

構成方程式の基本知識 考え方と定式化

武蔵工業大学 都市基盤工学科 吉川 弘道

1. はじめに

1.1 構成方程式とは

ある材料に力が作用したときの応答変形、あるいは変形を与えられたときの反力は通例、構成方程式なる応力～ひずみ関係によって記述される。すなわち、作用荷重と応答変位の関係は、その材料の構成物質と微視的耐荷構造に支配され、両者間の量的関係を構成方程式 (constitutive equation) あるいは構成法則 (constitutive law) と呼ぶ。

これは、単軸問題の場合、応力 σ とひずみ ϵ に対して、 $\sigma = E\epsilon$ なるスカラー方程式が最もよく知られているが、材料のもつ固有な弾性係数 (これは material constant と呼ぶ) が最も重要な意味をもつ。

構成方程式の研究は、また対象とする材料の力学的特徴を解明するための学問 (material science) でもあり、金属、鋼、プラスチック、セラミック、コンクリート、土質・岩盤、新素材、複合材料など、すべての材料分野における重要な研究領域でもある。

また、連続体の境界値問題を考えると、構成方程式は、平衡条件 (equilibrium condition) を満足する応力と適合条件 (compatibility condition) に従うひずみの両者を矛盾なく関係づける第3の支配方程式 (governing equation) とも見なすことができよう。従って、例えば、有限要素解析では適切な構成方程式が与えられることを必要とする。

構成方程式を取り扱う上で重要なことは、応力 (単位断面積あたりの力) やひずみ (単位長さあたりの変形) といった微小単位要素で考え、寸法や大きさを介させないということである。ただし、どのレベルを微小要素とするかは材料で大きく異なる。比較的均質な金属材料、骨材とこれを包むモルタルで作られるコンクリート、大小様々な粒子構造とその間隙水で構成される土質、多くの短繊維をランダムに混入させた複合材料が、同じ大きさの微小要素をもたないことは明らかである。どこまで細かく見たらよいか (microscopic)、どのように巨視的に取り扱ったらよいか (macroscopic) という論議は、各々の材料分野で古くから行われていた。

1.2 構成方程式のバリエーション

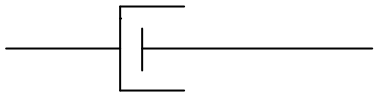
応力～ひずみ関係というと、まず $\sigma = E\epsilon$ を思い浮かべるが、これは単軸弾性問題における記述ということになる。構成方程式は、この他にいくつかの基本的なバリエーションがあり、その特徴をまず確認してみたい (表 - 1)

弾性とは、塑性ひずみ (永久変形) を生じないということであるが、時間に関係しないということも意味する。これに対して、時間に依存する場合の基本式は $\sigma = E\dot{\epsilon}$ なる構成方程式で表され、今度は応力 σ とひずみ速度 (strain rate...ひずみの時間的変化率) $\dot{\epsilon}$ と

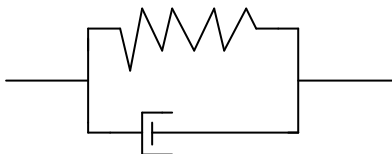
表 - 1 構成方程式の基本バリエーション



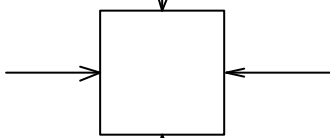
弾性 =



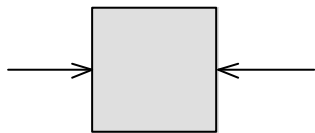
粘性 =



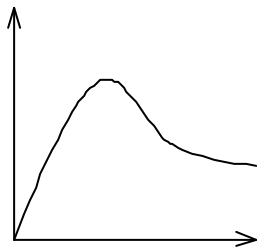
粘弾性 = 1 + 2



2軸弾性 $\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1-n \\ -n1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{Bmatrix}$



熱弾性 $s = E(e - e_0)$



非線形弾性 = $E(\epsilon, T, t)$

の関係となり、両者を結ぶ材料定数は粘性係数となる。弾性と粘性が適当に組合わさると粘弾性体 (visco-elastic material) となり、Maxwell モデル、Kelvin モデルなど、古くから完成された数学的体系が存在する。

また弾性問題であっても、2 軸状態では、材料定数として、弾性係数の他にポアソン比が必要となり、マトリックス表示 $\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\}$ が多用される。より厳密には、応力テンソル σ_{ij} とひずみテンソル ϵ_{ij} という 2 階のテンソル量として取り扱う必要があり、こ

れは $\sigma_{ij} = D_{ijkl} \epsilon_{kl}$ のような記述となり、 D_{ijkl} は 3 次元問題の場合、最大 $3^4 = 81$ 個の材料定数を有する。(詳しくは、次章にて系統的に展開される。)

さて、単軸問題にもどって、ひずみ成分に温度膨張のような非弾性ひずみ (inelastic strain) ϵ_0 が混在すると、これは応力と対応しないので、 $\sigma = E(\epsilon - \epsilon_0)$ なる記述となる。ここで、 ϵ_0 は温度変化 \times 線膨張係数で、 $\sigma = E(\epsilon - \epsilon_0)$ なる記述となる。ここで、 ϵ_0 は温度変化 \times 線膨張係数で表わされるが、この他乾燥収縮ひずみ、クリープひずみなども応力を励起することはなく、非弾性ひずみと解釈することができる。

最後に、材料の応答を表す構成法則は、厳密にはひずみレベルで異なるとともに、時間的に変化する事も多く、加えて温度によって大きな影響を受けることもたびたび遭遇する。従って、このような場合は、弾性係数 E がひずみ ϵ 、時間 t 、温度 T の関数となると考えるもので、その構成方程式を $\sigma = E(\epsilon, t, T)$ のように表すことになる。

ここでは、このような一般論にとどめるが、詳細については、各々の対象とする材料分野において実に多くの実験的、解析的研究が行われている。

1.3 部材の剛性方程式との比較

ところで、部材のレベルでの荷重と変形の間係を表す場合、バネ定数 k なる剛性が用いられるが、これは材料の弾性係数とどのような関係をもつのであろうか。両者の違いを考察することにより、構成方程式の意味を明確にすることができ、例題を交えて考えてみたい。

図 - 1 (a) は、引張荷重 P を受ける長さ l 、断面積 A の鋼材で、このときの伸び変化を δ とする。部材の各点での応力 (もしくはひずみ) 状態は一様であるが、厳密には 3 次元部材を考えていることになる。このような部材の荷重 ~ 変形関係を記述する場合、次のような方法が考えられ。

まず、最初に考えられるのは、バネ定数 k なる剛性を使って、

$$P = k \delta \quad (2.1)$$

のように表すことである。これを、単軸モデルと考え、断面剛性 EA と部材長さ l を用いることにより、

$$P = \frac{AE}{l} \delta \quad (2.2)$$

のように表すことができる。係数 AE / l は、単軸トラス部材の軸剛性としてよく知られている。

ここで、荷重に対して $\bar{P} = P / A$ 、変形に対して $\bar{\delta} = \delta / l$ のように正規化し、各々単位量に換算すると、上式は

$$\bar{P} = E \bar{\delta} \quad (2.3)$$

のように書換えられる。これは、まさに材料の構成方程式を表していることに他ならない。以上をまとめると次のようなことが言える。

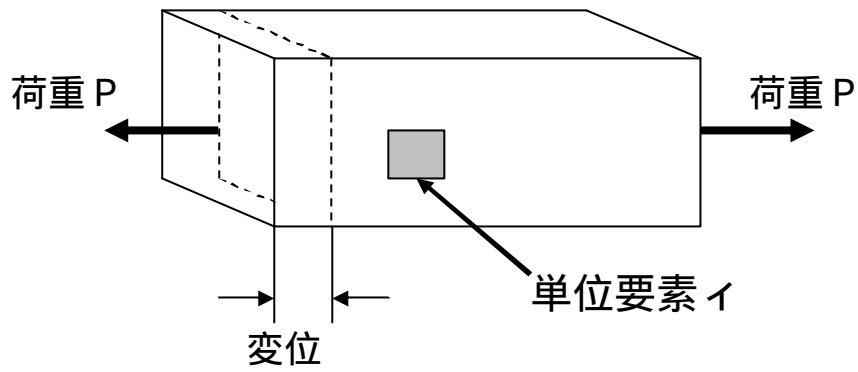
まず、棒部材のバネ定数 k は、

$$k = AE / l \quad (2.4)$$

で表され、バネ定数の中には、材料の弾性係数と部材寸法の両者が含まれていることになる。一方、構成方程式(2.3)は、単位面積あたり、単位長さあたりの微小要素に対する材料自身の剛性ということになる。

このことが、バネや部材に用いられる剛性方程式 (stiffness equation) と構成方程式 (constitutive equation) との基本的な違いである。従って、「バットやラケットの剛性」、「ヘルメットの硬さ」 などと言うときは、用いた材料 (FRP, 金属) の弾性係数に加えて、グリップの太さやヘルメットの厚さといった部材寸法が必ず含まれており、部材の剛性を意識したものである。

一方、これに対して、例えば、「樫の木はかたい」、「かたい土、やわらかい土」、「コンクリートの剛性」 などと言った場合、これらは、部材の形状寸法は一切考えず、材料そのものの剛性について述べたもので、構成法則の考え方である。



[単軸引張力を受ける部材]

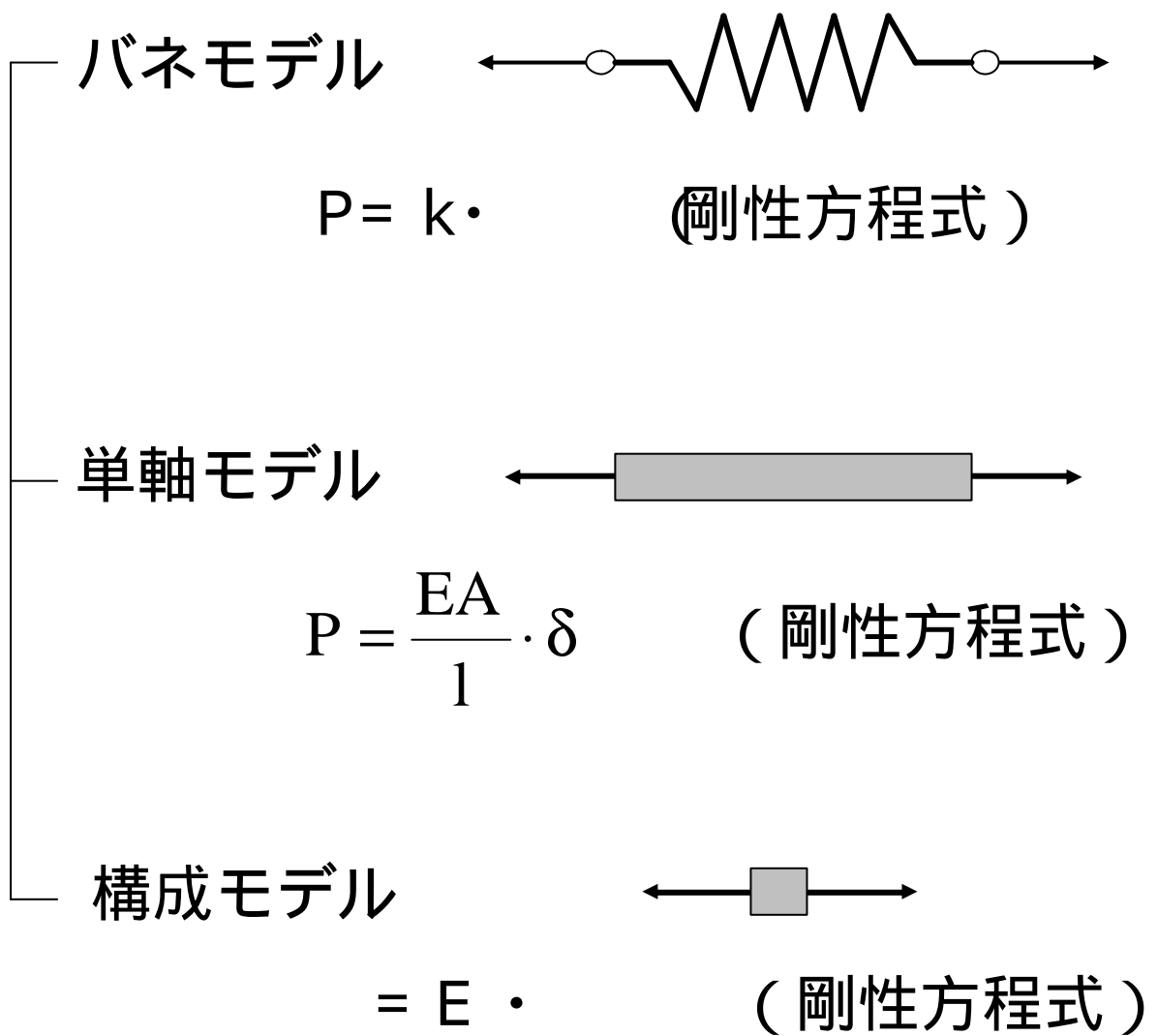


図-1 剛性方程式と構成方程式 (単軸部材)

2. 弾性体の構成方程式 - 3次元場における一般化表示

2.1 表示法について

材料の応力～ひずみ関係を表す構成方程式の表示法については多くの形式があるが、比較的好く用いられるものとして、次の3種類がある。

$$\sigma_{ij} = E \epsilon_{ij}, \quad \{\sigma\} = [D] \{\epsilon\}, \quad D_{ijkl} = D_{klij} \quad (2.1)$$

第一式が単軸場における応力 σ とひずみ ϵ との関係であり、次がマトリックス(ベクトル)表示によって多軸状態における関係を表しており、最後がテンソル表示である。この中で、

$E, [D], D_{ijkl}$ が材料固有の力学的性質を表すもので、材料科学における研究の対象となる。

ここで、上式のような剛性表示(応力 = 弾性係数 × ひずみ)の代わりに、その逆関係(ひずみ = 柔性係数 × 応力)のように表すこともあり、マトリックス表示の場合を例にとって考えると次のように対記できる。

$$\{\epsilon\} = [D]^{-1} \{\sigma\}, \quad \{\sigma\} = [C] \{\epsilon\} \quad (2.2)$$

ここで、 $[D]$ は剛性マトリックス(stiffness matrix) , $[C]$ は柔性マトリックス(flexibility matrix) あるいはコンプライアンスと呼ばれ、これらは、 $[D] = [C]^{-1}$ なる関係をもつ。また、両者ともに、構成マトリックス(constitutive matrix) であり、等方弾性体であれば、縦弾性係数 E 、せん断弾性係数 G およびポアソン比 ν によって表現することができる。

(ただし、せん断弾性係数については、 $G = E / 2(1 + \nu)$ なる関係を用いて、消去され、 E, ν の2係数で表されることが多い。) 同様に、体積弾性係数 K とせん断弾性係数 G の2定数が用いられることも多く、後に詳述する。

これまでの構成方程式は、すべて全量系(total deformation theory) で表されており、これに対して増分形(incremental form) による関係式が用いられることが多い。すなわち、

$$\{d\sigma\} = [D'] \{d\epsilon\}, \quad \{d\epsilon\} = [C'] \{d\sigma\}$$

$$\{\dot{\sigma}\} = [D_t] \{\dot{\epsilon}\}, \quad \{\dot{\epsilon}\} = [C_t] \{\dot{\sigma}\},$$

$$\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt}, \quad \dot{\epsilon} = \frac{d\epsilon}{dt}$$

上式の構成マトリックス $[D']$ および $[C']$ は、すべて接線係数(tangential modulus)であり、式(2.2)のそれは割線係数(secant modulus)となる。また、前述と同様に $[D'] = [C']^{-1}$ なる関係にあることは言うまでもない。

このような、増分形表示は、また区間線形化(incrementally linearized formulation) と見ることができ、増分量ね合わせ法を併用することにより、非線形問題の解析に威力を発揮する。

2.2 3次元の一般表示

ここで次のようなテンソル表示 (tensorial form)による3次元弾性体の一般的な応力～ひずみ関係を考える。

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (i,j,k,l = 1 \sim 3) \quad (2.4)$$

上式で、 σ_{ij} , ϵ_{ij} は各々ひずみテンソルを表し、3次元問題では、次のような9成分をもつ(添字など3つの表記法で示した)。

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$\epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \frac{g_{12}}{2} & \frac{g_{13}}{2} \\ \frac{g_{21}}{2} & \epsilon_{22} & \frac{g_{23}}{2} \\ \frac{g_{31}}{2} & \frac{g_{32}}{2} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{g_{xy}}{2} & \frac{g_{xz}}{2} \\ \frac{g_{yx}}{2} & \epsilon_x & \frac{g_{yz}}{2} \\ \frac{g_{zx}}{2} & \frac{g_{zy}}{2} & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

上式のうち、x y z 座標系について表示法(von karman's notation)は、1 x , 2 y , 3 z , のように変換したもので、なじみ易い表記法として併記したものである。またせん断ひずみについては特に注意が必要で、 ϵ_{12} , ϵ_{13} …… が

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

に従うテンソルひずみ(tensor shear strain) であり、 g_{12} , g_{13} ……が角変化を表す工学的ひずみ(engineering shear strain) となり、両者は

$$\epsilon_{ij} = g_{ij} / 2 \quad (\text{ただし } i \neq j)$$

なる関係を持つ。テンソル式やモールのひずみ円を矛盾なく用いるには、当然テンソル量でなくてはならない。

さて、式(2.4)にもどると、これは次のような重合わせであることが暗黙の了解となっている。

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (2.7b)$$

これは、テンソル式の同じ項の中で同じ添字が2度以上使われていたら、それについて1から3までの総和を示すものである。これは総和規約(summation convention)と呼ばれ、テンソル式を単純で簡潔に書き表すための記述法である。従って上式は、

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned}
& \mathbf{e}_{11} = C_{1111}\mathbf{s}_{11} + C_{1112}\mathbf{s}_{12} + C_{1113}\mathbf{s}_{13} + \cdots + C_{1132}\mathbf{s}_{32} + C_{1133}\mathbf{s}_{33} \\
& \mathbf{e}_{12} = C_{1211}\mathbf{s}_{11} + C_{1212}\mathbf{s}_{12} + C_{1213}\mathbf{s}_{13} + \cdots \\
& \mathbf{e}_{13} = C_{1311}\mathbf{s}_{11} + C_{1312}\mathbf{s}_{12} + C_{1313}\mathbf{s}_{13} + \cdots \\
& \mathbf{e}_{21} = C_{2111}\mathbf{s}_{11} + C_{2112}\mathbf{s}_{12} + C_{2113}\mathbf{s}_{13} + \cdots \\
& \mathbf{e}_{22} = C_{2211}\mathbf{s}_{11} + C_{2212}\mathbf{s}_{12} + C_{2213}\mathbf{s}_{13} + \cdots \\
& \mathbf{e}_{23} = C_{2311}\mathbf{s}_{11} + C_{2312}\mathbf{s}_{12} + C_{2313}\mathbf{s}_{13} + \cdots \\
& \mathbf{e}_{31} = C_{3111}\mathbf{s}_{11} + C_{3112}\mathbf{s}_{12} + C_{3113}\mathbf{s}_{13} + \cdots \\
& \mathbf{e}_{32} = C_{3211}\mathbf{s}_{11} + C_{3212}\mathbf{s}_{12} + C_{3213}\mathbf{s}_{13} + \cdots \\
& \mathbf{e}_{33} = C_{3311}\mathbf{s}_{11} + C_{3312}\mathbf{s}_{12} + C_{3313}\mathbf{s}_{13} + \cdots
\end{aligned} \right\} \\
& = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 C_{33kl} \mathbf{s}_{kl} = 3 \times 3 = 9 \text{項目の和}
\end{aligned}
\tag{2.7a}$$

のように表示されるめんどうな式を簡単に略記したものである。ここで材料定数 C_{ijkl} は 4 階のテンソル量であり、

$$C_{ijkl} = \{C_{1111}, C_{1112}, \dots, C_{3333}\} \text{の } 3^4 = 81$$

成分をもつことになる。

2.3 ベクトル・マトリックス表示

ここで、応力テンソル \mathbf{s}_{ij} , とひずみテンソル \mathbf{e}_{ij} の対称性、

$$\mathbf{s}_{ij} = \mathbf{s}_{ji} , \mathbf{e}_{ij} = \mathbf{e}_{ji} \tag{2.8}$$

から、応力ベクトル{ }, ひずみベクトル{ }を次のように表記する。

すなわち、

$$\{ \} = \{ \begin{matrix} x & y & z & xy & yz & zx \end{matrix} \}^T \tag{2.9}$$

$$\{ \} = \{ \begin{matrix} x & y & z & xy & yz & zx \end{matrix} \}^T \tag{2.10}$$

上式で上添字 T は転置(transpose) を示し、せん断成分として工学的ひずみを用いていることに注意されたい。これは、1 x , 2 y , 3 z のように書き換えるとともに、せん断成分を整理したものである。式(2.8)から、

$$C_{ijkl} = C_{jkl} , C_{ijkl} = C_{ijlk} \tag{2.11}$$

となり、 C_{ijkl} の独立な成分は、 $6 \times 6 = 36$ 個となる。そこで、これを構成マトリックス [C] で表し、次のようなベクトル・マトリックス表示を用いると、視覚的にも分かりやすい。

$$\begin{array}{c}
 \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} \mathbf{g}_{xy} \\ \mathbf{g}_{yz} \\ \mathbf{g}_{zx} \end{pmatrix}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ \hline C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} \mathbf{s}_x \\ \mathbf{s}_y \\ \mathbf{s}_z \\ \hline \mathbf{t}_{xy} \\ \mathbf{t}_{yz} \\ \mathbf{t}_{zx} \end{bmatrix}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \updownarrow \\
 \text{垂直成分} \\
 \text{(normal component)} \\
 \text{せん断成分} \\
 \text{(shear component)}
 \end{array}
 \quad (2.12)$$

6成分
36成分
6成分

さらに、材料定数の対称性

$$C_{(ij)(kl)} = C_{(kl)(ij)} \quad (2.13)$$

から、材料定数は 21 個と減じ、式(2.12)における[C]は対称マトリックスとなる。この 21 成分が、一般化比例弾性体(generalized hooke's law)の独立な弾性定数の数となる。

弾性体の多くは対称性をもつことがあるが、一つの面に対称な場合には 13、三つの互いに直交する面について対称な場合 9、全ての方向について対称な場合(すなわち等方弾性体)には 2 つにそれぞれ減少する。

また、垂直成分(normal component)とせん断成分(shear component)との間に交叉効果(cross effect)がないことから、

$$C_{14} = C_{15} = C_{16} = C_{24} = C_{25} = C_{26} = C_{34} = C_{35} = C_{36} = 0 \quad (2.14)$$

となり、せん断成分どおしが独立で非対角項をもたないことから、

$$C_{45} = C_{46} = C_{56} = 0 \quad (2.15)$$

となるので、このときの材料定数は 12 個となる。

対角成分についても、式(2.14),(2.15)が成立することはいうまでもない。すなわち、

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{65} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

このような場合として直交異方性弾性材料があり、これは材料試験で得られる異方性主軸の縦弾性係数 E_1, E_2, E_3 、せん断弾性係数 G_{23}, G_{31}, G_{12} 、ポアソン比 $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}, \nu_{21}, \nu_{31}, \nu_{32}$ を用いて、次の形に表すことができる。

$$[C]=\begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_1 & -\nu_{13}/E_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{21}/E_2 & 1/E_2 & -\nu_{23}/E_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{31}/E_3 & -\nu_{32}/E_3 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix}$$

(2.17)

上式では、工学的せん断ひずみが用いられており、 $\nu_{ij} = \nu_{ji} G_{ij} / G_{ji}$ なる関係式にて表示していることを付記し、以降のマトリックス式ではすべてこのようにする。ただし、対称性から $\nu_{12}/E_2 = \nu_{21}/E_1$, $\nu_{31}/E_3 = \nu_{13}/E_1$, $\nu_{32}/E_3 = \nu_{23}/E_2$

(2.18)

なる関係があり、直交異方性体(orthotropic material)の材料定数 12 個のうち、9 つのみが独立と言える。また、かりにすべてのポアソン比 ν_{ij} がゼロだとすると(すなわち異方性主軸間の交叉効果がない場合を考えると)これは、

$$[C]=\begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}^{-1}$$

(2.19)

のような対角項のみが存在し、全く独立な 6 成分の集合体であることを意味する。

ここで、式(2.17)にもどり、これが積層材や押し出し成形材のように、ある面内では等方でその直交方向(ここではx軸)のみ異方性をもつ場合、これを面内等方性(transversely isotropic)と呼び、次のように表される。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \\ \mathbf{g}_{yz} \\ \mathbf{g}_{zx} \\ \mathbf{g}_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E' & -\nu'/E' & -\nu'/E' & 0 & 0 & 0 \\ -\nu'/E' & 1/E & -\nu'/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu'/E' & -\nu'/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu)/E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G' \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{s}_x \\ \mathbf{s}_y \\ \mathbf{s}_z \\ \mathbf{t}_{yz} \\ \mathbf{t}_{zx} \\ \mathbf{t}_{xy} \end{pmatrix}$$

(2.20)

上式では、yz内面で等方(E, ν)とし、x軸方向に異方性(E', ν')をもつも

ので、y z 内面のせん断成分については、

$$G = \frac{E}{2(1+n)}$$

なる置換えをほどこしている。

従って、このような材料は、y z 内面で回転対称(rotational symmetry)の性質をもち、独立な材料定数は5個である。

さらに、完全な等方材料(isotropic material)は、見かけ上 E , ν , G なる3個の定数をもつが、上述のようにGを消去すると、2個の材料定数で記述することができ、

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \\ \mathbf{g}_{yz} \\ \mathbf{g}_{zx} \\ \mathbf{g}_{xy} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -n & -n & 0 & 0 & 0 \\ -n & 1 & -n & 0 & 0 & 0 \\ -n & -n & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+n) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+n) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+n) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{s}_x \\ \mathbf{s}_y \\ \mathbf{s}_z \\ \mathbf{t}_{yz} \\ \mathbf{t}_{zx} \\ \mathbf{t}_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

のように表現することができる。剛性表示を得るには、これを逆変換すればよく、剛性マトリックス[D]のみを示せば、次式となる。

$$[D] = \frac{E}{1+n} \begin{bmatrix} (1+\nu)/(1-2\nu) & \nu/(1-2\nu) & \nu/(1-2\nu) & 0 & 0 & 0 \\ \nu/(1-2\nu) & (1-\nu)/(1-2\nu) & \nu/(1-2\nu) & 0 & 0 & 0 \\ \nu/(1-2\nu) & \nu/(1-2\nu) & (1-\nu)/(1-2\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

また、このような E, ν による表示の代わりに、体積弾性率(bulk modulus)K とせん断弾性率(shear modulus)G の2定数を用いて表すことができ、次式となる。

$$K = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

そして、これら弾性定数間には、次のような関係がある。

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

もしくは、

$$E = \frac{9KG}{3K+G}, \quad \nu = \frac{3K-2G}{6K+2G}$$

式(2.21)のような K,G による剛性表示は、体積成分(体積変化)とせん断成分(形状変化)を分離して考える場合に有効となり、コンクリート、岩盤、土質などの建設材料によく用いられる。

上記の弾性定数に加えて、ラーメの定数 ν 、 μ を含めた相互関係を表 2.1 に示す。

表 2.1 : Relationship between various elastic constants

	E ,	K, G	ν, μ
E ,		$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$	$\nu = \frac{nE}{(1-2n)(1+n)}$ $\mu = \frac{E}{2(1+n)}$
K , G	$E = \frac{9KG}{3K+G}$ $= \frac{3K-2G}{2(3K+G)}$		$\nu = K - \frac{2}{3}G$ $\mu = G$
ν, μ	$E = \frac{m(2m+3I)}{m+I}$ $= \frac{I}{2(m+I)}$		

2.4 2次元、1次元場での構成方程式

次は、以上までの3次元表示を順次2次元、1次元に縮退させることを考える。x y 面内の2次元平面問題を考えると、これは、z軸方向の垂直成分とせん断成分の処理方法により、平面応力と平面ひずみの2つの方法に分けられる。

平面応力場(plane stress state)では、z方向の応力をゼロ(すなわち、 $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ 、従

って $\epsilon_{yz} = \epsilon_{zx} = 0$ であるが、 $\epsilon_z \neq 0$) とすることにより、次式を得る。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{g}_{xy} \end{pmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{s}_x \\ \mathbf{s}_y \\ \mathbf{t}_{xy} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{s}_x \\ \mathbf{s}_y \\ \mathbf{t}_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{g}_{xy} \end{pmatrix}$$

(2.24)

また、このときの ϵ_z は、

$$\epsilon_z = -(\epsilon_x + \epsilon_y) / E$$

で与えられる。

これに対して、z軸方向成分のひずみをゼロ(すなわち、 $\epsilon_z = \epsilon_{yz} = \epsilon_{zx} = 0$ 、従って、

$\epsilon_{yx} = \epsilon_{xz} = 0$ であるが、 $\epsilon_z \neq 0$) とすると、今度は、平面ひずみ場(plane strain state)と

なり、次式で与えられる。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{g}_{xy} \end{pmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{s}_x \\ \mathbf{s}_y \\ \mathbf{t}_{xy} \end{pmatrix}$$

(2.25)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{s}_x \\ \mathbf{s}_y \\ \mathbf{t}_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1+\nu} \begin{bmatrix} (1-\nu)/(1-2\nu) & \nu/(1-2\nu) & 0 \\ \nu/(1-2\nu) & (1-\nu)/(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{g}_{xy} \end{pmatrix}$$

このとき、z軸方向は固定しているので、応力が非零となり、これは

$$\sigma_z = E(\epsilon_x + \epsilon_y) / (1 + \nu)(1 - 2\nu)$$

で表される。

平面応力は、平面部材のように面外方向の応力が解放されている場合に該当し、平面ひずみは、地盤内の直線トンネルのように、軸方向に一様形状を有し、かつその方向に変位を生じないように拘束されている場合に用いられる。ここで、両状態を比較するために、

平面ひずみ場での材料定数を E' , ν' のようにダッシュをつけて区別すると、これは、

$$E' = \frac{1+2\nu}{(1+\nu)^2} E, \quad \nu' = \frac{\nu}{1+\nu}$$

$$E = \frac{E'}{1-\nu'^2}, \quad \nu = \frac{\nu'}{1-\nu'}$$

のような関係をもつ。これらが実際にはどの程度相違するかは、ポアソン比に適切な値を入れて試算すればよく、例えば、

$$= 1/6 \text{ のとき、 } E' = 0.980E, \quad \nu' = 0.143$$

$$= 0.3 \text{ のとき、 } E' = 0.946E, \quad \nu' = 0.231$$

となり、大きな違いはないと言える。

また、軸対称問題(axisymmetric problem)では、通例、 z を回転軸方向座標、 r をその半径方向座標、 θ を z 軸まわりの角度座標とし、

$$\text{応力ベクトル: } \{ \sigma \} = \{ \sigma_z \quad \sigma_r \quad \sigma_\theta \quad \tau_{rz} \}^T$$

$$\text{ひずみベクトル: } \{ \epsilon \} = \{ \epsilon_z \quad \epsilon_r \quad \epsilon_\theta \quad \gamma_{rz} \}^T$$

のような4成分となる。そしてこのときの構成方程式は、

$$\begin{pmatrix} \sigma_z \\ \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{pmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_z \\ \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{pmatrix}$$

(2.26)

のように示される。

また、このような等方材料でポアソン効果を考えないと、各座標系の垂直成分やせん断成分が独立することを意味し、これは、

$$= E_e, \quad = G \quad (2.27)$$

と表示することに他ならない。これは、単軸弾性体の構成方程式である。

以上、式(2.4) ~ (2.27)の展開は、また式(2.1)において示した構成方程式3者の関係を詳述したものである。