なぜ、0で割ってはいけないか

中村文則

●すべての数は０に等しい？

右は「０は１に等しい」ことの証明です。ここで、①,②においてそれぞれ両辺に加える数を a、かける数を x－a とし、同様の計算をすると０は a に等しくなります。a はどんな数であってもいいわけですから、結局すべての数は０に等しいことがいえてしまいます。

0=1 ?
x＝0　とする
両辺に１を加えて　……①
x＋1＝1
両辺に x－1 をかけて …②
　x^2－１＝x－1
両辺に 1 を加えて
　x^2＝x
両辺を x で割って……(*)
　x＝1
∴0＝1

この証明の誤りは、もちろん(*)のところで両辺を x＝0 で除算をしたことによります。除算では、０で割ることを認めてはいないので、約束違反をするとこんなとんでもない結論が導かれてしまうのです。実は０の除算の不文律は、０の特異性と割り算の多義性に関係しています。

●存在しないことの存在を表すゼロ

日本のデパートでは１階の下は地下１階、すなわち(－１)階であり、０階はありません。温度計には－１℃，０℃，１℃、値としての０があります。試験で０点をとることと、試験を受けないこととは違います。何もないことをゼロといい、存在しないものを０という数字で表すわけですから、ゼロ(0)はあるのかないのかという議論が生まれてきます。

位取りの空位を表す記号としてのゼロを発見したのは古代インドで

すが、バラモン教が無我の境地に自己の存在、すなわち悟りを求めた仏教思想の源流であったことを考えれば頷けます。やがてゼロはアラビアを経てヨーロッパに伝わりますが、この地ではなかなか市民権を得ることはできませんでした。ゼロという数字はそれ自体は存在していないのに１のように存在する数にくっつけると１０，１００と相手の数をどんどん大きくしますが、その大きな数にゼロをかけると今度は何も無くなってしまいます。こういった不可解な性質と、数字０の形状が魔物を呼び出す入口に似ていることもあり、ゼロは悪魔の数とみなされ、ローマ法王によって使用が禁止された時代もあったといいます。

このようにゼロは数学の発展史の中では腫れ物に触るように疎まれ、人間は不可侵の呪文をゼロに掛けてしまったのです。

●割り算と分数

数は人間生活の営みと並行して拡張され、計算の効率化のために四則演算が作り出されます。指折り数える自然数から、ものを蓄えるための計算として考え出されたのが加法です。やがて交易の時代に移り、ものを与える行為を通して負数とそれを計算する減法が考えられ、さらに集団においてものの計算を合理化するために乗法が作られます。そして得たものを分配する手段として除法が登場するわけです。

しかし、割り算の結果は必ずしも割り切れるわけではありません。７÷３のようにものの分配ができない場合もあるのです。そのためギリシア時代には割り算を７：３として比で考えていたともいわれ、比を表す：の記号が転じて÷になり、分数の概念が生まれてきます。

分数もまた計算できない数としてゼロと同様に歴史の中で不遇の扱いを受けたことがあったわけです。そのために、割り算は、比としての「割合」、商としての「分数」といった二面性をもつことになります。

●１÷０を考えよう

ゼロが存在しないのであれば、１をゼロで割ること自体が無意味ということになります。だから「分数の分母は０にしてはいけない」と演算約束として計算そのものを否定することもできるわけです。しかし、ゼロは存在する数字０とみることもできるわけですから一概に規則として片付けられない部分もあります。

そこでここではゼロの特異性と除法計算の二面性を配慮することで、いくつかの説明を試みてみましょう。

１．数としての分数

ある数に何か掛けると１となる数をその数の逆数といいます。
すなわち、数○に対して、

$$○\times△=1$$

となるとき、△を○の逆数といい、$△=\frac{1}{○}$と表します。

例えば分数$\frac{1}{2}$は２の逆数です。分数$\frac{2}{3}$は、$2\times\frac{1}{3}$として、２に３の逆数をかけたものと考えます。割り算は逆数の掛け算

$$a\div b=a\times\frac{1}{b}$$

を表しているわけです。

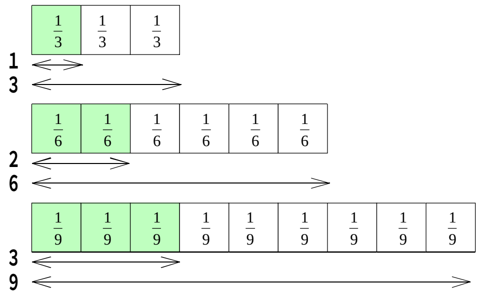
これから、１÷０は、１に０の逆数を掛けることと考えればいいことになります。そこで０をひとつの数、すなわち**存在する数**とみて、その逆数を求めてみましょう。逆数の定義から

$$0\times△=1$$

となる△が求められればいいわけです。ところが、０にどんな数をかけても０となりますから､掛けて１になる数を見つけることはできません。これから０の逆数、すなわち$\frac{1}{0}$なる数は存在しないことになります。よって１÷０も計算できません。

２．割合としての分数

１÷３は比１：３の意味を表す量的な割合とみることができます。



$\frac{1}{3}$は、有理数としては$\frac{2}{6}$,$\frac{3}{9}$と同じ値ですが、１：３，２：６，３：９とみると、みな違う割合を表しているともいえます。

1:3は全体を３等分したものを基準とする場合の１つ分の割合であり、２：６は６等分したものの２つ分の割合と考えるのです。例えば林檎を３個から１個取ることと６個から２個取ることとは違うことになります。

したがって、$\frac{0}{3}$は３等分したものを基準とした場合の０個分の割合になりますが、この場合の０は**存在しないゼロ**と考えます。すなわち、なにも取らないということになり、無いという意味のゼロ(0)がその結果となります。

では$\frac{1}{0}$はどんな割合になるでしょうか。

全体を０等分、すなわち分けないということで基準が無となり、割合そのものを考えることができないことになります。したがって、その値も考えることができないのです。

３．演算としての分数

$\frac{1}{0}$は、１÷０の計算の結果としてみることもできます。

１÷０は、１を何もないもの、あるい０という数で実際に割ったものです。もちろん、何もないもので割ることはできないわけですから、この場合は無あるいは０に限りなく近づけた数で割ると考えて、どんな値に近づいていくか予想してみます。このように０には無と０の両者を表す「限りなく０に近づける」**無限小の０**という意味合いもあるのです。

割る数をだんだんと０に近づけて除算してみます。実際に電卓で計算し

てみるのもいいでしょう。その結果が右表です。

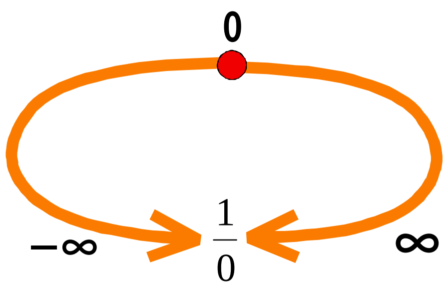
1÷0.1＝10
1÷0.01＝100
1÷0.001＝1000
1÷0.0001＝10000
1÷0.00001＝100000

例えば、0.001 に対して合せ鏡のように 1000 の値が求まります。10^{-14}を逡巡といい、原子核の大きさ(10^{-14}m)ほどの値ですが、この値で除算した結果は10^{14}で、百兆の大きさになります。10^{-20}は空虚、10^{-21}は清浄といい、仏教世界ではこの辺りでもうほとんど何もなくなってしまいますが、さらに無限小ゼロに近づけ、10^{-80}で割った結果10^{80}は宇宙全体の粒子数を超えるほどの大きさになり、無限大(∞)となっていくのです。

1÷(−0.1)=−10
1÷(−0.01)=−100
1÷(−0.001)=−1000
1÷(−0.0001)=−10000
1÷(−0.00001)=−100000

ところが割る数は負の値から無限小 0 に近づけることもできます。その除算した値は今度は負の無限大(−∞)に近づいていきます。

このことから、$\frac{1}{0}$の値は、数直線上で０を起点として、左右の方向に無限に伸びた先にあるとも考えられます。結局、その値は確定できないので、存在しないと約束した方がいいことになるわけです。



仏教には彼岸という言葉があります。此の世に対して、彼方の岸にある悟りの世界のことをいいます。彼岸から人は輪廻転生を繰り返し、前世、現世、来世の三世を永久に生き続けていきます。位取りを表す数としてインドで考えられたゼロは不可思議な数ではあります。しかし、仏教ではゼロを空といい、色即是空に象徴されるように中軸思想を意味しています。空は、すべてを生み出す元であり、空で除算することは、すべての数を彼方の世界に送りだしている、そう解釈すれば、ゼロは幽遠な思惑をもって生まれてきたといえるのです。