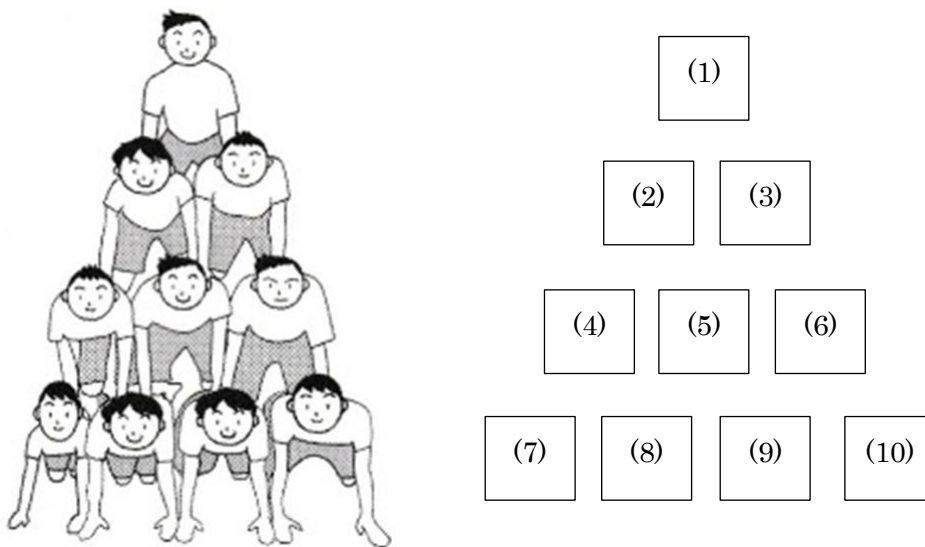


問 1

組体操で4段のピラミッド（平面型、俵積み）を10人で作ります。体重はみんな同じとします。そのとき、それぞれが何人分の重み（荷重）を受けるか計算してください。



(答え)

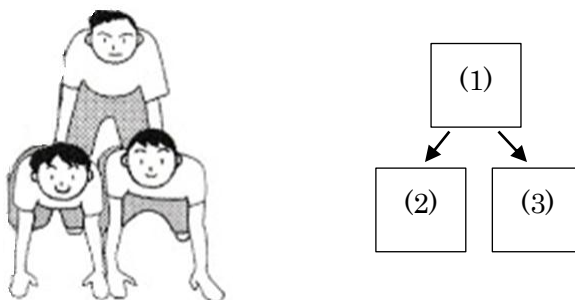
(1) 0, (2) 0.5, (3) 0.5, (4) 0.75, (5) 1.5, (6) 0.75, (7) 0.875, (8) 2.125, (9) 2.125, (10) 0.875

(考え方)

まず、2段（3人）で考えてみましょう。

(1)の上には誰も乗っていませんので、(1)の荷重は0（ゼロ）です。

(2)と(3)は(1)の体重の半分ずつを受けるので、荷重は0.5です。



(1) 0, (2) 0.5, (3) 0.5

ここまでは、誰でもわかりますね。

つぎは、3段（6人）で考えてみましょう。

(4)は(2)の半分の荷重を受けます。(2)が受ける荷重は0.5だからその半分だと早とちりしてはい

けません。(4)が(2)から受けるのは、(2)が受ける荷重 $0.5$ に(2)自身の重さ(自重といいます)  $1$ を足して、 $1.5$ として、 $1.5$ の半分の荷重を受けます。式では

$$(0.5 + 1) \div 2 = 1.5 \div 2 = 0.75$$

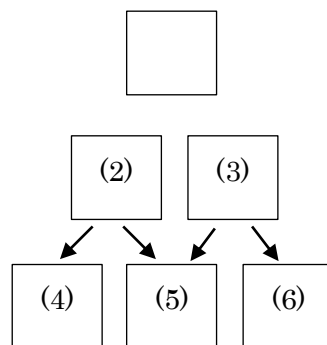
となります。

(5)は(2)の半分と(3)の半分の荷重を受けますので、

$$1.5 \div 2 + 1.5 \div 2 = 1.5$$

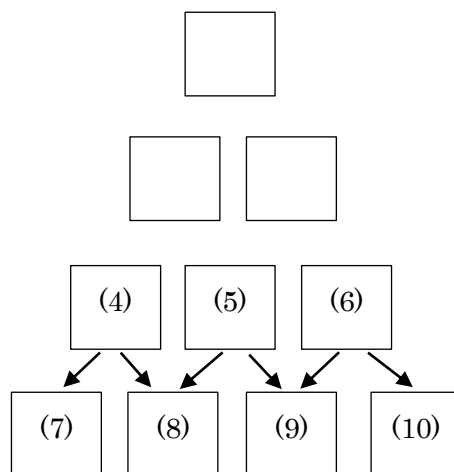
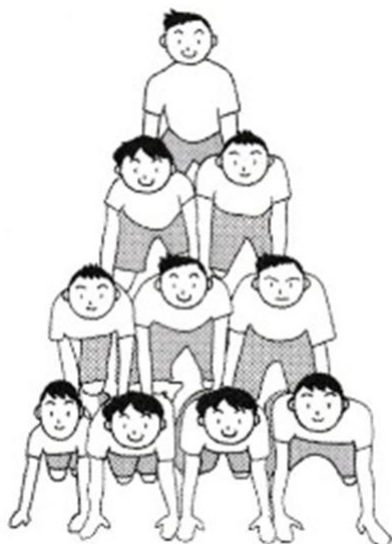
となります。

ピラミッドは左右対称ですので、(6)は(4)に等しく  $0.75$  になります。



(4)  $0.75$ , (5)  $1.5$ , (6)  $0.75$

つぎに、4段(10人)で考えてみましょう。



(7)は(4)の半分の荷重を受けます。(4)が受ける荷重 $0.75$ に(4)自身の重さ  $1$ を足して、 $1.75$ として、 $1.75$ の半分の荷重を受けます。式では

$$(0.75 + 1) \div 2 = 1.75 \div 2 = 0.875$$

となります。

(8)は(4)の半分と(5)の半分の荷重を受けるので、

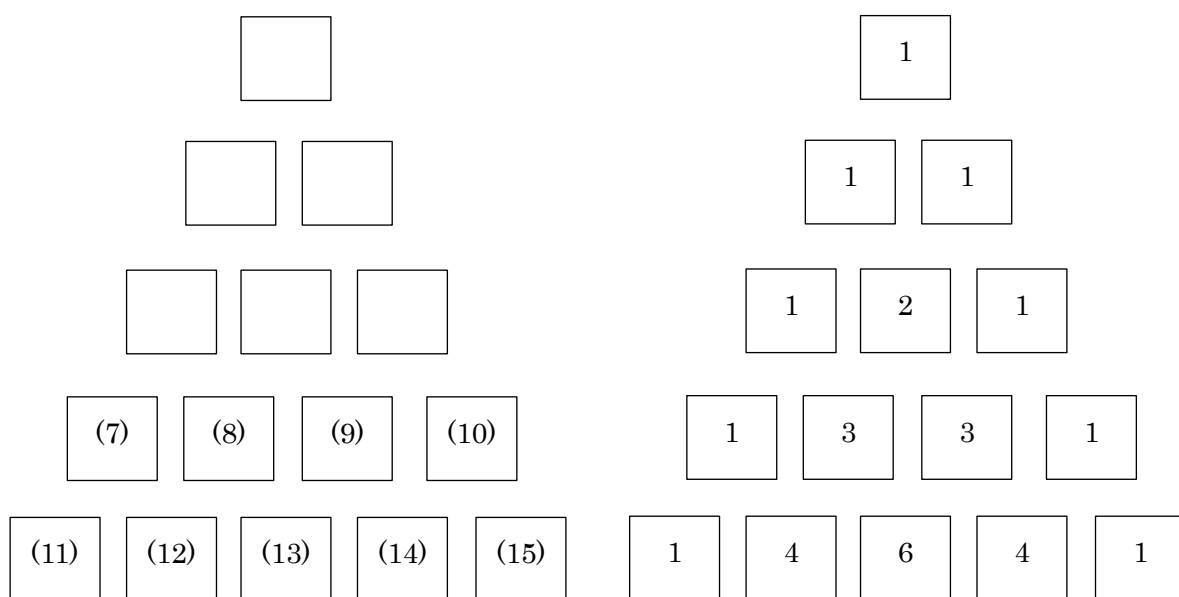
$$(0.75 + 1) \div 2 + (1.5 + 1) \div 2 = 1.75 \div 2 + 2.5 \div 2 = 0.875 + 1.25 = 2.125$$

となります。

ピラミッドは左右対称さゆうたいしょうですので、(9)は(8)に等しく 2.125 に、(10)は(7)に等しく 0.875 になります。

(7) 0.875, (8) 2.125, (9) 2.125, (10) 0.875

(発展問題) ピラミッドを 5 段にしたとき、最下段の人が受ける重みを計算してください。



パスカルの三角形

(答え)

(11) 0.9375, (12) 2.5, (13) 3.125, (14) 2.5, (15) 0.9375

高校数学 I A の数と式で学ぶ「パスカルの三角形」(二項展開における係数を三角状に並べたもの)を使うと直接、求めることができます。たとえば、(13)の荷重には 4 段上の 1 人、3 段上の 2 人、2 段上の 3 人、1 段上の 2 人が影響するとして、場合わけすると次のようになります。

$$\begin{aligned} & {}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 2 \times {}_3C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2 \times {}_2C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + {}_2C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times {}_1C_0 \left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{6}{16} + \frac{6}{8} + \frac{2}{4} + \frac{2}{4} + \frac{2}{2} = 3\frac{1}{8} = 3.125 \end{aligned}$$

問 2

組体操で4段のピラミッド（立体型、三角錐）を13人で作ります。体重はみんな同じとします。各自が腕に3、足に7の力をかけるものとします[1]。そのとき、それぞれが何人分の重み（荷重）を受けるか計算してください。

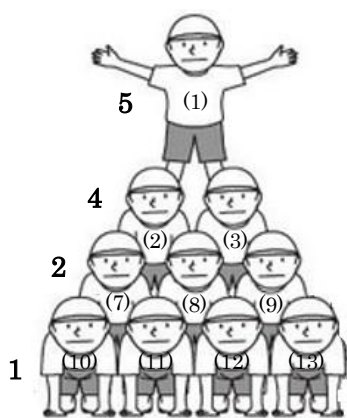


図 1. 正面からみた図

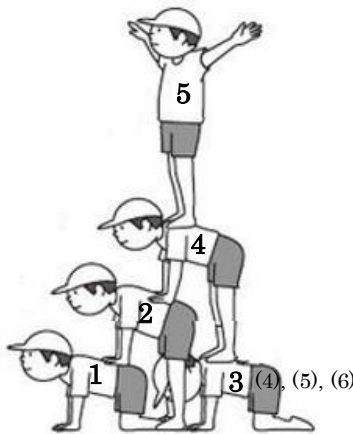


図 2. 横から見た図

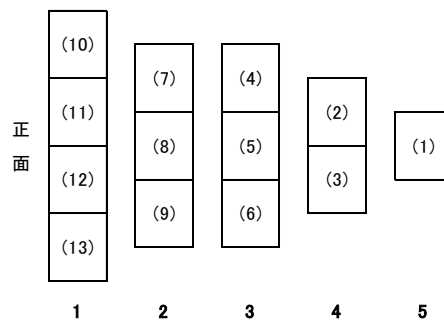


図 3. 上から見た図

(答え)

- (1) 0, (2) 0.5, (3) 0.5, (4) 0.525, (5) 1.05, (6) 0.525, (7) 0.225, (8) 0.45, (9) 0.225, (10) 0.18375, (11) 0.40125, (12) 0.40125, (13) 0.18375

(立体型の組み方)

立体型ピラミッドはつぎのような順序で作成されます。15人は5列に分けられます。

- 1 列目 (4人：(10), (11), (12), (13)) は、地面に四つん這いになります。
- 2 列目 (3人：(7), (8), (9)) は、足は地面で、1列目の背中に手を乗せます。
- 3 列目 (3人：(4), (5), (6)) は、四つん這いで、2列目の股の間に顔を入れます。
- 4 列目 (2人：(2), (3)) は、3列目の背中に乗り、2列目の背中に手を乗せます。
- 5 列目 (1人：(1)) は、4列目の背中に乗ります。

構成する人数は、 $4 + 3 + 3 + 2 + 1 = 13$  で13人です。

正面からは3列目の(3), (4), (5)が隠れています。横断面図の1は4人、2は3人、3は3人、4は2人、5は1人です。1列目と2列目は半人分ずつずれています。2列目と4列目、4列目と5列目も半人分ずつずれています。

(考え方)

最上段の4段目の(1)から計算を始め、1段目へ降りていきます。列で言うと5列目から1列目へ戻っていきます。

**5 列目 :**

(1)の上には誰も乗っていませんから、(1)の荷重は0(ゼロ)です。

**4 列目 :**

(2)と(3)の上には(1)が両足をまたいで乗っていますから、荷重はともに0.5になります。

**3 列目 :**

(4)は3列目で正面からは隠れて見えませんが、正面に向かって(2)の右足が乗っています。(2)の荷重が0.5であり、(2)の自重1を加え、足に7割の力が加わり、片足ですから、(4)の荷重は

$$(0.5 + 1) \times 0.7 \div 2 = 0.525$$

になります。

(5)は(2)の左足と(3)の右足が乗っています。(2)と(3)の荷重はともに0.5であり、自重1を加え、足に7割の力が加わり、両足から力を受けるので、(5)の荷重は

$$(0.5 + 1) \times 0.7 \div 2 + (0.5 + 1) \times 0.7 \div 2 = 1.05$$

になります。

(6)の荷重は対称性により(4)と等しく0.525になります。

**2 列目 :**

(7)は(2)の右手が乗っています。(2)の荷重は0.5であり、自重1を加え、手に3割の力が加わり、片手から力を受けるので、(7)の荷重は

$$(0.5 + 1) \times 0.3 \div 2 = 0.225$$

になります。

(8)は(2)の左手と(3)の右手が乗っています。(2)と(3)の荷重はともに0.5であり、自重1を加え、手に3割の力が加わることで、両手から力を受けるので、(8)の荷重は

$$(0.5 + 1) \times 0.3 \div 2 + (0.5 + 1) \times 0.3 \div 2 = 0.45$$

になります。

(9)の荷重は対称性により(7)と等しく0.225になります。

**1 列目 :**

(10)は(7)の右手が乗っています。(7)の荷重は0.225であり、自重1を加え、手に3割の力が加わり、片手から力を受けるので、(10)の荷重は

$$(0.225 + 1) \times 0.3 \div 2 = 0.18375$$

となります。

(11)は(7)の左手と(8)の右手が乗っています。(7)の荷重は0.225であり(8)の荷重は0.45であり、自重1を加え、手に3割の力が加わることで、両手から力を受けるので、(11)の荷重は

$$(0.225 + 1) \times 0.3 \div 2 + (0.45 + 1) \times 0.3 \div 2 = 0.40125$$

となります。

(12)は対称性により、(11)の荷重と等しくなります。

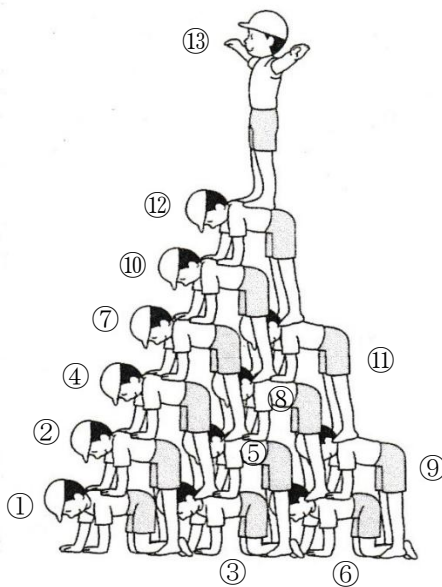
(13)は対称性により、(10)の荷重と等しくなります。

(発展問題)

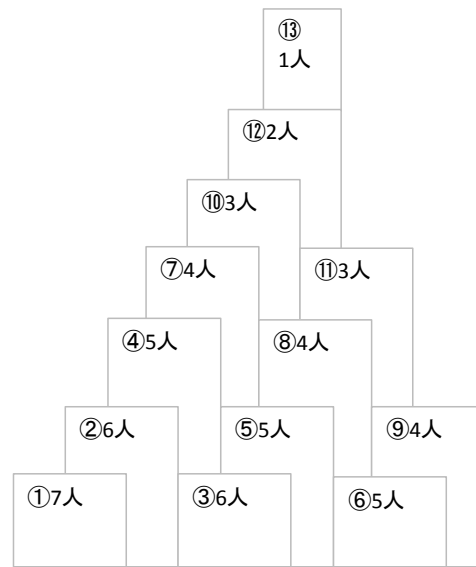
問2のような組み方で段数を7段としたとき、図2のような横から見た図と、図3のような上から見た図を作成し、合計何人必要かを求め、各自の荷重と、最大荷重を計算してください。

エジプトの古代ピラミッドは四角錐ですが、近年、開発された人間ピラミッド（立体型）には四角錐のもの[3]と三角錐のもの[2][4]があります。三角錐は人数が少なくて済むので普及しています。ここでは、三角錐の7段の荷重計算を説明します。

まず、横から見た図は、下図のようになります。



根本正雄編（明治図書）[2] p144



構成図

[列と番号]

全体の55人は、13列に分けられます。1列目（最下段）から13列目（最上段）を、展開すると次のようになります。

1												
2	8	14										
3	9	15	20	25	30							
4	10	16	21	26	31	35	39	43				
5	11	17	22	27	32	36	40	44	47	50		
6	12	18	23	28	33	37	41	45	48	51	53	
7	13	19	24	29	34	38	42	46	49	52	54	55
①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	⑪	⑫	⑬

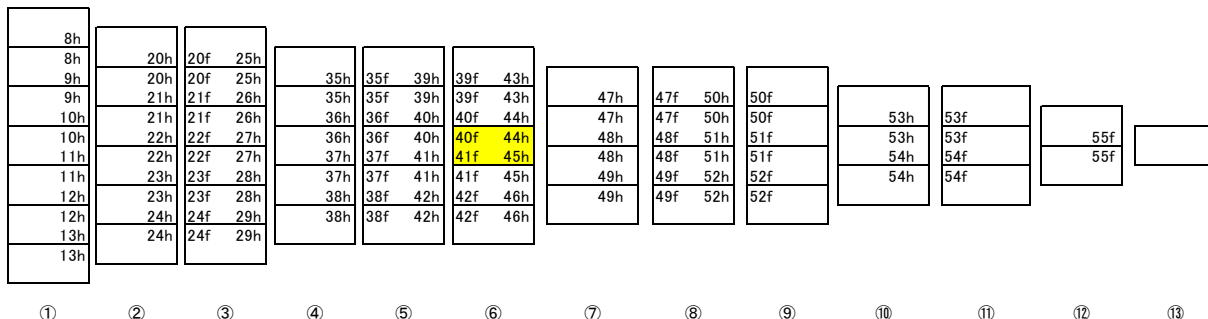
1列目は7人、2列目～3列目は6人ずつ、4列目～6列目は5人ずつ、7列目～9列目は4人ずつ、10列目～11列目は3人ずつ、12列目は2人、13列目は1人で、

$$7 + 6 \times 2 + 5 \times 3 + 4 \times 3 + 3 \times 2 + 2 + 1 = 55$$

となります。1列目から13列目まで順番に組んでいきます。

**【関連づけ】**

つぎに、それぞれの生徒の背中には、何番目の生徒の手や足が乗っているかの関連づけをします。たとえば、6列目 32番の生徒には、8列目 40番の左足（40f）と、41番の右足（41f）、9列目 44番の左手（44h）、45番の右手（45h）が乗っています。



**【4つの荷重】**

荷重計算は最上段である13列目の55から始めます。55の上には誰も乗っていませんから荷重は0です。つぎに12列目の54は1の片足が乗っていますから荷重は0.5、53も同じく荷重は0.5です。11列目の50は50の片足が乗っていますが、腕に3足に7の割合で重みがかかりますので[1]、

$$(0.5 + 1) \times 0.7 \div 2 = 0.525$$

となります。このように、関連づけを参照しながら上から下へ荷重計算を進めていきます。

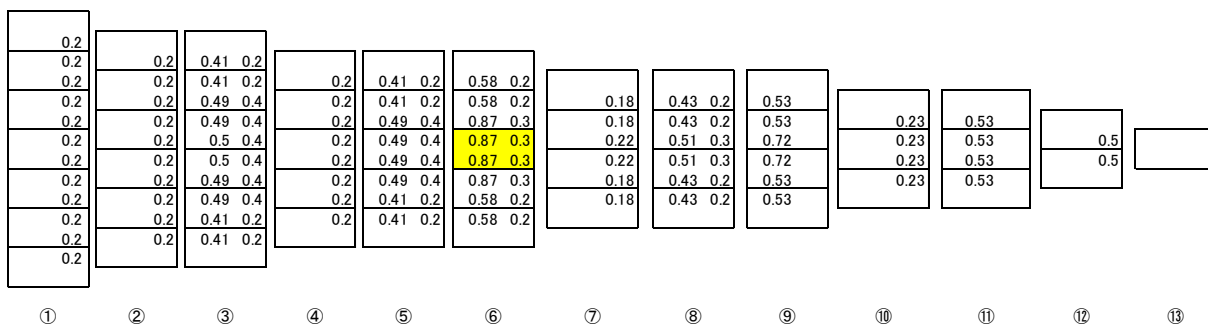
6列目 32の生徒にかかる4つの荷重（40f, 41f, 44h, 45h）はつぎのようになります。

$$40f = (40 \text{ の荷重} + 1) \times 0.7 \div 2$$

$$41f = (41 \text{ の荷重} + 1) \times 0.7 \div 2$$

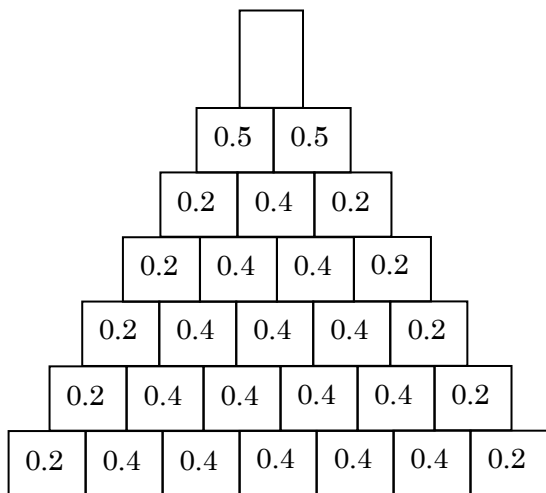
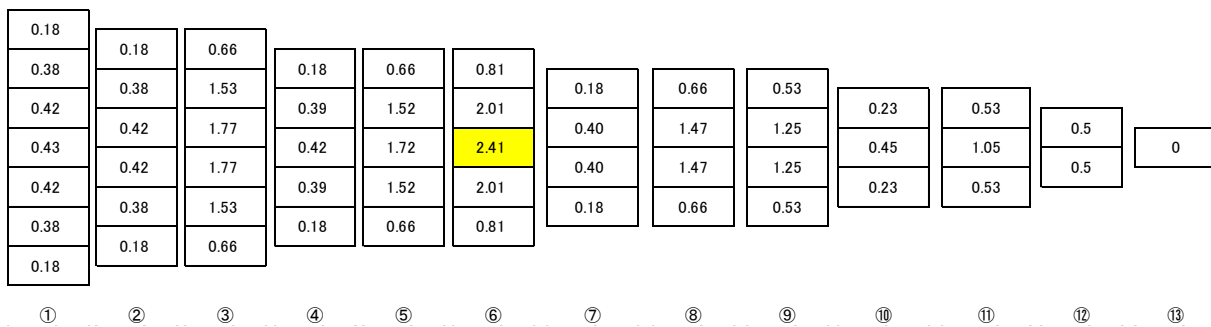
$$44h = (44 \text{ の荷重} + 1) \times 0.3 \div 2$$

$$45h = (45 \text{ の荷重} + 1) \times 0.3 \div 2$$

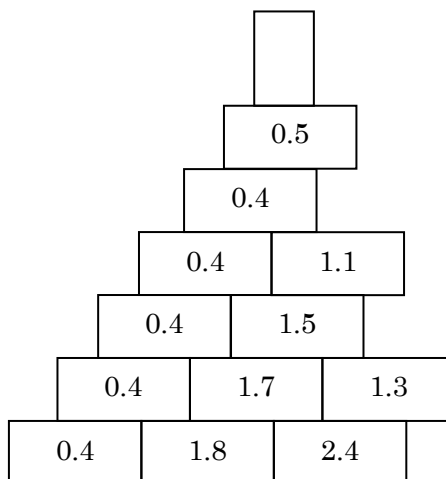


**【合計する】**

このようにして計算した4つの荷重を合計したものが、その生徒の荷重になります。最大荷重は6列目 32の生徒で2.41人分になります。最下段、前列中央（1列目 4）の荷重は0.43人分であり、平面型と立体型は荷重が大幅に違うことに注意してください。

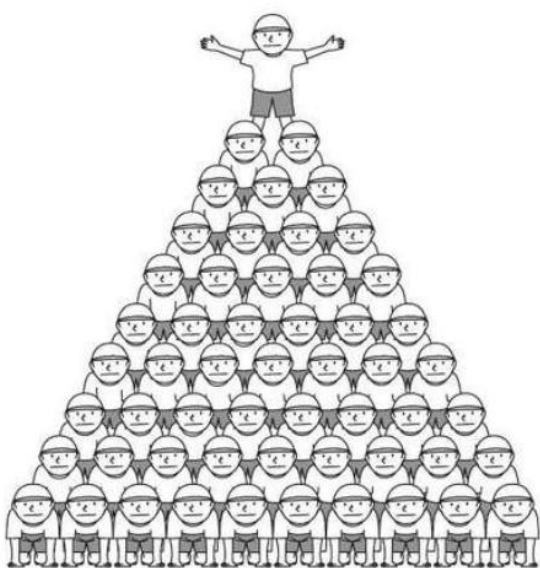


正面から見た 28 人の負荷量 (立体型 7 段)

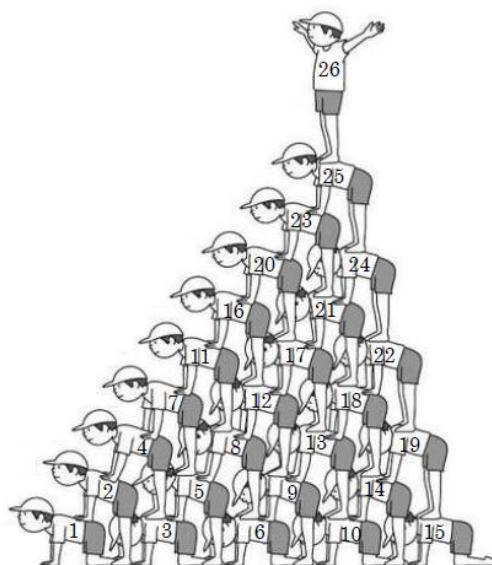


横断面の 13 人の負荷量

10 段 (151 人) の荷重計算 (小数点以下 1 桁に丸めた)



正面図 (10 段)



横断面図 (10 段) 内田良[5] p37, p54



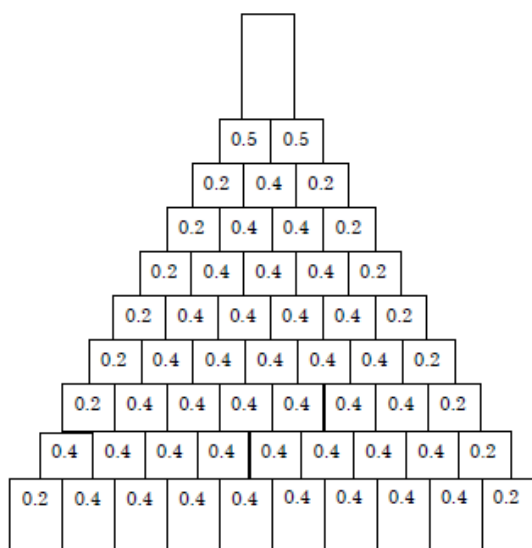


図4. 正面から見た 55 人の負荷量

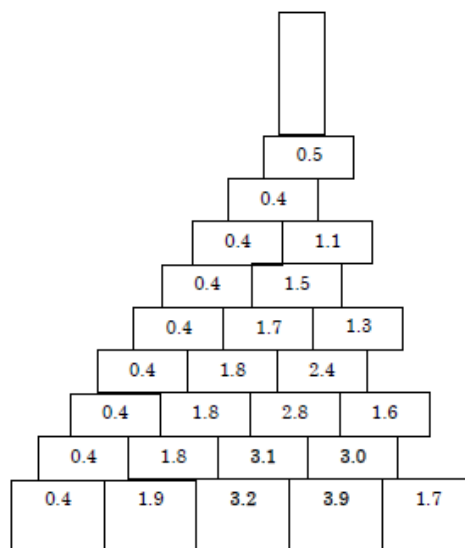


図5. 横から見た 26 人の負荷量

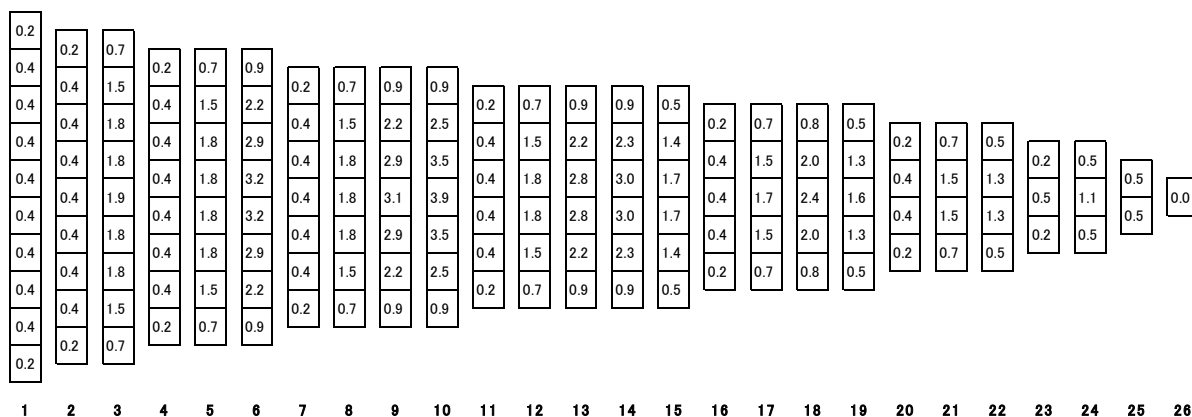


図6. 上から見た 151 人の負荷量 (小数点以下 1 桁)、1 列目から 26 列目までの展開図

最大負荷量は 3.9 人分であるが、中学 2 年男子 (平均 48.8 キロ) で 190 キロ、中学 3 年男子 (平均 54.0 キロ) で 211 キロの重量になる。高校 2 年男子 (平均 61.0 キロ) で 238 キロ、3 年男子 (平均 62.8 キロ) で 245 キロになる (内田良[5]を参考)。以上は静荷重 (体重計にそろっと乗った重さ) であるが、ピラミッドの揺れに対する動荷重、崩落した場合の衝撃を加えると 200 キロどころではない。

(発展問題 2)

巨大ピラミッドの多くは、練習中や本番でも、8 段目あたりの事故が非常に多い。頂上から落下する、内側へ崩れることが多い。その理由を考えてみよう。

(考えられる要因: 高さが 7 メートル近くになる。左右、前後の揺れが増す (動荷重)。つかまるところがない。最大負荷量が 3 を超える。完成から解除まで 3 分以上かかる。151 人の大人数である。ひとりでも力を抜けば崩れる (確率の積の法則))

段数	平面型			立体型		
	最大荷重	人数	備考	最大荷重	人数	備考
2	0.5	3				
3	1.5	6				
4	2.1	10	中学生向き	1.1	13	
5	3.1	15	高校生向き	1.5	22	大阪市教委規制(2015年9月)
6	3.8	21	福岡県の高校で8段ピラミッドの練習中、5段目で揺れだし、6段目にとりかかるとき失敗(1990年)*	1.7	37	
7	4.8	28	成功例なし	2.4	55	小学生に推奨(明治図書など)
8	5.5	36		2.8	81	事故多し
9				3.1	111	事故多し
10				3.9	151	伊丹市の中学で成功(137人, 2010年, 最大荷重3.4) 八尾市の中学で失敗(157人, 2014年, 2015年)
11						神戸市の高校で成功(2014年), 判定は微妙。2015年は5段に変更

表1. 人間ピラミッド(平面型と立体型の比較)

\* 1億円賠償の判決(1993年、福岡地裁)判例タイムズ822号251頁または判例時報1461号121頁

(参考文献・参考資料)

- [1] よしのよしろう・組体操・立体ピラミッドの動画説明 (2010年)  
<https://www.youtube.com/watch?v=JV0f6Fg4VS8> (2015年10月最終閲覧)
- [2] 根本正雄編『組体操指導のすべて てんこ盛り事典』明治図書、2011年12月
- [3] 戸田克『徹底解説 組体操 新しい技と指導の基礎基本』小学館、2013年3月
- [4] 関西体育授業研究会『子どもも観客も感動する! 「組体操」絶対成功の指導 BOOK』明治図書、2014年6月
- [5] 内田良『教育という病—子どもと先生を苦しめる「教育リスク」』光文社新書、2015年6月  
 立体型10段(151人)の計算例(数値は小数点以下1桁で丸めた)

### 問3 (上級問題)

組体操で平面型（俵積み）のピラミッドを作ります。体重はみんな同じとしますと、それぞれが受ける負荷重を分数で表すと、下のようになります。これらの数表で

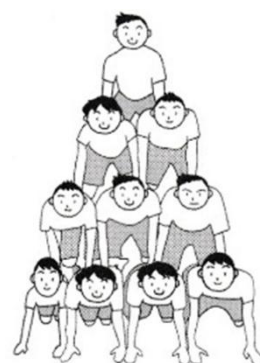
- ・上から3段目の3個の分数の分子がすべて3の倍数になります。
- ・上から5段目の5個の分数の分子がすべて5の倍数になります。
- ・上から7段目の7個の分数の分子がすべて7の倍数になります。

そこで、

- ・上から  $p$  段目の  $p$  個の分数の分子がすべて  $p$  の倍数になる。

と予想しました（宮永予想、 $p$  は素数）。

この予想があっているならその証明を、予想が外れているなら反例を示してください。



$$\begin{array}{c}
 \frac{0}{2^0} \\
 \frac{1}{2^1}, \frac{1}{2^1} \\
 \frac{3}{2^2}, \frac{6}{2^2}, \frac{3}{2^2} \\
 \frac{7}{2^3}, \frac{17}{2^3}, \frac{17}{2^3}, \frac{7}{2^3} \\
 \frac{15}{2^4}, \frac{40}{2^4}, \frac{50}{2^4}, \frac{40}{2^4}, \frac{15}{2^4} \\
 \frac{31}{2^5}, \frac{87}{2^5}, \frac{122}{2^5}, \frac{122}{2^5}, \frac{87}{2^5}, \frac{31}{2^5} \\
 \frac{63}{2^6}, \frac{182}{2^6}, \frac{273}{2^6}, \frac{308}{2^6}, \frac{273}{2^6}, \frac{182}{2^6}, \frac{63}{2^6} \\
 \frac{127}{2^7}, \frac{373}{2^7}, \frac{583}{2^7}, \frac{709}{2^7}, \frac{709}{2^7}, \frac{583}{2^7}, \frac{373}{2^7}, \frac{127}{2^7} \\
 \frac{255}{2^8}, \frac{756}{2^8}, \frac{1212}{2^8}, \frac{1548}{2^8}, \frac{1674}{2^8}, \frac{1548}{2^8}, \frac{1212}{2^8}, \frac{756}{2^8}, \frac{255}{2^8} \\
 \frac{511}{2^9}, \frac{1523}{2^9}, \frac{2480}{2^9}, \frac{3272}{2^9}, \frac{3734}{2^9}, \frac{3734}{2^9}, \frac{3272}{2^9}, \frac{2480}{2^9}, \frac{1523}{2^9}, \frac{511}{2^9} \\
 \frac{1023}{2^{10}}, \frac{3058}{2^{10}}, \frac{5027}{2^{10}}, \frac{6776}{2^{10}}, \frac{8030}{2^{10}}, \frac{8492}{2^{10}}, \frac{8030}{2^{10}}, \frac{6776}{2^{10}}, \frac{5027}{2^{10}}, \frac{3058}{2^{10}}, \frac{1023}{2^{10}}
 \end{array}$$

（備考）「人間ピラミッドの荷重計算」<sup>1</sup> を日本数学協会<sup>2</sup> の掲示板に投稿したところ、同協会の宮永望さんが、このような予想を提示されました（2015年10月13日）。宮永さんの許可を得て、ここに興味ある問題として紹介します。

<sup>1</sup> 西山豊「負荷量計算」[http://www.geocities.jp/ma85003/math/human\\_pyramid.pdf](http://www.geocities.jp/ma85003/math/human_pyramid.pdf)

<sup>2</sup> 2002年設立、公式サイト<http://www.sugaku-bunka.org/>（2015年10月閲覧）