理学部数学科2000前期 計算数学1[1]

担当：辻下　徹[2]

目 次

数理論理学の初歩

14 述語論理

14.1 論理式

14.1.1

１階の言語 L：作用素型 (Ω, α_Ω) と述語型 (Π, α_Π) から成る。

- Ω は有限集合
- $\alpha_\Omega : \Omega \to \mathbf{N}$ は写像。
- Π は有限集合
- $\alpha_\Pi : \Pi \to \mathbf{N}$ は写像。

$\Pi_n := \left\{ P \in \Pi \;\middle|\; \alpha_\Pi(P) = n \right\}$ の要素をアリティn の述語記号と呼ぶ。アリティ0 の述語記号を命題定数と呼ぶ。

変数集合 $\{ x, y, z, \ldots \}$ と作用素型 Ω から定まる項を、**１階の言語** L **の項**と呼ぶ。

１階の言語 L の**原始論理式**は次の２種類

- $t = s$, ただし、t, s は項。
- $P(t_1, \ldots, t_n)$, ただし、P はアリティn の述語記号。

L **の論理式**は、

[1] URL:`http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/doc/announce/cs00.html`
質問提出アドレス:`cs2000@fcs.math.sci.hokudai.ac.jp`

[2] Email:`tujisita@math.sci.hokudai.ac.jp`,
Homepage:`http://fcs.math.sci.hokudai.ac.jp/tjst/`

- 原始論理式
-

命題定数 $|\neg$論理式 $|$ 論理式$\wedge$論理式 $|$ 論理式$\vee$論理式 $|$ 論理式 $\Rightarrow$ 論理式 $|\forall x$[論理式]$|\exists x$[論理式]

ただし、x は変数。

14.1.2 自由変数と束縛変数

論理式には変数が出現する。同じ変数が何箇所かに出現することがある。出現箇所ごとに自由変数か、束縛変数か、（出現箇所が自由か束縛か）を以下のように定義する。論理式の構成についての帰納法で定義するが、変化するのは、自由変数が束縛変数になる方向だけである。

- 原始論理式における変数はすべて自由変数。
- 量化記号を付ける以外の構成では、変化しない。
- $\forall x[P], \exists x[P]$ のとき、P 内の x の自由な出現箇所は束縛となり、そこの x は束縛変数となる。

例：次の論理式の中の自由変数はどれか？

$$\forall x[P(x,y,z) \rightarrow \exists x[Q(x,y) \wedge \forall y[x=y \Rightarrow z=y]]]$$

自由変数を含まない論理式を**文**と呼ぶ。

14.2 L-構造

L を 1 階の言語とする。$\{\ \mathcal{A}, \omega_{\mathcal{A}}, P_{\mathcal{A}}\ \}$ が L-構造とは：

- $|\mathcal{A}|$ は集合 (台集合と呼ばれる),
- $\omega \in \Omega_n$ に対し、
  - $n=0$ のときは、$\omega_{\mathcal{A}} \in |\mathcal{A}|$.
  - $n>0$ のときは、$\omega_{\mathcal{A}} : |\mathcal{A}|^n \rightarrow |\mathcal{A}|$.
- $P \in \Pi_n$ に対し
  - $n=0$ のときは、$P_{\mathcal{A}} \in \{\ 0, 1\ \}$.
  - $n>0$ のときは、$P_{\mathcal{A}} : |\mathcal{A}|^n \rightarrow \{\ 0, 1\ \}$.

14.3 論理式の解釈

L を 1 階の言語、$\mathcal{A}$ を L-構造とする。

変数の一部 に $|\mathcal{A}|$ の要素を割り当てることを**代入データ**と呼ぶ。変数 $\{\ x, y\ \}$ にだけ要素を割り当てる代入データ σ は、$|\mathcal{A}|$ の元の対 $\langle \sigma(x), \sigma(y) \rangle$ と 1 対 1 に対応する。

代入データ σ により値が割り当てられる変数を、σ-変数[3]と呼ぶ。

σ を代入データとし、項 t に出現する変数は皆 σ-変数であるとき、代入によって、$t_{\mathcal{A}} \in |\mathcal{A}|$ が定義された。さらに、論理式 ϕ が自由変数 $x_1, \ldots, x_n$ を含み、これらが σ-変数のとき、$\phi[\sigma] \in \{0, 1\}$ が以下のように定まる。

- ϕ が $P(t_1, \ldots, t_n)$ のときは、$\phi[\sigma] = P_{\mathcal{A}}(t_1[\sigma], \cdots, t_n[\sigma])$.
- ϕ が $t_1 = t_2$ のときは、$t_1[\sigma] = t_2[\sigma]$ のとき、$\phi[\sigma] = 1$ そうでないとき $\phi[\sigma] = 0$.
- $\phi = \neg\phi_1$ のとき、$\phi[\sigma] = 1 - \phi_1[\sigma]$.
- $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$ のとき、$\phi[\sigma] = \phi_1[\sigma] \wedge \phi_2[\sigma]$.
- $\phi = \phi_1 \vee \phi_2$ のとき、$\phi[\sigma] = \phi_1[\sigma] \vee \phi_2[\sigma]$.
- $\phi = \phi_1 \Rightarrow \phi_2$ のとき、$\phi[\sigma] = \phi_1[\sigma] \Rightarrow \phi_2[\sigma]$.
- $\phi = \forall x \phi_1$ のとき
  - ϕ_1 における x の出現はすべて自由であるときは、
  $$\phi[\sigma] = \min\left\{ \phi_1[\sigma_a] \;\middle|\; \text{変数代入}\sigma_a\text{は、}x\text{ に }a\text{ を代入する以外は}\sigma\text{と同じ} \right\}$$
  - ϕ_1 における x の出現で束縛されているものがあるときは、新しい変数 y を用意して、ϕ_1 内の自由な x を y に置き換えたものを ϕ_2 とし、$\forall x[\phi_1][\sigma] = \forall y[\phi_2][\sigma]$ と定義する。
- $\exists x[\phi][\sigma] = 1 - \forall x[\neg\phi][\sigma]$

変数代入 σ で $\phi[\sigma] = 1$ となるとき、$\sigma \models \phi$ と書く。ϕ が文のときは、変数代入 σ によらず $\phi[\sigma]$ が定まる。これが 1 のとき、

$$\mathcal{A} \models \phi$$

と書き、ϕ は**L-構造 $\mathcal{A}$ で正しい**という。

14.3.1 例

作用素型は空集合で、述語記号はアリティ 2 の P だけとする。$|\mathcal{A}|$ を過去に生まれた人間の全体とする。$P_A(x, y)$ を x が y の親のとき 1, そうでないときは 0 とする。次は、$\mathcal{A}$ では何を意味するか？正しいか？

1. $\exists x[P(x, y) \wedge P(x, z)]$,
2. $\forall y \exists x[P(x, y)]$,
3. $\forall x \exists y \exists z[P(y, x) \wedge P(z, x) \wedge \neg(y = z)]$,
4. $\forall x \forall y[P(x, y) \Rightarrow \neg P(y, x)$

[3]ここだけの言葉です。

質疑

すべてには回答していません。

[**Q15-1**]() 世界の状態と構造の違いがわかりません。

(質問理由：例えば、1つの質問に対して、世界の状態は Yes or No の2通りしかないというのはわかりますが、世界の構造が4通りになるというのがわかりません。Yes と No の他に何があるのですか。)

[**A15-1**] 状態は変化します。どういう状態が顕れるか、という点だけについて言えば、Yes の状態だけの世界、No の状態だけの世界、Yes の状態も No の状態もある世界、の3通りがあります。そして、仮想的には、何の状態もない世界、というものも考えた方がよい場合もありますが、ここでは、それは世界の構造とは考えないことにしました。

[**Q15-2**]() リテラルは論理式なのに、世界の状態でもあるのはわからない。

[**A15-2**] リテラルという論理式で世界の状態が完全に表現できるので、それを同じものであるかのような言い方をしてしまいました。区別すべきものです。論理変数が P, Q のとき、世界の状態が $(1, 0)$ ということを「第一成分は１、第二成分は０」と表現できますが、これは論理式では $P \wedge \neg Q$ と表現できます。つまり、状態とリテラルとが１対一に対応するのです。

[**Q15-3**](多数) 論理変数が２つのとき世界の状態が４個というはわかるが、構造が１６個というのが理解できない

[**A15-3**] 「世界の状態」は、ある瞬間での世界の状態だと考えています。世界の状態は時間と共に変わります。しかし、論理的には有りうるが実際には起こらない状態というものもあり得ます。それが起こらない理由は世界に構造があるからだ、と考えるわけです。ここから、「世界の構造」を、「その世界で起こりうる状態の全体」によって記述するという発想が生まれます。そうすると、世界の状態が４個であれば、この４個の状態の中でどれが起こりうるか、その可能性は $2^4 = 16$ 個あります。

[**Q15-4**](多数) なぜ、可能な状態が全くない世界も構造に入れないのか。つまり、２変数のとき、なぜ、１５個の世界の構造があると言い、１６個の世界の構造がある、と言わないのか？

[**A15-4**] これは、ゼロを数と呼ぶかどうか、空集合を集合と呼ぶかどうか、と同じようなものです。あり得ない世界も世界の構造として考えた方が、数学としては便利です。ここは、どちらが正しいか、ではなく、どちらにすれば「世界の構造」という概念が使いやすいものになるか？という問題です。ここでは、わかりやすさを優先して、「可能な状態が全くない世界」という謎々は避けることにしました。

[**Q15-5**]() 命題変数が１個のときは、世界の構造は $2^2 - 1$ 個なのに、命題変数が n 個で $n > 1$ のときはどうして $2^{2^n} - 1$ ではないのか。

[**A15-5**] これは資料の間違いです。§13.4.2 は 世界は１５通りで、§13.4.3 は $2^{2^n} - 1$ 個。

[**Q15-6**]() 最近、特に数学が難しく感じます

(質問理由：講義・テキストなどを見ても、意味が理解しにくいです。こういう場合はどういった方法で勉強すればよいでしょうか？)

[**A15-6**] わかるところまで戻るしかありません。一年の数学がわからないのならそこに戻るしかありません。それから、質問にいくことが重要です。どこがわからないか自分ではわからなくても聞きにいくべきです。独学のために大学に来ているわけではないのですから。

[**Q15-7**](22970041) トートロジーということは「寒いか？」と「雪が降っているか？」の関係と同じことですか。

(質問理由：「雪が降っている」は「寒い」か否かによって変化する。寒ければ、降るかもしれないし降らないかもしれないが、寒くないのに雪が降ることはない。つまり、「雪が降る」は「寒い」により導かれるのでは？もしもそうであれば、トートロジーのときは、それぞれの命題には関係があるため、世界の状態は 2^n より少なくなるのではないか？)

[**A15-7**] まず、トートロジーという言葉の使い方を間違えています。トートロジーは論理式の性質です。

「「雪が降っている」ならば「寒い」」はトートロジーではなく、私たちの世界の性質です。トートロジーはどの状態でも正しいのですから、世界についての情報を表す能力はありません。しかいい、一方では、どんな世界でも正しい主張である、という点で、純粋に論理的な主張だ、という言い方もできるわけです。「寒い」ならば「寒い」、というのが典型的なトートロージです。

また、2^n は、n この変数で世界を観測したときに、観測値が取りうる数〔論理的に可能な観測値の組合わせの数）に過ぎません。そして、命題に「関係がある」ことが、世界に構造があることの顕れであり、そのとき、起こりうる状態の数は 2^n より少なくなるわけです。

[**Q15-8**]()13.11 の幾何学は代数学の誤りではないでしょうか。理論 $\mathcal{T}$ とイデアル $\mathcal{I}$ の類似というのは、見た目ではなく機能的なところのことですか。だとしたら、論理式と多項式の類似というのも機能的な部分での類似ということですか。

(質問理由： 論理式と多項式の類似は単に見た目だけのように思えます。)

[**A15-8**] 「代数幾何学」（　多項式のゼロ点集合の理論）も、幾何学の中に入れて考えることが普通です。

「類似」〔アナロジー）の役割は種々です。今の場合は、n-論理変数から作られる論理式が、$\mathbf{B}^n$ の部分集合を定めるわけですが、これは、丁度 n-変数多項式が n 次元空間の代数的集合を定めるのと似ています。

[**Q15-9**]()$\phi \vee \psi$ は ϕ, ψ の上限という記述がありますが、命題変数の上限とはどういうものですか。

[**A15-9**] 「または」ということです。$\models \alpha \Rightarrow \beta$ のとき、β は α より大きい、と言う言い方をするとき、ϕ, ψ は $\phi \vee \psi$ より小さいので、$\phi \vee \psi$ は ϕ, ψ の上界。また、α が ϕ,ψ の上界であれば、すなわち、$\phi \Rightarrow \alpha$ と $\psi \Rightarrow \alpha$ が共に正しければ、$\phi \vee \psi \Rightarrow \alpha$ も正しい（なぜか？）。よって、$\phi \vee \psi$ は最小上界である。

[**Q15-10**](22980013) 人間の脳やコンピュータも、リテラルの集まりで世界の状態を表示しているのですか。

(質問理由：一般的に使われている「論理的」という言葉の意味がよくわかりません。yes-no で矛盾することなく世界を表示することが論理であるならば、人間の脳が論理的に世界を表示しているとは思えません。(あいまいな表示は論理に反すると思うので)。でも 13.4.1 〜13.6 を見ると、実は論理的なのかかな、と思いました。)

[**A15-10**] 「人間の脳が世界をどう表示しているか？」という問いは、問い自身の意味の哲学的吟味から、大脳生理学の研究まで、今のブレインサイエンスの中心的テーマです。

「リテラルの集まりで世界の状態を表示」しようとしているのは、脳ではなく私たちが学問的な活動においてしていることです。この考えかたは、「世界を認識する」ということを考えるときの一つの理念的モデルのようなものと考えるのが良いと思います。

「論理的」という言葉は、文脈で色々に使われます[4]。

講義では、論理変数の値は $\{\,0,1\,\}$ としましたが、現実世界での質問はかならずしも yes-no の答えはありません。その意味では、話しを単純化しているようですが、$2.3325 < x < 2.3326$ か?、という具合に実数を使えばいくらでも細かく世界を記述することはできます。

[**Q15-11**]() $\alpha \leq \beta \overset{def}{\Longleftrightarrow} \models \alpha \Rightarrow \beta$ は well-defined とあったが、何が well-defined か、よくわからなかった。

[**A15-11**] いま、論理式の論理同値類の上に二項関係 $\leq$ を定義しようとしています。代表元を使って上のように定義したが、これが、代表元の取り方によらない、という意味で、この定義により 2 項関係 $\leq$ が well-defined である、と言ったのです。

[**Q15-12**]()「暖かいが食べ物がない」と「暖かくて食べ物がない」を同じように使ってもよいのか？

(質問理由： 論理学では上の２つに違いがないのですか。ないのならどちらを使うのが望ましいのですか。)

[**A15-12**] 論理的にはどっちでも構いません。

「が」の意味は、命題論理の中では補足できません。日常的には、「暖かくて食べ物がない」という言い方はしませんね。これは、「暖かい」が心地よく快であり、「食べ物がない」は困ることで不快なので、我々は「暖かくて食べ物がない」は快と不快とが混じっていることを無意識に考慮に入れて「暖かいが食べ物がない」発言するわけです。しかし、この無意識の考慮は、生物的な善し悪しという観点からの対立であって、論理的な内容には影響することではないわけです。なお「食べ物がないが暖かい」と「暖かいが食べ物がない」の違いは政治的には重要なことです。

しかし、別の「が」の使い方があります。「雨が降っているが地面がぬれていない」。これも、論理的には「雨が降っている」そして「地面がぬれていない」という２つの事実の並列に過ぎませ

[4]**論理の語義**「古代ギリシア語の＜ロゴス＞に由来することばであるが、さまざまな意味にもちいられる。その一つは、ものごとのはたらき方というものであり、この意味では、自然法則のようなものが「自然の論理」といわれることがある。また話しの進め方というのもあり、この意味では、特定の個人の話し方のくせを指して「何某氏の論理」といってもよいことになる。学問での論証も、話の進め方の一種であるが、その中には、扱っている題目の内容とは無関係にその形式の故に正しいと思われるものがある。こういう論証は、前提から結論が出ることが直観的にも明らかな、ごく短い論証すなわち推論の積重ねに分析できるのであるが、この推論のうち、正しいものは、いくつかの形式のうちの一つをみたしているのである。これは、多くの人がさまざまな学問の領域で、また、政治や法廷、さらに日常生活での論争の経験を重ねている中に直観的に気付くことである。そこで、このような正しい推論の形式の体系のことを＜論理＞ということもある。
この正しい推論の形式を自覚的に整理分類することから生じた学問が＜論理学＞である。(以下略)」(岩波哲学辞典 p1755)

ん。しかし、「雨がふれば地面がぬれる」という知識を考慮に入れると、「雨が降っていて地面がぬれていない」という命題が真であるとき、思考はそれにとどまらずに「何かおかしい」と思うわけです。それが「が」に込められています。

この「が」については、「雨がふれば地面がぬれる」「雨が降る」「地面がぬれていない」の３つの命題は矛盾している、ということの表現とも言える。

[**Q15-13**]() トートロジーの定義がよくわかりません。$\psi_{\mathbf{B}} : \mathbf{B}^n \to \mathbf{B}$ が必ず１になる、という意味ですか.

(質問理由：$\varphi \Rightarrow \phi$ がトートロジーとはどの写像が定数写像１になるのですか？)

[**A15-13**] $\psi_{\mathbf{B}} : \mathbf{B}^n \to \mathbf{B}$ が必ず１になる、という意味です。

φ, ϕ が論理変数 $P_1, \ldots, P_n$ を含むとき、$\varphi_{\mathbf{B}}$,$\phi_{\mathbf{B}}$ は共に $\mathbf{B}^n \to \mathbf{B}$ という写像を定め、これより、$(\varphi \Rightarrow \phi)_{\mathbf{B}} : \mathbf{B}^n \to \mathbf{B}$ が定まります。これが必ず１になる、という意味です。