2008.9.13. 数学教育の会

数学史の窓から — 教室で使える話題 ④

青年ニュートンの一般二項定理発見

東京海洋大学名誉教授、学習院大学非常勤講師　中村 滋

1　人間ニュートン

ニュートン,　Sir Isaac Newton（1642-1727）

> 彼にとって自然は開かれた書物であって，その手紙を彼は易々と読むことが出来たのだ．[ニュートンの『光学』新版(ドーヴァー版) に寄せたアインシュタインの序文より]

科学の歴史を一変させてしまったこの天才について何から話せばよいのか迷いますが，まず誕生日の話から始めましょう．イギリスではまだ旧暦(ユリウス暦) を使っていましたので，彼は 1642 年のクリスマス 12 月 25 日に生まれたことになります (新暦 (グレゴリオ暦) では 1643 年 1 月 4 日)．ガリレオ・ガリレイが死んだのが 1642 年 1 月 8 日でしたから，力学の偉大な先輩の生まれ変わりというこの上もないタイミングでこの世に生を享けたことになります．

実のところは，生まれる 3ヶ月前に父が亡くなり，ひ弱な未熟児として生まれた彼は，とても大きくなれないだろうと思われていたようです．その日彼のために近くの村にあるものを取りに行かされた二人のお手伝いさんは，途中の道脇にあった踏み石に座り，帰った頃にはもうあの子は死んでいるだろうから急ぐことはないわよ，と話し合ったと伝えられています．洗礼も 1 週間様子を見て 1 月 1 日に行われました．

母親ハンナは 2 歳になったばかりの幼な子を祖父母にあずけて隣村の老牧師スミスと再婚しました．亡き父の名をそのまま受け継いだアイザックは，こうして親の愛を知らずに育ちました．近くの小学校に通っていた頃のことはほとんど伝えられていません．

アイザックが 10 歳の 1653 年夏，再婚相手に再び死に別れて母が戻って来ました．ある伝記は「アイザックにとって喜びに満ちた合間」と記します．確かに母と一緒に暮らしたのですから心の温もりを感じたことでしょう．で

も 4 歳半を頭に 3 人の幼い弟妹を連れて帰ってきた母に対してアイザックの胸中はいかばかりだったか，察するに余りあります．2 年後，彼はグランサムのグラマー・スクールに入学して薬剤師クラークの家に下宿します．ここで生涯唯一のロマンスが伝えられています．奥さんの連れ子だった年下の女の子に淡い恋心を抱いたのです．でも恋は実らず，彼は生涯独身を通しました．学校時代の成績が残っていて，何と彼は成績最下位クラスの中でもビリから 2 番目で，そこには「怠惰」とか「不注意」と書かれていました．このころ，この孤独な少年は工作に熱中していて，日時計や風車や折りたたみ式のちょうちんなど色々なものを工夫して作っていました．ですから，成績不振は才能の点に問題があったのではなく，学校では先生の話に集中できず自分の世界で空想に耽っていたのでしょう．ある時母はアイザックを学校から呼び戻して自分の農場経営を手伝わそうとしますが，ニュートンは羊の番をさせられても水車の模型作りに夢中になって，まるで役に立ちません．校長先生と叔父の 1 人が母親を説得してアイザックは再び学校に戻り，大学受験に備えたのでした．

そして 1661 年 6 月，無事にケンブリッジ大学に入学しました．それから 3 年後，1664 年の春に彼は突然数学に真剣に取り組み始めます．初代のルーカス教授職としてバロウ (1630-77) が数学を教え始めたのがその年の 3 月で、4 月には特待生の選考試験でバロウからエウクレイデス (英語名ユークリッド) について口頭試問を受けた時期ですが，それらがどのように影響しているのかは不明です．以前に買って少し読んだものの,「当たり前のことが書いてあるだけでつまらない」と思って放っておいたエウクレイデスの『原論』を改めて精読し始め，早とちりで読むのをやめたことを大いに悔いたと伝えられています．デカルトの『幾何学』やオートリッドの『数学の鍵 (Clavis Mathematicae;1631)』も借りてノートを取りながらていねいに読みます．その年の暮には,『幾何学』やスホーテンの本を買い求め，ウォーリスの『無限の算術』などを借りて読んでいます．翌 1665 年，ちょうど学士の称号をもらった直後からペストの大流行で大学が 2 度に渡って閉鎖され，断続的に約 2 年間を故郷で過ごすことになります．アイザックは実家ではなく，近くのブースビーという所でこの期間を過ごしました．この間に，万有引力の発見，微分積分学の発見，そして光学理論の確立という彼の生涯の 3 大発見の端緒をつかむのです．凡庸な学生が歴史に残る大天才に変身する奇跡の時です．ニュートン研究者はこの奇跡の 2 年間を “ 驚異の年々(anni mirabiles) ” と呼びます．またニュートンの数学著作集 (全 8 巻) をまとめたホワイトサイドは，この時期を “ 数学者ニュートンの誕生 ” と書いています．

この時期にやったことを後年になって回想したニュートン自身のメモが残されています (1714 年頃)．これを紹介します．

「私は流率の方法を 1665 年と 1666 年に順次見出していった．1665 年の初めに近似級数の方法を，$\cdots$ ，同じ年の 5 月グレゴリーとスリューズの接線法を見出し，11 月には正流率法（微分法）を，翌年 1 月には色の理論を得て，5 月には逆流率法（積分法）の戸口に立った．また同じ年に，重力は月の軌道まで伸びていると考えはじめ，$\cdots$，ケプラーの法則から，惑星をその軌道に保つ力は，回転中心からの距離の 2 乗に逆比例しなければならないことを導いた．その際，月を軌道に保つのに要する力と地球表面における重力とを比べ，かなりよい答を与えることがわかった．これらはすべて 1665 年と 1666 年のペストの流行した 2 年間のことであった．これらの日々，私は生涯の創造力の頂点にあり，後のいずれの時よりも数学と哲学 (= 自然哲学 $\approx$ 物理学) とに打ち込んでいた.」

大学が再開されると間もなく，初代ルーカス教授職のバローはこの若い天才に教授職を譲り聖職者に戻ります．若い教授は，科学者としては抜群でも教育者としては凡庸で，講義を聴く学生は少なく，時には聴講学生ゼロということもあったようです．そんなときは 15 分待って誰も来ないと部屋に戻ったと言われています．1684 年に若い天文学者ハレーが訪ねてきて，引力が距離の二乗に逆比例するとしたきの惑星の軌道について質問しました．ニュートンは即座に楕円だと答え，前に計算したことがあると言ったのですが，そのときに以前の計算ノートが出てこなかったので，後で送ると約束しました．これがきっかけになって，1687 年にニュートンの主著『プリンキピア』がハレーの資金援助で出版されることになったのです．私たちはハレーにも感謝しなくてはいけないのでしょう．

1696 年に造幣局監督官になってロンドンに移り住み，99 年以来造幣局長官，1701 年にルーカス教授職を辞め，03 年から王立協会会長，05 年にはナイトの称号を授与され，サーと呼ばれるようになりました．こうして世俗的な栄誉を一身に集めて，かつて「とても育つまい」といわれたひ弱な未熟児は，最後までふさふさした黒髪を保ち，84 才まで生きたのでした．

2　一般二項定理の発見

「数学者ニュートンの誕生」と言われた頃の彼のノートを見ると，二項係数についてのパスカルの三角形をじっとにらみ，その行間がどうなっているのかを見つけたことが分かります．これが「一般二項定理の発見」です．こう言えば簡単に聞こえますが，この同じ時期に月を見て「どんな勢いで地球に落ちてきているのか」と問いかけて計算し，リンゴの落ちるのと同じ力が働いていることに気付いたというのと同じで，とても凡人の思い及ぶことで

はありません．

二項定理は n が自然数のときに

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} x^k \qquad (\mid x \mid < 1)$$

と主張します．ここで出てきた係数が二項係数で，

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

と書きました．自然数ではない実数 α に対してもこの二項係数の記号を流用して，

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

と書きます．これが一般二項係数です．このとき一般二項定理は次のように書けます．

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k \qquad (|x| < 1) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \qquad (|x| < 1)\end{aligned}$$

これは α が 0 でなく，自然数でもないとき，無限級数になります．それでは 22 才のアイザック青年はどのように推論して，パスカルの三角形からこの一般二項定理を発見したのでしょうか? ニュートンはウォーリス (1616-1703) が円周率を無限乗積で表す「ウォーリスの公式」を導くときに使ったアイディアにヒントを得ました．この公式は次のように書けます．

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8\cdot\cdots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot\cdots}$$

ウォーリスはある曲線の下の面積という意味で，実質的に次の “ 定積分 ” を考えました．

$$f(p) = \int_0^1 (1-t^2)^p dt$$

四分円の面積から，明らかに

$$f(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{4}$$

となります．また,

$$f(0) = 1, f(1) = \frac{2}{3}, f(2) = \frac{8}{15}$$

などが成り立ちます．この積分を補間することにより，巧妙な類推によって彼の公式を導いたのでした (1655).

一方ニュートンはウォーリスの “ 定積分 ” $f(p)$ を一般化して，やはり今の記号で書くことにして，次の “ 積分 ” を考えました．

$$\phi(p, x) = \int_0^x (1-t^2)^p dt$$

このとき明らかに,

$$\phi(p, 1) = f(p)$$

であり,

$$\phi(0, x) = x, \phi(1, x) = x - \frac{x^3}{3}, \phi(2, x) = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5, \cdots$$

などが成り立ちます．彼の目標はこれを $\frac{1}{2}$ 間隔で補間することです．分かりやすくするために，$p = \frac{q}{2}$ すなわち $q = 2p$ とおき,

$$(1-t^2)^{\frac{q}{2}} = a_{q,0} - a_{q,1}t^2 + a_{q,2}t^4 - a_{q,3}t^6 \pm \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{q,n} t^{2n}$$

と書き表します．実質的にこれを項別に “ 積分 ” することで,

$$\int_0^x (1-t^2)^{\frac{q}{2}} dt = a_{q,0}x - a_{q,1}\frac{x^3}{3} + a_{q,2}\frac{x^5}{5} - a_{q,3}\frac{x^7}{7} \pm \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{q,n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

という式が得られます．彼は $T = t^2$ を使ってもう少し簡単に書いていますが，ここではウォーリスからの流れを重視して t のままで進めます．それは “ 積分 ” の影響を取り除くために，彼は左端に $\frac{x^{n+1}}{n+1} \times$ と書くので, 結局同

じになるからです．今は左端に $\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ と書いて係数 $a_{q,n}$ を表にすると，q が偶数の時にはパスカルの三角形が現れます．見慣れているのと縦横が逆ですが，次の表で確かめてください．$q=-2$ すなわち $p=-1$ の欄は，右に向かってパスカルの三角形を作って行く操作を逆に進めるとどうなるかを考えて彼が付け加えたものです．これが，このレジュメの最後に付けておいた「ニュートンのノート」の左上にある表です．

	$n \setminus q=2p$	-2	0	2	4	6	8	10	12	14	$\cdots$
$x\times$	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$\cdots$
$\frac{x^3}{3}\times$	1	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
$\frac{x^5}{5}\times$	2	1	0	0	1	3	6	10	15	21	$\cdots$
$\frac{x^7}{7}\times$	3	-1	0	0	0	1	4	10	20	35	$\cdots$
$\frac{x^9}{9}\times$	4	1	0	0	0	0	1	5	15	35	$\cdots$
$\frac{x^{11}}{11}\times$	5	-1	0	0	0	0	0	1	6	21	$\cdots$
$\frac{x^{13}}{13}\times$	6	1	0	0	0	0	0	0	1	7	$\cdots$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

係数 $a_{q,n}$ の表

これより，$a_{q,0}=1, a_{q,1}=\dfrac{q}{2}$ になることが推測できます．$a_{q,0}, a_{q,1}$ はそれぞれ q の 0 次式，1 次式になります．そこで $a_{q,2}$ がどうなるかが次の問題です．$q=0,2,4,6,8,10$ に対する $a_{q,2}$ の値 $0,0,1,3,6,10,\cdots$ を $(q,a_{q,2})$ 座標上にプロットしてみると，パラボラ（放物線）のようです．すなわち，$a_{q,2}$ は q の 2 次式になるようです．実際次のように書けそうですね．

$$a_{q,2}=\frac{q^2-2q}{8}=\frac{\frac{q}{2}(\frac{q}{2}-1)}{1\cdot 2}$$

もしかしたら，ニュートンは三角数の公式 $\Big($ 小石を等間隔に 1 辺 n の正三角形の形に並べたときの小石の個数は $t_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ となる $\Big)$ から直ちに 2 次式であることを悟ったのかも知れません．ここまで来ると，$a_{q,3}$ は q の 3 次式と見当をつけます．しかも先ほどの表から，$q=0,2,4$ で 0 になりますから，適当な係数 k を使うと，$a_{q,3}=kq(q-2)(q-4)$ の形になるはずです．$q=6$ のとき $a_{q,3}=1$ なので，$k=\dfrac{1}{2\cdot 4\cdot 6}$ です．よって次のように書けます．

$$a_{q,3} = \frac{q(q-2)(q-4)}{2\cdot 4\cdot 6} = \frac{\frac{q}{2}(\frac{q}{2}-1)(\frac{q}{2}-2)}{1\cdot 2\cdot 3} = \binom{\frac{q}{2}}{3}$$

ここまできたらあとは一直線ですね．$n=4$ のときは，$q=0,2,4,6$ で 0 になり，$q=8$ で 1 になる q の 4 次式ですから，次のように書け，以下同様に進みます．

$$a_{q,4} = \frac{q(q-2)(q-4)(q-6)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} = \frac{\frac{q}{2}(\frac{q}{2}-1)(\frac{q}{2}-2)(\frac{q}{2}-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = \binom{\frac{q}{2}}{4}$$

$$\cdots\cdots$$

$$a_{q,n} = \binom{\frac{q}{2}}{n}$$

このようにして $q=$偶数 のときの係数が求まりました．そこでニュートンは「もし，中間項が挿入されれば」として，$q=1$ のときの係数を計算します．

$$a_{1,0}=1,\quad a_{1,1}=\frac{1}{2},$$
$$a_{1,2}=\frac{1(-1)}{2\cdot 4}=-\frac{1}{8},$$
$$a_{1,3}=\frac{1(-1)(-3)}{2\cdot 4\cdot 6}=\frac{1}{16},$$
$$a_{1,4}=\frac{1(-1)(-3)(-5)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}=-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}=-\frac{5}{128},\cdots$$

こうして次の展開式を得ました．

$$\sqrt{1-x^2} = 1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6-\frac{5}{128}x^8-\frac{7}{256}x^{10}\pm\cdots$$

このようにして得られた式をニュートンは証明をしていませんが，2 乗を計算して $1-x^2$ になることを確かめています．実際に上の式を 2 乗してみると，$1-x^2$ 以外の係数が次々に 0 になることが分かります．これは是非とも実行して，ニュートンの感動 (のごく一部) を共有して見ましょう．彼はさらに，$q=3,5,7,9,11$ を補間し、$q=-1$ に対しても係数を計算しています (このレジュメ最後の「ニュートンのノート」中央あたりの表)．少し細かすぎる話もしましたが，これが青年ニュートンの一般二項定理発見の様子でした．

3　一般二項定理の応用

このような展開式を自在に使って，青年ニュートンは円周率を計算し，また $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ を項別に積分して逆正弦関数 $\arcsin x$ の展開式を求め，さらにそれを逆に解いて，西欧世界で最初に正弦関数 $\sin x$ の展開式を求めたのでした (インドのケーララ派ではニュートンの 300 年も前にマーダヴァが，逆正接関数 $\arctan x$, 正弦関数 $\sin x$, 余弦関数 $\cos x$ の展開式を求めていたと伝えられています)．また $(1+x)^{-1}$ の展開式を項別に積分して，メルカトールよりも早く，

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \cdots, \quad (|\, x \,| < 1)$$

を見つけました．この公式を用いて彼は $\log 1.1$ や $\log 1.01$ などを，1665 年の夏に 46 桁，秋にはさらに 55 桁まで計算しています.「ニュートンのノート」の後にこの時の「青年ニュートンの 55 桁計算ノート」も載せておきましょう．$y = (1+x)^{-1}$ は双曲線を表しますね．したがってその“ 積分”

$$\int_0^x (1+x)^{-1} dx = \log(1+x)$$

は双曲線の下の部分の面積になります．そこで，これらのことを彼は「双曲線下の面積を計算し，同じ方法で 52 の図形を計算した」(1699 年のメモ) と表現したのでした．円周率の計算については私の著書『微分積分学 21 講』(東京図書;2008) コラム 06 ニュートンの円周率計算　にくわしく書いておきました (また，ライプニッツの $\frac{\pi}{4}$ 公式についても同書コラム 08 ライプニッツの級数　で取り上げて説明しました．これについては「数学文化」第 1 号 (日本評論社刊，2003,pp.49-58) に載った林知宏「ライプニッツと円周率」にもっとくわしく書いてあります)．ニュートンは恐らく収束のスピードアップのために $\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{x-x^2}dx$ を計算して π を 16 桁算出し，14 桁まで正しい値を得たのでした．ここでは簡単のために，同じ考え方で $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}dx$ を計算して円周率を 5 桁求めてみます．上に書いた $\sqrt{1-x^2}$ の展開式を項別に積分すると，

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^4 \cdot 3} - \frac{1}{2^8 \cdot 5} - \frac{1}{2^{11} \cdot 7} - \frac{5}{2^{16} \cdot 9} - \frac{21}{2^{23} \cdot 13} - \cdots$$

となります．簡単な計算から，$I = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\sqrt{3}}{8}$ となるので，

$$\pi = 12I - \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

となります．彼は，$\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{4}}$ も自分が見つけた一般二項定理を用いて計算しました．この簡略形でのやり方で小数 5 桁まで計算すると，確かに $\pi = 3.14159 \cdots$ が求められます．青年ニュートンが心を躍らせながら円周率 16 桁を計算したときの感動がよく分かりますね．

若い人たちは，自分達と余り違わない年令で，突然歴史に残る大天才に変身する奇跡のような話を特に興味深く聞いてくれます．若者の頑張りは時を超えて感動を与え，印象に残るものなのです．特にそれが自分といくつも違わないときのことだと，自分に重ね合わせて実感するようです．以上，少し面倒な計算もありましたが,「教室で感動を与える」ことを目的としているこのシリーズでは，避けて通ることの出来ない話題だったのです．最後にこの時期の「ニュートンのノート」と「青年ニュートンの 55 桁計算ノート」を見ていただいて，私の話を終ります．ご清聴有難うございました．(2008.9.13)

(以上のレジュメは，私の講義ノートを元に書き換えました．そのために拙著『微分積分学 21 講』(東京図書刊,2008) と類似の表現になっているところがあります．お許しください．)

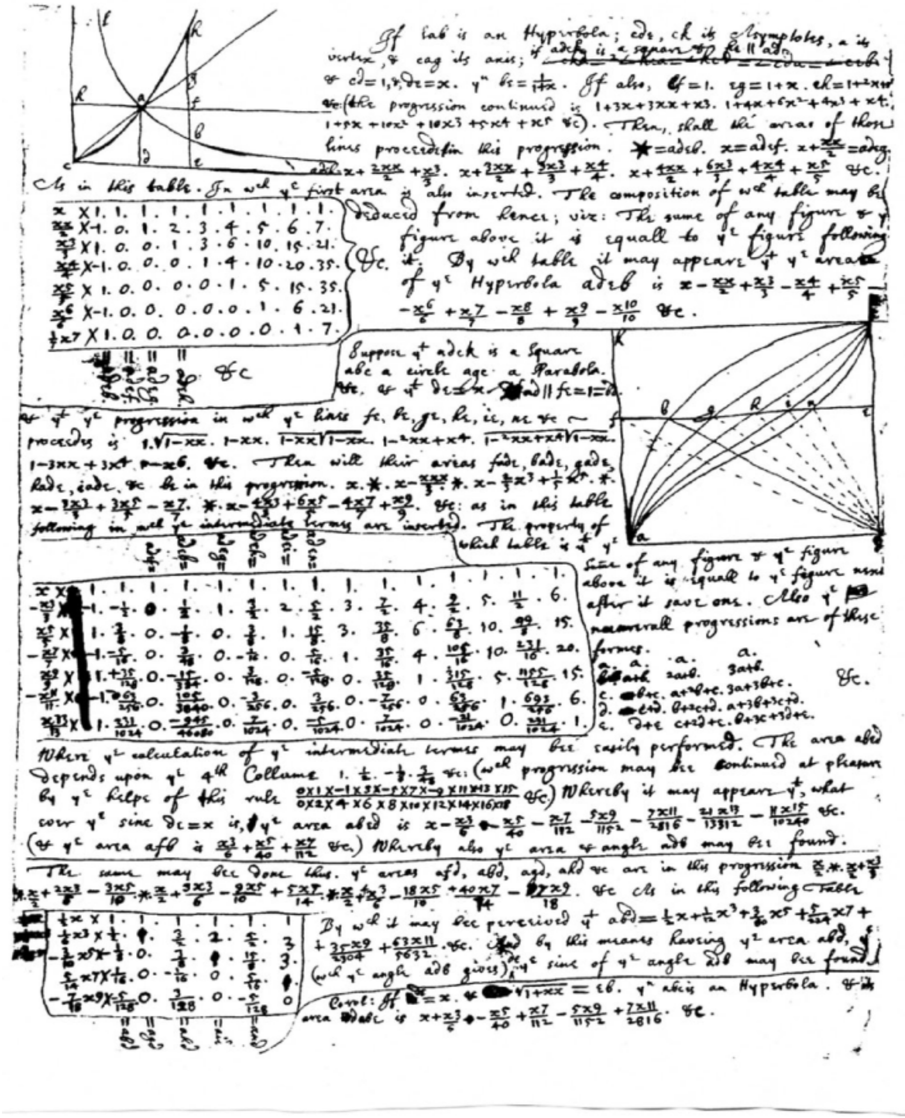

Figure 1: ニュートンのノート

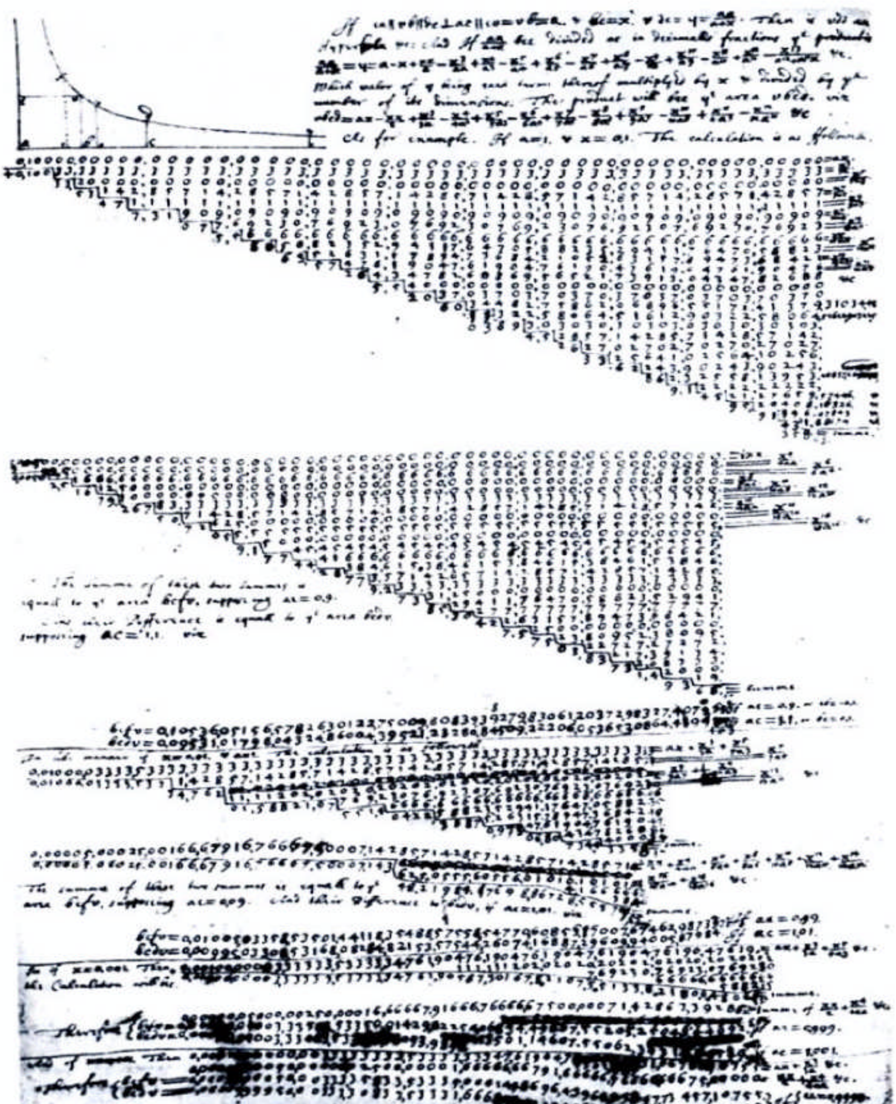

Figure 2: 青年ニュートンの 55 桁計算