから，この順序に関して関数の帰納的定義に関する定理 25 やそれの特殊化である定理 $25'$ が成り立つ．これにより基数上の関数を帰納的に定義することができる．

本章では，主にこのことの応用によって扱かうことのできる実数の集合論の古典的理論[42]からのいくつかの話題について触れる．

3.1　ボレル集合族

ボレル集合の全体の集合族の構成的導入については第 1.2 節で述べたが，これについてもう一度詳しく見てみることにする．以下の議論は一般の位相空間で成り立つが，簡単のためにカントル空間 ${}^{\omega}2$ で考えることにする．ω_1 上の関数 B を次を満たすものとする：

$B(0)=\{O : O$ は ${}^{\omega}2$ の開集合 $\}$;
$B(\alpha+1)=\{\bigcup Y : Y\subseteq S$ で Y は可算 $\}$,
　　ただし，$S=B(\alpha)\cup\{{}^{\omega}2\setminus x : x\in B(\alpha)\}$ とする;
$\gamma<\omega_1$ が極限順序数のときは，$B(\gamma)=\bigcup_{\alpha<\gamma}B(\alpha)$.

$\mathcal{B}=\bigcup_{\alpha<\omega_1}B(\alpha)$ とする．

補題 47 (a)　$\mathcal{F}\subseteq\mathcal{P}({}^{\omega}2)$ が ${}^{\omega}2$ のすべての開集合を含む σ-代数 なら $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{F}$ となる．
(b)　$\alpha\leq\beta<\omega_1$ なら $B(\alpha)\subseteq B(\beta)$ が成り立つ．
(c)　$\mathcal{B}=Bor({}^{\omega}2)$.

証明.　(a): $\alpha<\omega_1$ に関する帰納法で，$B(\alpha)\subseteq\mathcal{F}$ を示せばよい：$\alpha=0$ のときは，これは $\mathcal{F}$ がすべての ${}^{\omega}2$ の開集合を含むからよい．$B(\alpha)\subseteq\mathcal{F}$ なら $B(\alpha+1)\subseteq\mathcal{F}$ となることは，$B(\alpha+1)$ の定義と $\mathcal{F}$ が σ-代数であることからよい．$\gamma<\omega_1$ が極限順序数のときには，帰納法の仮定から，すべての $\beta<\gamma$ に対し $B(\beta)\subseteq\mathcal{F}$ なら，$B(\gamma)=\bigcup_{\beta<\gamma}B(\beta)\subseteq\mathcal{F}$ となるからよい．

(b): $\beta<\omega_1$ に関する帰納法で,「すべての $\alpha\leq\beta$ に対し $B(\alpha)\subseteq B(\beta)$ が成り立つ」が示せればよい．$\beta=0$ のときにはこの命題は明らか．$\beta=\alpha+1$ のときには，$B(\alpha+1)$ の定義から，$x\in B(\alpha)$ なら $x=\bigcup\{x\}\in B(\alpha+1)$ である．したがって $B(\alpha)\subseteq B(\alpha+1)$ となるからよい．$\beta<\omega_1$ が極限順序数のときには，$B(\beta)=\bigcup_{\beta'<\beta}B(\beta')$ だからこの命題がすべての $\beta'<\beta$ に対し成り立つときには，β に対しても成り立つことがわかる．

(c): (a) により，$\mathcal{B}$ がすべての ${}^{\omega}2$ の開集合を含み，補集合と可算族の和集合に関して閉じていることが示せればよい．$\mathcal{B}$ がすべての開集合を含んでいることは，$B(0)\subseteq\mathcal{B}$ からよい．

$x\in\mathcal{B}$ とすると，$x\in B(\alpha)$ となる $\alpha<\omega_1$ がとれる．このとき，${}^{\omega}2\setminus x=\bigcup\{{}^{\omega}2\setminus x\}\in B(\alpha+1)\subseteq\mathcal{B}$ となる．

次に $X\subseteq\mathcal{B}$ を可算集合とする．各 $x\in X$ に対し，$r(x)=\min\{\alpha<\omega_1 : x\in B(\alpha)\}$ として，$R=\{r(x) : x\in X\}$ とする．このとき，$R\subseteq\omega_1$ は可算だから，$R\subseteq\alpha^*$ となる $\alpha^*<\omega_1$ がとれる（そうでなければ $\omega_1=\bigcup R$ となり，補題 42 (b) により ω_1 は可算になっ

[42] 3 ページの第 1.1 節 の前を参照．

てしまい矛盾）．(b) と $r(\cdot)$ の定義により，$X \subseteq B(\alpha^*)$ となるから，$\bigcup X \in B(\alpha^*+1) \subseteq \mathcal{B}$ である． $\square$ (補題 47)

補題 48 (a)　$\mathcal{O}$ をカントル空間 ${}^{\omega}2$ の開集合の全体とするとき，$|\mathcal{O}| = 2^{\aleph_0}$ が成り立つ．

(b)　$|Bor({}^{\omega}2)| = 2^{\aleph_0}$ である．

証明.　(a): 3 ページで見たように，$\mathcal{O}$ は $\{[s] : s \in {}^{\omega>}2\}$ から生成される位相である．$|{}^{\omega>}2| = \aleph_0$ だから[43]，${}^{\omega>}2 = \{s_n : n \in \omega\}$ と枚挙できる．これを使って $\varphi : \mathcal{P}(\omega) \to \mathcal{O}$; $x \mapsto \bigcup_{n\in x}[s_n]$ とすれば，φ は上射になるから，$|\mathcal{O}| \leq |\mathcal{P}(\omega)| = 2^{\aleph_0}$ となる．一方，$\psi : {}^{\omega}2 \to \mathcal{O}$; $f \mapsto {}^{\omega}2 \setminus \{f\}$ とすると，ψ は単射だから，$|\mathcal{O}| \geq |{}^{\omega}2| = 2^{\aleph_0}$ である．

(b): $B : \omega_1 \to \mathcal{P}({}^{\omega}2)$ を上で帰納的に定義された写像として，以下で，$\alpha < \omega_1$ に関する帰納法により，$|B(\alpha)| = 2^{\aleph_0}$ を示す．補題 47 により，$Bor({}^{\omega}2) = \bigcup_{\alpha<\omega_1} B(\alpha)$ だから，このことと定理 42 (b) から $|Bor({}^{\omega}2)| \leq 2^{\aleph_0}$ がわかる．一方 (a) により，$2^{\aleph_0} \leq |\mathcal{O}| \leq |Bor({}^{\omega}2)|$ である．

$\alpha = 0$ のときは，(a) により，$|B(0)| = |\mathcal{O}| = 2^{\aleph_0}$ となるからよい．

$|B(\alpha)| = 2^{\aleph_0}$ がすでにわかっているときには，$B(\alpha) \subseteq B(\alpha+1)$ だから，$|B(\alpha+1)| \geq 2^{\aleph_0}$ である．一方 $B' = B(\alpha) \cup \{{}^{\omega}2 \setminus x : x \in B(\alpha)\}$ とすると，$\eta : {}^{\omega}B' \to B(\alpha+1)$; $f \mapsto \bigcup f''\omega$ は上射となるから，$|B(\alpha+1)| \leq |{}^{\omega}B'| \leq (2^{\aleph_0} + 2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ である．

α が極限順序数で，すべての $\beta < \alpha$ に対し $|B(\beta)| = 2^{\aleph_0}$ が成り立っているときには，$B(\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} B(\beta)$ となるから，定理 42 (b) により，$|B(\alpha)| \leq 2^{\aleph_0}$ がわかる．$|B(\alpha)| \geq 2^{\aleph_0}$ は $\mathcal{O} \subseteq B(\alpha)$ により明らか． $\square$ (補題 48)

補題 49 $X \subseteq {}^{\omega}2$ に対し，次は同値である：

(1)　X はボレル集合である；

(2)　ある開集合 $O \subseteq {}^{\omega}2$ と疎集合であるようなボレル集合 M により $X = O \triangle M$ とあらわされる[44]．

(3)　ある開集合 $O \subseteq {}^{\omega}2$ と零集合であるようなボレル集合 N により $X = O \triangle N$ とあらわされる．

証明.　(1) $\Leftrightarrow$ (2) を示す．(1) $\Leftrightarrow$ (3) は同様に示せる．(2) でのような $X = O \triangle M$ がボレル集合となることは明らかである．つまり，

$$B^* = \{O \triangle M : O \subseteq {}^{\omega}2 \text{ は開集合で } M \subseteq {}^{\omega}2 \text{ は疎集合となるようなボレル集合}\}$$

として，$B^* \subseteq Bor({}^{\omega}2)$ だから，B^* が σ-代数となることを示せばよい．

$X_n \in B^*$, $n \in \omega$ とする，たとえば，$X_n = (O_n \setminus M_n^0) \cup M_n^1$, $n \in \omega$ とする．ここに，$M_n^0 \subseteq O_n$, $M_n^1 \subseteq {}^{\omega}2 \setminus O_n$ で両方とも疎集合となるようなボレル集合とする[45]．このとき，

$$\bigcup_{n\in\omega} X_n = \Big(\bigcup_{n\in\omega} O_n \setminus \bigcap_{n\in\omega} M_n^0\Big) \cup \Big(\bigcup_{n\in\omega} M_n^1\Big)$$

となるから，$\bigcup_{n\in\omega} X_n \in B^*$ がわかる．

[43] ${}^{\omega>}2 = \bigcup\{{}^{n}2 : n \in \omega\}$ だから，定理 42 (b) により $|{}^{\omega>}2| \leq \aleph_0$ がわかる．$|{}^{\omega>}2| \geq \aleph_0$ は明らかである．

[44] 集合 A, B に対し，$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ とする．

[45] $X_n = O_n \triangle (M_n^0 \cup M_n^1)$ となることに注意．

また $X \in B^*$ で，$X = (O \setminus M^0) \cup M^1$ とする．ただし，$M^0 \subseteq O$, $M^1 \subseteq {}^\omega 2 \setminus O$ で両方とも疎集合となるようなボレル集合とする．このとき，

$$X = \Big(cl(O) \setminus \Big(M^0 \cup (cl(O \setminus O))\Big)\Big) \cup M^1$$

だから，

$${}^\omega 2 \setminus X = \Big(({}^\omega 2 \setminus cl(O)) \setminus M^1\Big) \cup \Big(M^0 \cup (cl(O) \setminus O)\Big)$$

となる．このとき，${}^\omega 2 \setminus cl(O)$ は開集合で，M^1 も $M^0 \cup (cl(O) \setminus O)$ も疎集合となるようなボレル集合だから，${}^\omega 2 \setminus X \in B^*$ がわかる． ❑ (補題 49)

3.2 連続体仮説 CH のもとでの帰納的構成

補題 34 により $\kappa < 2^\kappa$ となる．特に $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$ であるが，第 1.1 節で見たように $\mathbb{R}$ と ${}^\omega 2$ とはほとんど位相同型になり，このことから $|\,\mathbb{R}\,| = |\,{}^\omega 2\,| = 2^{\aleph_0}$ となることがわかる．**連続体仮説** (Continuum Hypothesis — 略して CH) は $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ となることを主張する命題である．今日ではこの命題は集合論の公理系 (ZFC) から独立である（つまり ZFC から証明できないし，その否定も証明できない）ことが知られている．ちなみに，集合論の専門家の間では，連続体仮説は正しくない公理である，つまり連続体仮説の否定の方が本当らしい，と考える人が多いと思う[46].

$|\,\mathbb{R}\,| = 2^{\aleph_0}$ だから，連続体仮説は $\mathbb{R}$ を $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ と枚挙できる，という主張と同値である．このことを使うと連続体仮説の仮定のもとで様々な興味深い命題を証明することができる．

定理 50 (Sierpiński) 次の命題は連続体仮説 (CH) と同値である：
実平面 $\mathbb{R}^2$ の分割 $\mathbb{R}^2 = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ で，

(i) すべての $x \in \mathbb{R}$ に対し，$A \cap (\{x\} \times \mathbb{R})$ は可算となり，

(ii) すべての $y \in \mathbb{R}$ に対し $B \cap (\mathbb{R} \times \{y\})$ は可算となる

ようなものが存在する．

証明. CH が成り立つとして，$\mathbb{R} = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ とする．このとき，$A = \{(x_\alpha, x_\beta) : \alpha, \beta \in \omega_1, \alpha > \beta\}$, $B = \{(x_\alpha, x_\beta) : \alpha, \beta \in \omega_1, \alpha \leq \beta\}$ とすれば，$\mathbb{R}^2 = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ となるが，A, B は定理の (i), (ii) を満たす: $x \in \mathbb{R}$ とすると，$x = x_{\alpha^*}$ となる $\alpha^* < \omega_1$ がとれるが，このとき $A \cap (\{x\} \times \mathbb{R}) = \{(x_{\alpha^*}, x_\beta) : \beta < \alpha^*\}$ となるから，$|\,A \cap (\{x\} \times \mathbb{R})\,| \leq |\,\alpha^*\,| \leq \aleph_0$ となる．同様にして $|\,B \cap (\mathbb{R} \times \{y\})\,| \leq \aleph_0$ も示せる．

次に $\neg$CH として，$\mathbb{R}^2 = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ とする．A が (i) を満たすとして，$r_\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha < \omega_1$ を互いに異なるものとする．このとき，

$$\begin{aligned} C &= \{x \in \mathbb{R} : \text{ある } \alpha < \omega_1 \text{ に対し } \langle r_\alpha, x \rangle \in A\} \\ &= \bigcup \Big(A \cap (\{r_\alpha\} \times \mathbb{R})\Big) \end{aligned}$$

の濃度は，高々 $\leq \aleph_1$ である．したがって，仮定により $\mathbb{R} \setminus C$ は空でないから，$x^* \in \mathbb{R} \setminus C$ がとれるが，$\{(x_\alpha, x^*) : \alpha < \omega_1\} \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus A = B$ となるから $(\mathbb{R} \times \{x^*\}) \cap B$ は不可算であ

[46] このへんの事情については，[5] の解説も参照．

る． □ (定理 50)

次の定理は定理 50 の興味深い応用となっている．

定理 51 (Sierpiński [13]) 連続体仮説 (CH) を仮定する．このとき，関数 $f : [0,1]^2 \to [0,1]$ で，積分 $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy$ および $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx$ は存在するが，それらの値が等しくならないようなものがとれる．

証明. $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ を定理 50 でのようにとり，f を B の特性関数とする．$y \in [0,1]$ に対し，$\{x \in [0,1] : f(x,y) \neq 0\} = B \cap ([0,1] \times \{y\})$ は高々可算である．したがって，

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 0\,dy = 0.$$

となる．同様に，各 $x \in [0,1]$ に対し，$\{y \in [0,1] : f(x,y) \neq 1\} = A \cap (\{x\} \times [0,1])$ は高々可算だから，

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1 1\,dy = 1.$$

となる．よって，$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy$ である． □ (定理 51)

Tonelli の定理により，f が可測なら，$\iint f\,dxdy$ と $\iint f\,dydx$ は両方とも存在する場合には等しくなる．上の定理は，CH のもとでは，Tonelli の定理での f の可測性の条件が落とせないことを示している．定理 51 の命題は，連続体仮説の否定 $\neg$CH の下ではその真偽は決まらないことが知られている：

定理 52 (Laczkovich, Friedman, Freiling[47]) ZFC のモデル M で，すべての M での関数 $f : [0,1]^2 \to [0,1]$ に対し，M で，$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy$ と $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx$ が 存在するときにはこれらが（M で） 等しくなるようなものがとれる．

一方，定理 51 の命題が連続体仮説の否定のもとで成立するような状況は簡単に作りだすことができる．定理 51 の証明は，

[47] [3] の文献表を参照．

1. $\mathbb{R}$ の分割 $\mathbb{R} = A \cup B$ で，
   (i) すべての $s \in \mathbb{R}$ に対し，$|\,A \cap (\{x\} \times \mathbb{R})\,| < 2^{\aleph_0}$ となり，
   (ii) すべての $y \in \mathbb{R}$ に対し，$|\,B \cap (\mathbb{R} \times \{y\})\,| < 2^{\aleph_0}$ となる
   ようなものが存在する．

2. 濃度 $2^{\aleph_0}$ 末満の $\mathbb{R}$ の部分集合は，すべて零集合である．

が成り立てば，同様に行うことができる．ここで，1. は ZFC で証明できる命題である: $\mathbb{R} = \{x_\alpha : \alpha < 2^\omega\}$ と枚挙して 定理 50 と同様に証明すればよい．2. は他の講義で導入されることになる用語で言えば，$non(\mathcal{N}) = 2^{\aleph_0}$ ということであるが，これは，例えば，マーティンの公理 (Martin's Axiom) のもとで成立する．

連続体仮説の特徴付けは，定理 50 以外にも色々と知られている．ここでは，次のような，より数学的（？）な特徴付けを与えておく．なお筆者はこの定理を，[1] で学んだ．

定理 53 (Erdős [4]) 次の命題は連続体仮説 (CH) と同値である：
analytic functions の非可算な族 $\mathcal{F}$ で，すべての $z \in \mathbb{C}$ に対し，$\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ が可算になるようなものが存在する．

証明． まず，CH の否定を仮定する．$\mathcal{F}$ を analytic functions の非可算族とするとき，$z \in \mathbb{C}$ で $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ が非可算になるようなものが必ず存在することを示す．$f_\alpha, \alpha < \omega_1$ を $\mathcal{F}$ の互いに異なる元とする．$\{\alpha, \beta\} \in [\omega_1]^2$ に対し，$S_{\alpha,\beta} = \{z \in \mathbb{C} : f_\alpha(z) = f_\beta(z)\}$ とすれば，$S_{\alpha,\beta}$ は可算となる [f, g を異なる analytic functions として，C を $\mathbb{C}$ の 0 の回りのある一定の半径の円盤とすると $\{z \in C : f(z) = g(z)\}$ は有限である — マクローリン展開を比較すればわかる]．したがって，仮定から， $S = \mathbb{C} \setminus \bigcup\{S_{\alpha,\beta} : \{\alpha, \beta\} \in [\omega_1]^2\}$ とすれば $S \neq \emptyset$ となる．$z^* \in S$ とすれば，$f_\alpha(z^*), \alpha < \omega_1$ は互いに異なるから，$\{f(z^*) : f \in \mathcal{F}\}$ は非可算になることがわかる．

次に，CH を仮定して，非可算な analytic functions の族 $\mathcal{F}$ で，どの $z \in \mathbb{C}$ に対しても $\{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$ が可算になるようなものが存在することを示す．$\mathbb{C} = \{v_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ として，analytic functions の列 $f_\alpha, \alpha < \omega_1$ を次を満たすように構成する：

(∗) すべての $\beta < \alpha$ に対し，$f_\alpha \neq f_\beta$ で，$f_\alpha(v_\beta)$ は（複素）有理数.

これが可能であることは次のようにしてわかる: $f_\beta, \beta < \alpha$ が構成されたとき，$\{v_\beta : \beta < \alpha\}$ を $\{w_n : n \in \omega\}$ と枚挙しなおす．これは $\alpha < \omega_1$ により可能である．複素有理数 $\varepsilon_n > 0$, $n \in \omega$ を十分に早く 0 に収束するように適当にとって，

$$f_\alpha(z) = \varepsilon_0(z - w_0) + \varepsilon_1(z - w_0)(z - w_1) + \varepsilon_2(z - w_0)(z - w_1)(z - w_2) + \cdots$$

と定義することにより (∗) を満たすような f_α が構成できる．$\mathcal{F} = \{f_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ とすれば，$\mathcal{F}$ は求めるようなものとなっている． ❑ (定理 53)

3.3 双対性定理

次の定理は，連続体仮説のもとで，疎集合の σ-イデアルと零集合の σ-イデアルの間には強い双対性が成り立っていることを主張している．特にこの定理での f で移すことにより，疎集合の性質は対応する零集合の性質に翻訳され，逆も真である．

定理 54 (Erdős-Sierpiński Duality Theorem) 連続体仮説を仮定する．このとき $f: {}^{\omega}2 \to {}^{\omega}2$ で，次を満たすものが存在する：

(1) $f \circ f = id_{({}^{\omega}2)}$ （特に f は全単射）；

(2) すべての $X \in \mathcal{P}({}^{\omega}2)$ に対し，$X \in \mathcal{M} \Leftrightarrow f''X \in \mathcal{N}$.

証明. 補題 13 により，$X^* \subseteq {}^{\omega}2$ で，$X^* \in \mathcal{M}$ かつ ${}^{\omega}2 \setminus x^* \in \mathcal{N}$ となるようなものがとれる．$\mathcal{M} \cap Bor({}^{\omega}2)$ は $\mathcal{M}$ を生成する（命題 7）が，補題 48 (b) により，$|\,Bor({}^{\omega}2)\,| = 2^{\aleph_0}$ で，仮定から $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ だから，$\mathcal{N}$ を生成する $\{X_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ がとれる．$X_0 = X^*$ としてよい．ここで $\varphi: \omega_1 \to \omega_1$ を

$$\varphi(\alpha) = \min\{\eta < \omega_1 \,:\, \Big(\bigcup_{\xi<\eta} X_\xi\Big) \setminus \Big(\bigcup\{X_\xi \,:\, \xi < \sup_{\beta<\alpha} \varphi(\beta)\}\Big) \text{ は濃度 } 2^{\aleph_0}\}$$

により帰納的に定義する．この定義が可能であることは次のようにしてわかる: $\varphi(\beta), \beta < \alpha$ がすでに定義されたとき，$\{X_\xi \,:\, \xi < \sup_{\beta<\alpha} \varphi(\beta)\}$ は疎集合の可算な族だから，$\bigcup\{X_\xi \,:\, \xi < \sup_{\beta<\alpha} \varphi(\beta)\}$ はふたたび疎集合となる．したがってベールのカテゴリー定理（系 4 の下の注を参照） により，${}^{\omega}2 \setminus \bigcup\{X_\xi \,:\, \xi < \sup_{\beta<\alpha} \varphi(\beta)\}$ は濃度 $2^{\aleph_0}$ を持つ，この集合の部分集合で，疎集合となり濃度が $2^{\aleph_0}$ となるような X^* をとれば，$X_\alpha, \alpha < \omega_1$ が $\mathcal{M}$ を生成することから，$X \subseteq X_{\xi^*}$ となるような，$\xi^* < \omega_1$ がとれる．このとき $\eta^* = \xi^* + 1$ は $\varphi(\alpha)$ の定義での $\{\eta < \omega_1 \,:\, \ldots\}$ の 1 つの元となっている．したがって，$\min\{\eta < \omega_1 \,:\, \ldots\}$ は存在する．

各 $\alpha < \omega_1$ に対し，

$$Y_\alpha = \Big(\bigcup_{\xi<\varphi(\alpha)} X_\xi\Big) \setminus \Big(\bigcup\{X_\xi \,:\, \xi < \sup_{\beta<\alpha} \varphi(\beta)\}\Big)$$

とすると，$Y_0 = X_0 = X^*$ で，$\{Y_\alpha \,:\, \alpha < \omega_1\}$ は濃度 $2^{\aleph_0}$ の疎集合からなる ${}^{\omega}2$ の分割となることに注意する．定義から，$\beta < \omega_1$ に対し，$\bigcup_{\alpha<\beta} Y_\alpha = \bigcup_{\xi<\varphi(\beta)} X_\xi$ となる．

Claim 54.1 すべての疎集合 $X \subseteq {}^{\omega}2$ に対し，$\beta < \omega_1$ で $X \subseteq \bigcup_{\alpha<\beta} Y_\alpha$ となるものが存在する．

$\vdash$ X が疎集合なら，$\xi < \omega_1$ で $X \subseteq X_\xi$ となるものがとれる．$\xi < \varphi(\beta)$ となるような $\beta < \omega_1$ をとれば，

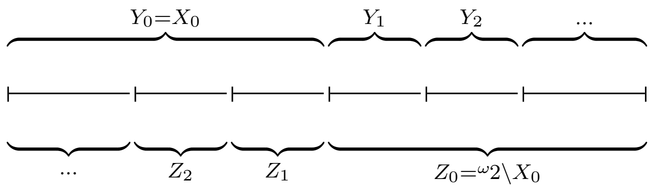
$$X \subseteq X_\xi \subseteq \bigcup_{\eta<\varphi(\beta)} X_\eta = \bigcup_{\alpha<\beta} Y_\alpha$$

となる． ❏ (補題 54)

同様の構成法により，${}^{\omega}2$ の零集合への分割 $\{Z_\alpha \,:\, \alpha < \omega_1\}$ で， $Z_0 = {}^{\omega}2 \setminus X_0$, 各 Z_α は濃度 $2^{\aleph_0}$ を持ち，

Claim 54.2 すべての零集合 $X \subseteq {}^{\omega}2$ に対し，$\beta < \omega_1$ で $X \subseteq \bigcup_{\alpha<\beta} Z_\alpha$ となるものが存在する．

の成り立つようなものが作れる．



各 $\alpha < \omega_1$ に対し，$f_\alpha : Y_\alpha \to Z_\alpha$ を全単射として，

$$f = \bigcup \{ f_\alpha \, : \, \alpha < \omega_1 \} \cup \bigcup \{ (f_\alpha)^{-1} \, : \, \alpha < \omega_1 \}$$

とすると， Claim 54.1 と Claim 54.2 により，f は求めるようなものになっていることが示せる（演習!）. ❏ (定理 54)

上の定理の主張を証明するには，必ずしも連続体仮説は必要ではない．実際，この定理の成立（つまり，定理の性質 (1), (2) を満たすような f の存在）に十分な条件で連続体仮説よりずっと弱いものが知られている．以下の定理に現れる $add(\mathcal{N})$, $cof(\mathcal{N})$ etc. については，加茂氏によるチヒョンの図式の項を参照されたい．

定理 55 (Erdős-Sierpiński Duality Theorem の Bartoszynski-Raisonnier-Stern の定理による拡張版) $add(\mathcal{N}) = cof(\mathcal{N})$ とする．このとき $f : {}^{\omega}2 \to {}^{\omega}2$ で，次を満たすものが存在する：

(1) $f \circ f = id_{({}^{\omega}2)}$ （特に f は全単射）；
(2) すべての $X \in \mathcal{P}({}^{\omega}2)$ に対し，$X \in \mathcal{M} \Leftrightarrow f''X \in \mathcal{N}$.

証明. $add(\mathcal{N}) = cof(\mathcal{N})$ なら，チヒョンの図式により，$add(\mathcal{M}) = cof(\mathcal{M}) = add(\mathcal{N}) = cof(\mathcal{N})$ となるから，定理 54 の証明と全く同様の議論が可能となる． ❏ (定理 55)

等式 $add(\mathcal{N}) = cof(\mathcal{N})$ はたとえばマーティンの公理のもとで成り立つ．したがって，定理 55 の命題はマーティンの公理のもとで成り立っていることがわかる．

一方，上の定理でとは別のレベルでは[48]，$\mathcal{N}$ と $\mathcal{M}$ の間には，本質的な非対称性が成立していることが， S. Shelah によって発見されている（[16]）.

[48] これについてはここで詳しく説明できる余裕はないが，興味のある読者は，[9] を参照されたい．

参考文献

[1] Proofs from THE BOOK, M. Aigner, G.M. Ziegler, Springer-Verlag (1998).

[2] T. Bartoszyński and H. Judah, Set Theory: on the structure of the real line, A K Peters, (1995), i–ix,1–546.

[3] Krzysztof Ciesielski, Set Theoretic Real Analysis, J. Appl. Anal. 3(2), 143–190 (1997).

[4] P. Erdős, An interpolation problem associated with the continuum hypothesis, Michigan Math. J., 11, 9–10 (1964).

[5] 渕野 昌，ヒルベルト 23 の問題・第 1 問題 — 連続体仮説, 数学セミナー，vol.37, no.5, 50–53 (1998).（20 世紀の予想，現代数学の軌跡，日本評論社編，日本評論社 (2000), i–iv, 1–235. にも収録）

[6] 渕野 昌，集合論は矛盾するか？!, 数学セミナー，Vol. 41 No. 2, 52–56 (2002).

[7] T. Jech, Set Theory, The Third Millennium Edition, revised and expanded 3rd rev. ed., Springer-Verlag (2003).

[8] M. Holz, K. Steffens, E. Weitz, Introduction to Cardinal Arithmetic, Birkhäuser (1999).

[9] A. Kanamori, The Higher Infinite, Springer Verlag (1994/1997), 邦訳： 巨大基数の集合論，渕野 昌訳，シュプリンガー・フェアラーク東京 (1998).

[10] S. Koppelberg, Einführung in die Logik und Mengenlehre, Vorlesungsskript an der Freien Universität Berlin, Sommersemester 1995.

[11] K. Kunen, Set Theory, North-Holland, i–xvi, 1–313 (1980).

[12] Azriel Levy, Basic Set Theory, Springer-Verlag (1979).

[13] W. Sierpiński, Sur les rapports entre l'existence des intégrales $\int_0^1 f(x,y)dx$, $\int_0^1 f(x,y)dy$ et $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy$, Fund. Math. 1, 142–147 (1920). Reprinted in *Oeuvres Choisies*, vol. II, 341–345.

[14] 志賀 浩二 ; 無限からの光芒, 日本評論社, (1988).

[15] J. C. Oxtoby, Measure and Category, Springer-Verlag, (1971/1980).

[16] S. Shelah, Can you take Solovay's inaccessible away? Israel Journal of Mathematics 48, 1–47 (1984).