

確率的依存構造をもつコピュラモデル

—統計的推定方法と計量ファイナンスへの応用—

野澤 勇樹¹・中村 信弘²

(受付 2019 年 5 月 31 日；改訂 2020 年 2 月 5 日；採択 2 月 6 日)

要 旨

コピュラ関数の依存構造が確率的に変動するような確率的コピュラのモデル構築とその代表的な統計的推定方法をサーベイする。依存構造の確率的な変動の記述には潜在変数を内包する状態方程式を用いることから、数値計算による尤度評価が必要となる。本論文ではこれらの手法についてまとめるとともに、確率的コピュラのヴァインコピュラを通じた多次元化への応用について拡張する。また、ファイナンス分野への応用事例として、時変レバレッジを持つコピュラと時変の依存構造パラメータを持つコピュラのモデルを紹介する。時変の依存構造パラメータを持つコピュラのモデルを為替ヘッジへの適用した例について報告する。

キーワード：確率的依存構造、確率的コピュラ、ヴァインコピュラ。

1. 序論

コピュラモデルは依存関係を記述するのに簡便で柔軟性のある優れた統計的手法である。従来、依存関係を記述するコピュラ関数は静的なものかまたは動的であっても確率的要素を含まない決定論的なものが用いられてきた。しかし、標本期間をローリングしながら長い期間で分析してみると、依存関係が確率的に時変する金融時系列を多く目にする。実際、代表的金融資産である株式と債券の相関は概ね負の値をとるが、経時的にその大きさは変化している。そのため、長期投資では、資産配分比率を適切に変えていく必要がある。依存関係に定常で動的時変構造がある場合はそれを利用したリスク管理、リスクヘッジが可能であり、より最適な資産配分比率を計算することに利用できる可能性がある。本稿では、確率的コピュラのファイナンスへの応用を紹介する。

確率ボラティリティ(SV)モデルは、リスク資産のリターンの変動が確率的に変動する現象をモデル化するために、よく用いられる。コピュラモデルの周辺モデルにも用いられることが多い。SVモデルの実証研究によると、リターンとボラティリティの攪乱項どうしの相関¹⁾は、大抵の場合、負の値で推定される。リスク資産の分散変動に対して投資家が要求するリスクプレミアム(分散リスクプレミアム, VRP)とリスク資産の実現リターンの間には密接な関係があり、Bollerslev et al. (2009, 2014)はVRPによるリターンの予測可能性に焦点を当てて研究している。国際間比較の実証分析の結果によると、S&P500のVRPによるリター

¹ ステート・ストリート・グローバル・アドバイザーズ株式会社：〒105-6325 東京都港区虎ノ門1-23-1 虎ノ門ヒルズ森タワー 25 階

² 一橋大学大学院 経営管理研究科：〒101-8439 東京都千代田区一ツ橋 2-1-2 学術総合センター

ン予測が最も高くなり、日経平均では最も低くなることが報告されている。SVモデルを用いたNakamura (2017)の研究では、レバレッジ係数がVRPによるリターンの予測可能性に重要な役割を演じていることを明らかにした。SVモデルで推定したレバレッジ係数の強い(負で絶対値が大きい)リスク資産ほど、VRPによるリターンの予測可能性が高くなることを理論的に示すことができる。リターンとボラティリティの依存構造に確率的コピュラモデルを適用すると、レバレッジ係数の確率的変動を捉えることができるようになり、あるリスク資産で、いつVRPによるリターンの予測力が高くなるのか分析できる可能性がある。

Frazzini and Pedersen (2014)は、株式市場で個別株の市場インデックスに対するCAPMベータを計測し、期待リターンとの関係を分析したところ、低ベータの資産ほど実現リターンが高くなるという現象を報告している。通常のファイナンスの資産価格理論は、投資家にとってリスクに見合った対価である期待リターンが得られることを説くが、Frazzini and Pedersen (2014)で報告された現象はその逆であり、ベータ・アノマリーと呼ばれている。現在、色々な解釈が試みられているが、その中の一つに、ベータ自身の変動に対して投資家が要求するリスクプレミアムの時系列構造から現象の解明を試みる研究(Boloorforoosh et al., 2020)もある。CAPMでは個別株ベータ $\beta_i = \rho_{i,m}\sigma_i/\sigma_m$ ($\rho_{i,m}$ は市場インデックスと個別株の相関; σ_i, σ_m は個別株と市場インデックスのそれぞれのボラティリティ)で表されるが、Asness et al. (2020)では、 $\rho_{i,m}$ が小さい程、実現リターンが高くなる傾向にあると報告している。個別株、市場インデックス各々の周辺モデルに、例えば、SV(確率ボラティリティ)モデル、それらの依存関係の確率変動を確率的コピュラで記述し、ベータの変動リスクプレミアムを分析したり、潜在変数のダイナミクスを推定して得られる情報が、リターンに如何に織り込まれるか分析することで、この現象にアプローチできると考えられる。

リスク管理の分野では、テール・リスクのモデルが盛んに研究されている。最近、Adrian and Brunnermeier (2016)で、金融機関のシステミックを分析する概念としてCoVaRという量が提唱されている。個々の金融機関の損失率 l_i が VaR_p (信頼水準 p) レベルにあるときに、その事象が金融機関全体に与える最大損失率(信頼水準 q)として定義される。この量を測定するためには、個々の金融機関の損失率と金融システム全体の損失率の間の相互依存構造をモデル化する必要がある。監物 (2017)では、2変量確率的コピュラを用いて、これらの量の動的変化を考慮したリスク尺度を研究している。

アセット・アロケーションでは、多変量の資産クラスの依存構造を記述する必要があるが、その際、ペアコピュラの組み合わせで構成されるヴァイン(vine)コピュラは、柔軟な依存構造をモデル化することが可能である。多変量コピュラからサンプリングできれば、各周辺モデルを通じて各資産の将来リターンをモンテ・カルロ法で生成することができるため、例えば、CVaRを最小化する確率計画法(Rockafellar and Uryasev, 2000)により、下方リスクを抑制したポートフォリオを作ることができる。最近、流行している投資手法に、リスクパリティ投資(Roncalli, 2013)がある。これはポートフォリオの全リスクを各資産で等しく分担するように設計された投資手法で、最適投資比率は共分散行列だけで決定される。これを拡張してポートフォリオの全下方リスクを各資産で等しく分担するように設計することも可能で、テール・リスクパリティ(TRP)投資と呼ばれている。この場合は共分散行列に加えて、各資産の期待リターンの推定値が必要となる。Boudt et al. (2013)は、TRPの他にテール・リスクに関するポートフォリオ最適化の幾つかのバリエーションを研究している。これらの投資手法はいずれも資産間の依存関係を線形相関で捉えているが、それを確率的コピュラ関数で表現すると、より多様で時変性のある依存構造を記述できる拡張の余地がある。

現物と先物の2変量で、現物の価格変動をヘッジする際に、先物に関するベータが利用される。また、外貨建て資産の為替レートのヘッジに関しても同様に、外貨建て資産に関するベ-

タが利用される。このベータを上述のようなモデルを用いて推定することで動的ベータをヘッジ比率に利用できる。確率のコピュラを通じた外貨建て資産に関するヘッジ効率に関しては、Nozawa and Nakamura (2015)で分析されている。

本稿の構成は以下の通り。第2節では、確率のコピュラの定義、第3節では確率的ヴァインコピュラについて記述する。第4節では、確率のコピュラの代表的な統計的推定方法を解説する。第5節では、確率のコピュラのファイナンス分野における様々の応用事例を紹介し、最後の第6節は、結論と今後の課題にあてられる。

2. 確率のコピュラ

2.1 確率のコピュラの定義

Sklar の定理により、周辺分布関数 $(F_i)_{i=1:n}$ をもつ連続 n 変量分布関数 F に対して

$$(2.1) \quad \Pr(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$$

を満たす関数 C が一意に存在する。このコピュラ関数と呼ばれる関数 C は、 $F(x_i) = u_i \in [0, 1]$ とすると、 $\mathbf{u} = (u_i)_{i=1:n}$ を定義域として $C(u_1, \dots, u_n) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n))$ と表される。この同時分布関数から確率密度関数は $c(u_1, \dots, u_n) = \partial^n C(u_1, \dots, u_n) / \partial u_1 \cdots \partial u_n$ で与えられ、 X_i の確率密度関数を f_i 、同時分布関数 F の確率密度関数を f とすると、これらは次の関係式に従う。

$$(2.2) \quad f(x_1, \dots, x_n) = c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \prod_{i=1}^n f_i(x_i)$$

コピュラ関数は各変数の依存関係を表現しており、その依存関係を特徴付けるパラメータを Λ とすると、確率のコピュラ関数はその量が確率的に変動する関数 Λ_t として定義されたものである。

3. 確率的ヴァイン(vine)コピュラ

多変量の確率のコピュラとして、ヴァイン(vine)コピュラ型のもの(Aas et al., 2009)を取り上げる。

ヴァインコピュラとは、多変数分布関数をペアコピュラ関数のみの積に分解して表現するモデルである。最も基本的なヴァインコピュラは、Bedford and Cooke (2002)によって提案された正則ヴァイン(R-vine)である。 n 個の確率変数 $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ の正則ヴァインとは、 $(n-1)$ 個の木(tree; 連結非巡回グラフ) $\{T_1, \dots, T_{n-1}\}$ の集合であり、次のような入れ子構造条件を満たすものである。

- (1) $T_1 = (N_1, E_1)$ は頂点(node) 集合 $N_1 = \{1, \dots, n\}$ とこれらの頂点を繋ぐ辺(edge) 集合 E_1 からなる連結された木である。
- (2) $T_i (i = 2, \dots, n-1)$ は、頂点集合 $N_i = E_{i-1}$ 、辺集合 E_i とする木である。すなわち、 $T_i = (E_{i-1}, E_i)$ 。
- (3) T_{i-1} の2つの辺で、それらが共通の頂点を共有するときのみ、次の木 T_i で連結される。

最後の条件は近接(proximity)条件と言われる。

R-ヴァインの木 T_i の各辺 $(e \in E_i)$ の端点を $j(e), k(e)$ とし、条件付き変数の集合を $D(e)$ とするに、ペアコピュラの確率密度関数 $c_{j(e), k(e) | D(e)}$ を割り当て、周辺確率密度関数を $f_k (k = 1, \dots, n)$ とすると、R-ヴァインで表現された同時確率密度は

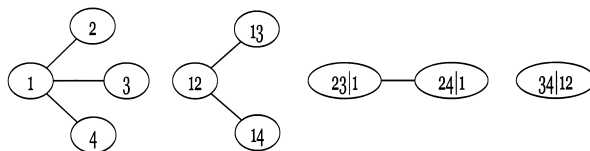


図 1. C (Canonical) ヴァインコピュラの連結構造.

$$(3.1) \quad \prod_{k=1}^n f(x_k) \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{e \in E_j} c_{j(e), k(e)|D(e)}(F(x_{j(e)}|\mathbf{x}_{D(e)}), F(x_{k(e)}|\mathbf{x}_{D(e)}))$$

となる.

R-ヴァインに含まれる特別なヴァインとして, C-ヴァイン (canonical vine; 図 1) がある. これは各 T_i で, $n-i$ 本の辺で結ばれている頂点が 1 つだけあるものとして定義される. C-ヴァインの各木の辺の総数は $n(n-1)/2$ であるため, C-ヴァインで表現された同時確率密度は

$$(3.2) \quad \prod_{k=1}^n f(x_k) \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{n-j} c_{j, i+j|1, \dots, j-1}(F(x_j|x_1, \dots, x_{j-1}), F(x_{i+j}|x_1, \dots, x_{j-1}))$$

となる.

n 変数の R-ヴァインで, 木の構造を決めるにあたり, Nápoles et al. (2010) では $\binom{n}{2} \times (n-2)! \times 2^{\binom{n-2}{2}}$ 通りのパターンから次のようにして適切なグラフを選択する方法が考えられている. 木を構成する各辺に, 対応するペア (X_i, X_j) の依存尺度 δ_{ij} (裾依存係数や Kendall の τ など) を割り付け, 全域木 (spanning tree; すべての頂点を閉路なしで結ぶグラフ) \mathcal{E} の中から, 依存尺度の絶対値の合計が最大になるような木を選択する.

$$\max \sum_{e_{ij} \in E, \mathcal{E} = \{E\}} |\delta_{ij}|.$$

Heinen and Valdesogo (2009), Brechmann and Czado (2011) では, C-ヴァインコピュラを用いた非正規・非線形 CAPM の拡張 (canonical vine autoregressive, CAVA) の研究を行っている. 階層構造をもつ個別銘柄, 業種セクター, 市場インデックスの依存関係は, C-ヴァインコピュラで適切に表現することができる. 岩永 (2015) では, 日本株市場における CAVA モデルの実証分析を行っている.

4. 確率的コピュラの統計的推定方法

4.1 フィルタリング, ベイズ推定による確率的コピュラの推定

推定方法に関して, 潜在変数を含む時系列モデルとなるため, フィルタリングやベイズ推定が用いられる. フィルタリングの場合は, 非線形モデルとなることが多いので, Liu and West (2001) の粒子フィルターや, 効率的重点サンプリング法 (Efficient Importance Sampling, EIS) (Liesenfeld and Richard, 2003, 2006; Richard and Zhang, 2007; Hafner and Manner, 2012) (次節で詳述), 尤度を粒子フィルターで計算し, それを最大化するような方法などがとられる. ベイズ推定の場合は, 次のような事後確率密度からパラメータを 1 つずつサンプリングしていく従来型の MCMC に基づくもの Almeida and Czado (2012) がある. 時刻 t における周辺分布を通じて観測データを一様化したコピュラベースの n_u 次元の観測データを $\mathbf{u}_t \in [0, 1]^{n_u}$ とし, $\mathbf{u}_{1:T} := \{\mathbf{u}_t\}_{t=1}^T$ と表現する. また, 依存構造パラメータを駆動する n_x 次元の潜在変数を \mathbf{x}_t と

し, $\mathbf{x}_{1:T} := \{\mathbf{x}_t\}_{t=1}^T$ と表現する. このとき, $\mathbf{u}_{1:T}$ と $\mathbf{x}_{1:T}$ の同時密度関数は以下のように記述できる.

$$f(\mathbf{u}_{1:T}, \mathbf{x}_{1:T} | \boldsymbol{\theta}) = \prod_{t=1}^T f(\mathbf{u}_t | \mathbf{x}_t) \cdot f(\mathbf{x}_1 | \boldsymbol{\theta}) \prod_{t=2}^T f(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \boldsymbol{\theta}).$$

ここで, $f(\mathbf{u}_t | \mathbf{x}_t)$ を推定したい確率的コピュラの確率密度関数 $c(\mathbf{u}_t | \mathbf{x}_t)$ とする. $f(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \boldsymbol{\theta})$ は, 潜在変数の推移確率である. また, 最近, 普及し始めている HMC (Hamiltonian Monte-Carlo) 法 (Neal, 2011) などでも推定が可能である. HMC 法は, 潜在変数の値を粒子の座標と考え, 潜在変数の十分なミキシングが起こるように, 仮想的な運動エネルギー $K(p)$ を与え²⁾, 潜在変数の事後分布 $f(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y})$ の $-\log(f(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}))$ をポテンシャルエネルギー $U(\theta)$ と見做し, その和 $H(\theta, p) := K(p) + U(\theta)$ (Hamiltonian) から導かれる粒子の運動方程式 (Hamilton-Jacobi 正準方程式) をリープ・フロッグ (leap-frog) 法により数値的に解くことで, 粒子の座標値と運動量をサンプリングする. Metropolis-Hastings (MH) 法の一種であるが³⁾, 位相空間 (θ, p) 内で, サンプリングにより移動した点が採択される受容率は, エネルギー保存則により高くなる. 多変数の場合, 多次元位相空間内での遷移となり, リープ・フロッグ法の離散近似の精度, 位相空間内の移動距離などをうまく選ぶ必要があり, この HMC 法は, 事後分布の高い場所を行き過ぎ, 無駄な U-ターンが起こることを抑制するような Hoffman and Gelman (2014) によるアルゴリズム (NUTS (No-U-Turn Sampler) 法) と組み合わせてソフトウェア Stan (Stan Development Team, 2020) に実装されている. 本稿では, HMC 法を用いて後述するファイナンスの応用事例の推定を行う.

HMC でのモデル選択では, Watanabe (2010) による AIC のベイズ推定版の一つである WAIC (widely applicable information criterion) などが用いられる. 新しい標本データ $\{\tilde{y}_i\}_{i=1}^n$ に対するモデルの適合度は, 各データ点での予測確率密度の事後平均の対数の和 $\sum_{i=1}^n \log \mathbb{E}_{\text{post}}[f(\tilde{y}_i | \boldsymbol{\theta})]$ を計算して求められる. ここで, $\boldsymbol{\theta}$ は推定されたモデル・パラメータや潜在変数であり, その事後分布 $p_{\text{post}}(\boldsymbol{\theta}) = p(\boldsymbol{\theta} | \mathbf{y}_{1:T})$ (ここで, $\mathbf{y}_{1:T} = \{y_t\}_{t=1}^T$ はモデル推定に使った標本データ) からサンプリングした MCMC 標本 $\{\boldsymbol{\theta}_s\}_{s=1}^S$ を用いて, 予測確率密度の事後平均 $\mathbb{E}_{\text{post}}[f(\tilde{y}_i | \boldsymbol{\theta})]$ は $(1/S) \sum_{s=1}^S f(\tilde{y}_i | \boldsymbol{\theta}_s)$ と近似される.

情報量規準の計算では, モデルの推定に用いたデータを再び利用してモデルの適合度を計算するため, オーバーフィッティングによる過大推定バイアスの補正が必要となる. WAIC の場合, その補正には, 実効的パラメータ数に関する各データの対数確率密度の事後分散の和, $p_{\text{WAIC}} = \sum_{t=1}^T \mathbb{V}_{\text{post}}[\log f(y_t | \boldsymbol{\theta})]$ が使われる. ここで, $\mathbb{V}_{\text{post}}[\log f(y_t | \boldsymbol{\theta})]$ は, 各データ点で MCMC 標本 $\{\boldsymbol{\theta}_s\}_{s=1}^S$ を用いて計算される標本分散 $V_{s=1}^S[\log f(y_t | \boldsymbol{\theta}_s)]$ (ここで, $V_{s=1}^S[x_s] = \frac{1}{S-1} \sum_{s=1}^S (x_s - \bar{x})^2$) で近似される. これらから, WAIC は AIC と同様にバイアス補正した適合度を -2 倍した次の量で定義される.

$$(4.1) \quad \text{WAIC} = -2 \sum_{t=1}^T \log \mathbb{E}_{\text{post}}[f(y_t | \boldsymbol{\theta})] + 2p_{\text{WAIC}}.$$

この量が最小となるモデルが情報量規準の観点から選択されることになる.

4.2 効率的重点サンプリングによる確率的コピュラの推定

コピュラに対して確率変動を導入したのは Hafner and Manner (2012) である. 推定方法には, 効率的重点サンプリング (EIS) と呼ばれる, Liesenfeld and Richard (2003) によって考案された重点サンプリングのひとつが尤度評価に用いられている.

Hafner and Manner (2012) は 2 次元のペアコピュラに対してその依存構造パラメータに確率

変動を導入し、依存構造パラメータ δ が潜在変数 $x_t (t = 1, \dots, T)$ に駆動されると仮定し、 $\delta(x_t)$ として潜在変数 x_t の関数として与えている。このもとで、コンピュータベースの観測方程式と潜在変数の挙動を記述する状態方程式を次のように与える。

$$(4.2) \quad C(u_t, v_t | \delta(x_t)), \quad x_t = \alpha_x + \beta_x x_{t-1} + \sigma_x \eta_t \quad (t = 1, \dots, T).$$

ここで、Hafner and Manner (2012) は、観測データであるリターンの周辺分布モデルを SV モデルとし、 u_t と v_t は一様化変数で、周辺分布を通じて観測データを変換したコンピュータベースの観測データである。なお、状態方程式の攪乱項は標準正規分布に従い、 $\eta_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$ である。

$\theta = (\alpha_x, \beta_x, \sigma_x)$ とすると、このモデルの観測データ $U_{1:T} = \{u_t\}_{t=1}^T$ と $V_{1:T} = \{v_t\}_{t=1}^T$ に関する尤度は、AR(1) の構造を持つ潜在変数 $X_{1:T} = \{x_t\}_{t=1}^T$ をモデルに内包することから、式 (4.2) の状態方程式より、

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(U_{1:T}, V_{1:T}; \theta) &= \int f(U_{1:T}, V_{1:T}, X_{1:T}; \theta) dX_{1:T} \\ &= \int \prod_{t=1}^T f(u_t, v_t, x_t | X_{1:t-1}; \theta) dX_{1:T} \\ &= \int \prod_{t=1}^T c(u_t, v_t | x_t; \theta) p(x_t | x_{t-1}; \theta) dX_{1:T} \end{aligned}$$

として潜在変数に関する積分によって表される。ここで $c(u_t, v_t | x_t; \theta)$ は依存構造の確率密度関数、 $p(x_t | x_{t-1}; \theta)$ は状態方程式の確率密度関数を表し、 $p(x_1 | x_0; \theta) = p(x_1; \theta)$ とする。この尤度関数は、潜在変数系列の存在により、解析解の導出が困難であるため、数値計算によって評価される。まず、モンテ・カルロ法によって積分評価を行う場合、式 (4.2) より、 $X_T^{(k)} = \{x_t^{(k)}\}_{t=1}^T$ を状態方程式の確率密度関数である $p(x_t^{(k)} | x_{t-1}^{(k)}; \theta)$ の正規分布から K 個のサンプリングをすることで、

$$(4.3) \quad \hat{\mathcal{L}}(U_{1:T}, V_{1:T}; \theta) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \prod_{t=1}^T c(u_t, v_t | x_t^{(k)}; \theta)$$

で尤度を得る。しかしながら、Liesenfeld and Richard (2003) によれば、状態方程式のナチュラル・サンプラーである $p(x_t^{(k)} | x_{t-1}^{(k)}; \theta)$ は観測データの情報に乏しく、推定が非効率とされている。そこで Hafner and Manner (2012) は、Liesenfeld and Richard (2003) によって考案された重点サンプリングのひとつである EIS によって推定を行っている。EIS では、観測データの情報を取り込むための補助パラメータ $a_t (t = 1, \dots, T)$ と、補助パラメータを有する補助サンプラー $m(x_t | X_{1:t-1}; a_t) (t = 1, \dots, T)$ を用いることで尤度関数を次のように変形する。

$$\mathcal{L}(U_{1:T}, V_{1:T}; \theta) = \int \prod_{t=1}^T \left[\frac{c(u_t, v_t | x_t; \theta) p(x_t | x_{t-1}; \theta)}{m(x_t | X_{1:t-1}, a_t)} \right] \prod_{t=1}^T m(x_t | X_{1:t-1}, a_t) dX_{1:T}.$$

この尤度を数値的に評価するために、 $t = 1, \dots, T$ について a_t を補助パラメータとする補助サンプラー $m(x_t | X_{1:t-1}; a_t)$ から $\tilde{x}_t^{(k)}(a_t)$ を発生させ、

$$(4.4) \quad \tilde{\mathcal{L}}(U_{1:T}, V_{1:T}; \theta) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \prod_{t=1}^T \left[\frac{c(u_t, v_t | \tilde{x}_t^{(k)}(a_t); \theta) p(\tilde{x}_t^{(k)}(a_t) | \tilde{x}_{t-1}^{(k)}(a_{t-1}); \theta)}{m(\tilde{x}_t^{(k)}(a_t) | \tilde{X}_{1:t-1}^{(k)}(a_{t-1}); a_t)} \right]$$

を得る。ここで $k = 1, \dots, K$ はサンプリング数である。

さて、重点サンプリングの効率を向上させるためには、補助サンプラー m と補助パラメー

タ a の決定が重要となる．ここで，補助サンプラーを構成する補助関数 k_x を補助サンプラー m の密度カーネルとして導入し，

$$m(x_t|X_{1:t-1}; a_t) = \frac{k_x(x_t, x_{t-1}; a_t)}{g(x_{t-1}; a_t)}, \quad g(x_{t-1}; a_t) = \int k_x(x_t, x_{t-1}; a_t) dx_t$$

とする．さらに，補助関数 k_x について，状態方程式の密度関数 $p(x_t^{(k)}|x_{t-1}^{(k)}; \theta)$ が正規分布であることを考慮して， $a_t := (a_{1t}, a_{2t})$ ， $\zeta(x_t; a_t) := \exp(a_{1t}x_t + a_{2t}x_t^2)$ なる別の補助関数を導入し， $k_x(x_t, x_{t-1}; a_t) = p(x_t|x_{t-1}; \theta)\zeta(x_t; a_t)$ とする． $p(x_t|x_{t-1}; \theta)$ が正規分布の確率密度関数であることから， $\zeta(x_t; a_t)$ を上式の形にすることで，補助サンプラーは引き続き正規分布となる．この設定のもと，式 (4.4) は，

$$(4.5) \quad \tilde{\mathcal{L}}(U_{1:T}, V_{1:T}; \theta) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \prod_{t=1}^T \left[\frac{c(u_t, v_t | \tilde{x}_t^{(k)}(a_t); \theta) g(\tilde{x}_{t-1}^{(k)}(a_{t-1}); a_t)}{\zeta(\tilde{x}_t^{(k)}(a_t); a_t)} \right]$$

のように書き換えられる．

さて，補助パラメータ a_t の推定であるが，表現の簡単のため， k 番目のサンプリングによって得られる尤度 $\mathcal{L}^{(k)}$ を以下で解説する．式 (4.5) について， $g(\tilde{x}_{t-1}^{(k)}; a_t)$ に含まれる潜在変数 x_t の時点の違いに着目し，便宜上 $g(x_T(a_T); a_{T+1}) = 1$ を満たす a_{T+1} を想定することで，

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(k)} &= \prod_{t=1}^T \left[\frac{c(u_t, v_t | \tilde{x}_t^{(k)}(a_t); \theta) g(\tilde{x}_{t-1}^{(k)}(a_{t-1}); a_t)}{\zeta(\tilde{x}_t^{(k)}(a_t); a_t)} \right] \\ &= \frac{1}{g(\tilde{x}_T^{(k)}(a_T); a_{T+1})} \prod_{t=1}^T \left[\frac{c(u_t, v_t | \tilde{x}_t^{(k)}(a_t); \theta) g(\tilde{x}_t^{(k)}(a_t); a_{t+1})}{\zeta(\tilde{x}_t^{(k)}(a_t); a_t)} \right] \end{aligned}$$

と変形できる．上式より，観測データの情報を補助パラメータ a_t に取り込むために， $g(x_T; a_{T+1}) = 1$ を仮定して $t = T, \dots, 1$ と時刻を遡るように x_t に関する最小二乗推定を繰り返すことで更新する．

パラメータ θ を所与として，尤度評価の一連の流れをまとめると，

(1) 与えられた状態方程式のパラメータ θ のもとで，ナチュラル・サンプラー $p(x_t|x_{t-1}; \theta)$ から K 個の潜在変数系列 $\{\tilde{x}_t^{(k)}\}_{t=1}^T (k = 1, \dots, K)$ を発生させる．

(2) 時刻 $t = T, \dots, 1$ と時間を遡るように時点 t における対数尤度をもとにした次式の回帰を繰り返し，補助パラメータ $\{a_t\}_{t=1}^T$ の推定値を得る．

$$\tilde{a}_t = \arg \min_{a_t} \sum_{k=1}^K [\log c(u_t, v_t | \tilde{x}_t^{(k)}; \theta) + \log g(\tilde{x}_t^{(k)}; \hat{a}_{t+1}) - c_t - \log \zeta(\tilde{x}_t^{(k)}; a_t)]^2$$

ここで c_t は定数項を表し， a_{T+1} は $g(x_T; a_{T+1}) = 1$ を満たす．

(3) 推定した補助パラメータ $\{\tilde{a}_t\}_{t=1}^T$ を元に，補助サンプラー $m(x_t|X_{1:t-1}; \tilde{a}_t)$ から潜在変数系列 $\{\tilde{x}_t^{(k)}(\tilde{a}_t)\}_{t=1}^T (k = 1, \dots, K)$ を発生させる．

(4) 補助パラメータ $\{\tilde{a}_t\}_{t=1}^T$ が収束するまで (2) と (3) を繰り返す．

(5) 収束した補助パラメータ $\{\check{a}_t\}_{t=1}^T$ による補助サンプラー $m(\check{x}_t|X_{1:t-1}; \check{a}_t)$ から潜在変数系列 $\{\check{x}_t^{(k)}(\check{a}_t)\}_{t=1}^T (k = 1, \dots, K)$ を生成し，尤度評価を行う．

なお，上で $a_t = (a_{1t}, a_{2t})$ と $\zeta(x_t; a_t) = \exp(a_{1,t}x_t + a_{2,t}x_t^2)$ と定義したことにより，この回帰式は x_t と x_t^2 を説明変数とする線形回帰となり，計算負荷の削減につながる．また，Liesenfeld and Richard (2003)によれば，この一連のプロセスの中での潜在変数の発生には，共通の乱数

(common random numbers, CRNs)を用いる必要がある点に注意が必要である。確率的依存構造パラメータの推定においては、Hafner and Manner (2012)は、100 から 200 の潜在変数の系列数 K があれば十分と報告している。

5. 確率的コピュラの応用

5.1 2 変量確率的コピュラの応用：確率的レバレッジ

SV モデルのレバレッジ構造に静的コピュラを導入する先行研究は Nakamura (2011) や Mehrabian (2012) で試みられている。SV モデルで、確率的コピュラを導入するには、例えば、高頻度データから計算される実現分散 (RV) で強化したより現実的な SV モデル (Takahashi et al., 2009) が有効であり、これを用いて説明する。

$$\begin{aligned}
 r_t &= \mu_r + e^{h_t/2} \sqrt{\frac{\nu_r - 2}{\nu_r}} \frac{\epsilon_t}{\sqrt{z_{r,t}}}, \quad z_{r,t} \sim \mathcal{G}\left(\frac{\nu_r}{2}, \frac{\nu_r}{2}\right), \\
 h_{t+1} &= \mu_h + \phi_h(h_t - \mu_h) + \sigma_h \frac{\eta_t}{\sqrt{z_{h,t}}}, \quad z_{h,t} \sim \mathcal{G}\left(\frac{\nu_h}{2}, \frac{\nu_h}{2}\right), \\
 (5.1) \quad f(r_t, h_{t+1}|h_t) &= f(r_t|h_t)f(h_{t+1}|h_t)c(U_t, V_t|R_t), \quad R_t = \tanh(x_t/2) \\
 \log RV_t &= \xi + h_t + \sigma_{RV}\zeta_t, \\
 x_t &= \mu_x + \phi_x(x_{t-1} - \mu_x) + \sigma_x \epsilon_{x,t}.
 \end{aligned}$$

ここで、 $c(U_t, V_t|R_t)$ は動的依存係数 R_t をもつ確率的コピュラの確率密度関数である。 $U_t = N_1(\epsilon_t), V_t = N_1(\eta_t)$ ($N_1(\cdot)$: 1 次元標準正規確率分布関数)、攪乱項の (ϵ_t, η_t) には確率的正規コピュラの依存構造を入れ、簡単のため、その他のノイズ $\zeta_t, \epsilon_{x,t}$ はそれぞれ独立な標準正規分布に従うと仮定する。リターンと SV の攪乱項は正規分布よりは t 分布を適用したほうが当てはまりがよいので、ガンマ分布 $\mathcal{G}(\cdot, \cdot)$ に従う z_r, z_h を用いて上記のような設定にした。レバレッジを表すコピュラには正規コピュラを用い、依存係数は確率相関 $R(x) = \tanh(x/2)$ とした。

Bollerslev et al. (2009, 2014) は、分散リスクプレミアム (VRP) がリターンの予測可能性に説明力をもつとする理論、実証論文である。Nakamura (2017, 2018) の研究では、予測可能性に重要な役割を担っているのが、レバレッジ係数であることを明らかにしている。そこで、日経平均と S&P500 に対して、このモデル (5.1) を適用し、レバレッジ係数の動的変化をそれぞれ推定してみよう³⁾。

図 2 は、確率的レバレッジ相関係数の変化を表している。この値は負の領域で変化するが、株式指数が大きく下落した、所謂、リスクオフの時期には、レバレッジが強く (絶対値が大きく) なることが分かる。また、確率相関の平均回帰レベル $\rho_\infty = \tanh(\mu_x/2)$ は日経平均、S&P500 でそれぞれ -0.3273 , -0.4677 と推計され、日経平均のほうがレバレッジがより弱い (負で絶対値が小さい) ことがわかる。このことは、Bollerslev et al. (2014) で実証された VRP によるリターンの予測可能性で、S&P500 に比べて、日経平均が劣る理由の一つと考えられる。このように、確率的コピュラを使うことでレバレッジ係数が強まる時点が同定できるため、予測力が相対的に高まっている時期を知ることができる。レバレッジが静的な SV モデルでは、平均化した負の一定値として推定され、市場のリスクオン・オフとの関連性が不明であるが、動的モデルを使うことで、リスク管理や投資に活用できる可能性があるであろう。

5.2 確率的コピュラの応用：両側裾依存係数の確率的コピュラ

Nozawa and Nakamura (2016) では、株式指数とそれに対応するボラティリティ・インデッ

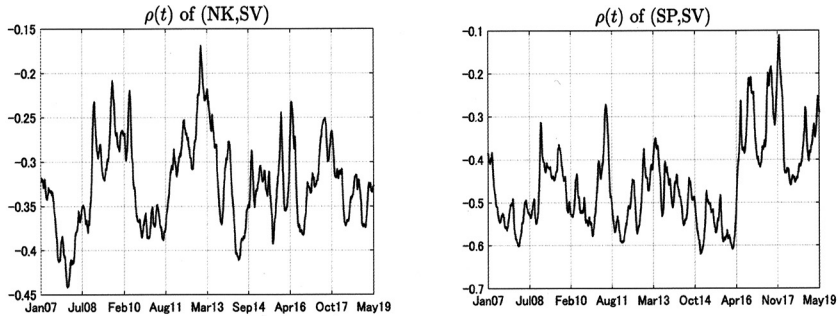


図 2. 確率的正規コピュラで表現したレバレッジパラメータの相関係数の変化(左図は日経平均, 右図は S&P500, 分析期間は 1/3/2007-5/31/2019, MCMC はバーンイン期間 1000 回, 試行回数 5000 回を採用).

クスを対象に依存構造の実証研究を行っている。依存構造の記述については、正規コピュラや t コピュラなどの楕円コピュラ以外に、上下裾依存について異なる 2 つのパラメータを有する BB7 コピュラ⁴⁾についても言及し、さらにそれぞれのパラメータに対して独立な確率変動を持たせるよう拡張している。

この研究では、inference functions for margins (IFM) と呼ばれる 2 段階推定を採用 (Joe, 2014 を参照) している。第 1 段階では、各データの周辺分布の推定を単変量のモデルで行う。第 2 段階では、先に推定した周辺分布を通じて、観測データを一様分布に従う変数へと変換し、コピュラの依存構造の推定を行う。

まず単変量の周辺分布であるが、ここでは、各指数のリターンの系列のボラティリティが市場環境に応じて変化する特徴を表現するため、株式リターンに SV モデルを適用している。SV モデルは状態空間モデルによる記述となり、観測データを含む観測方程式と、潜在変数の推移を表現する状態方程式の 2 本から構成される。観測方程式の攪乱項は、各指数のリターンや差分の分布の裾の厚さと、市場の上昇と下落についての非対称性を考慮して、一般化双曲型非対称 t 分布 (generalized hyperbolic skewed t , GHST) を仮定している⁵⁾。また、状態方程式の攪乱項を、正規分布ではなく t 分布を仮定し、潜在変数の推移に裾の厚さを持たせ大幅なボラティリティ変動を表現する。さらに、株式指数については、負のリターンとボラティリティの上昇が同時に観測される傾向がある。したがって、リターンを表現する観測方程式とボラティリティを表現する状態方程式の攪乱項の間に相関を仮定する。これらを踏まえて、この研究の SV モデルは、

$$(5.2) \quad \begin{aligned} y_t &= \mu_y + e^{h_t/2} \epsilon_t, & \epsilon_t &\sim \mathcal{GHST}(\nu_1, \beta_{\text{GH}}), \\ h_{t+1} &= \mu_h + \phi_h(h_t - \mu_h) + \sigma_h \eta_t, & \eta_t &\sim \mathcal{T}(\nu_2, 0, 1), \end{aligned}$$

となる。ここで $\mathcal{GHST}(\nu_1, \beta_{\text{GH}})$ は GHST 分布を表し、裾の厚さのパラメータは $\nu_1 > 4$ であり、歪度パラメータは β_{GH} で、歪度が正(負)の場合、 $\beta_{\text{GH}} > 0$ ($\beta_{\text{GH}} < 0$) となる。 $\mathcal{T}(\nu_2, 0, 1)$ は自由度が $\nu_2 > 4$ の標準 t 分布を表す。また、ボラティリティのリターンに対する非対称性を表すために、相関 ρ を攪乱項 ϵ_t と η_t の間に仮定する。この相関を用いることで、観測方程式の攪乱項と状態方程式の攪乱項は次のように表現できる。

$$(5.3) \quad \epsilon_t = \beta_{\text{GH}}(z_{1,t} - \mu_{z1}) + \sqrt{z_{1,t}} e_{1,t}, \quad \mu_{z1} = \frac{\nu_1}{\nu_1 - 2}, \quad \eta_t = \frac{\rho e_{1,t} + \sqrt{1 - \rho^2} e_{2,t}}{\sqrt{z_{2,t}/\nu_2}}.$$

表 1. 依存構造パラメータと潜在変数の変換.

コピュラの種類	パラメータ定義域	依存構造パラメータ
正規	$\delta_t(x_t) \in (-1, 1)$	$\delta_t(x_t) = \tanh(x_t/2)$
t	$\delta_t(x_t) \in (-1, 1), \nu > 4$	$\delta_t(x_t) = \tanh(x_t/2)$
BB7	$\delta_t^L(x_t) > 0$	$\delta_t^L(x_t^L) = \exp(x_t^L)$
	$\delta_t^U(x_t) \geq 1$	$\delta_t^U(x_t^U) = \exp(x_t^U) + 1$

ここで, $z_{1,t} \sim IG(\nu_1/2, \nu_1/2)$, $z_{2,t} \sim G(\nu_2/2, 1/2)$ および $e_{1,t}, e_{2,t} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ は互いに独立な確率変数であり, $IG(\cdot)$ と $G(\cdot)$ はそれぞれ逆ガンマ分布とガンマ分布を表す. また, 各株式指数に対応するボラティリティ・インデックスの周辺分布については, 指数のリターンではなく, 変分を観測データとして式 (5.2) のモデルを当てはめている.

周辺分布を適切に特定した後は依存構造の推定である. 周辺分布のモデルを通じて, 観測可能なデータを周辺分布 $F(r_t)$ によって一様分布 $U(0, 1)$ に従う観測データ $u_t = F(r_t)$ ($t = 1, \dots, T$) へと変換する. データ系列が d 次元ある場合, 一様化変数としての観測データ $\{u_{i,t}\}_{t=1}^T$ と $\{u_{j,t}\}_{t=1}^T$ ($i, j \in \{1, \dots, d\}$) の間の確率的ペアコピュラは次の状態方程式で表される.

$$(5.4) \quad C_{ij}(u_{i,t}, u_{j,t}; \delta_{ij,t}(x_{ij,t})), \quad x_{ij,t+1} = \mu_{xij} + \phi_{xij}(x_{ij,t} - \mu_{xij}) + \sigma_{xij}\eta_{ij,t}, \quad \eta_{ij,t} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

ここで $\{x_{ij,t}\}_{t=1}^T$ ($t = 1, \dots, T$) は潜在変数であり, 確率的依存構造パラメータ $\delta_{ij,t}(x_{ij,t})$ を駆動する.

依存構造の推定では, 正規コピュラ, tコピュラと BB7 コピュラをペアコピュラとして依存構造に時変性を持たせ, 依存構造パラメータが潜在変数によって駆動されると仮定している. 潜在変数は $\{x_t\}_{t=1}^T$ とし, 式 (5.4) に規定される AR(1) 構造を仮定する. 表 1 は, 潜在変数と依存構造パラメータの変換をまとめたものである. BB7 コピュラは 2 つの異なる依存構造パラメータを有し, それらは $\delta^L > 0$ と $\delta^U \geq 1$ である. ここで, 異なる独立の潜在変数がそれぞれのパラメータを駆動するとし, $\{x_t^L\}_{t=1}^T$ と $\{x_t^U\}_{t=1}^T$ とする. BB7 コピュラのパラメータ δ^L と δ^U はそれぞれ下方および上方裾依存係数に関連し, $\lambda^L = 2^{-1/\delta^L}$ と $\lambda^U = 2 - 2^{1/\delta^U}$ として変換される. それぞれの裾依存係数は $0 < \lambda^L < 1$ と $0 \leq \lambda^U < 1$ の範囲をとり, 1 に近いほど裾依存が強いことを表す.

Nozawa and Nakamura (2016) は, ドイツの株式指数として DAX, 米国の株式指数として S&P, およびこれらのボラティリティ・インデックスである VDAX と VIX の日次データを用い, ヴァインコピュラを適用して 4 次元の依存構造を表現している. データ期間は 2010 年 12 月末から 2014 年 12 月末で, 主な市場の攪乱イベントとして欧州債務危機を含む. 時間 t における株式指数 S_t の日次対数リターンを $y_t = 100 \times (\log(S_t) - \log(S_{t-1}))$ として計測し, ボラティリティ・インデックスは日次変化 $y_t = \Delta V_t = V_t - V_{t-1}$ を用いている.

推定方法は, 先に述べた IFM と呼ばれる 2 段階推定を採用している. また, 用いられているモデルでは周辺分布のボラティリティおよび依存構造を駆動する潜在変数を含むことから, HMC 法を採用し, 数値計算によるパラメータ推定を行なっている. 推定に際しては, Stan (Stan Development Team, 2020) を用い, はじめの 2000 サンプルをバーンイン期間として破棄し, その後の 20000 サンプルを推定に用いている.

周辺分布モデルでは SV モデルを想定しており, この周辺分布モデルには 3 つの異なる潜在変数が含まれる. 具体的には, ボラティリティを駆動する h_t , 観測方程式の裾の厚さと歪度に関連する $z_{1,t}$, そして状態方程式の攪乱項の裾の厚さに関連する $z_{2,t}$ である. HMC 法では, 推

定するパラメータセット $\theta_m = (\mu_y, \beta_{GH}, \nu_1, \mu_h, \phi_h, \sigma_h, \nu_2, \rho)$ について事前分布を設定する必要がある⁶⁾。各パラメータが満たす定義域を考慮してそれぞれの事前分布を下のように定め、また事前分布に含まれるハイパーパラメータは以下の通り設定している。

$$\mu_{yi}, \mu_{hi}, \beta_{GH} \sim \mathcal{N}(0, 3^2), \quad \frac{\phi_{ri} + 1}{2}, \frac{\phi_{hi} + 1}{2}, \frac{\rho_i + 1}{2} \sim \mathcal{B}(10, 2),$$

$$\sigma_{hi}^2 \sim \mathcal{IG}(10, 2), \quad \nu_1 - 4, \nu_2 - 4 \sim \mathcal{G}(15, 5).$$

周辺分布の推定の後、依存構造の推定を行う。この研究ではヴァインコピュラを採用しているため、各系列についてペアコピュラを推定しながら依存構造を積み上げる。確率的ペアコピュラを駆動する潜在変数は式 (5.2) の AR(1) に従うと仮定する。また、HMC 法による推定では、そのパラメータ μ_{xij} , ϕ_{xij} および σ_{xij} について事前分布を設定する必要があるが、その定義域を考慮して、それぞれ正規分布、ベータ分布、逆ガンマ分布に従うと仮定している。事前分布のハイパーパラメータは全てのペアコピュラで共通とし、

$$\mu_{xij} \sim \mathcal{N}(0, 3^2), \quad \frac{\phi_{xij} + 1}{2} \sim \mathcal{B}(10, 2), \quad \sigma_{xij}^2 \sim \mathcal{IG}(10, 2),$$

としている⁷⁾。

また、ヴァインの構造は複数存在するが、ここでは C-ヴァインを採用している。C-ヴァインを構成する各ペアコピュラの確率的依存構造パラメータは、潜在変数を通じて表 1 のように時変性を仮定している。また市場間の依存構造の推定に際して、次の 2 通りを考えている。1 つ目はドイツから米国への影響、2 つ目は米国からドイツへの影響である。このうち、ここではドイツから米国への影響について紹介する。添え字 i と j がとる $\{1, 2, 3, 4\}$ はそれぞれ $\{\text{DAX}, \text{VDAX}, \text{S\&P500}, \text{VIX}\}$ に割り当てられ、第 1 変数である DAX を C-ヴァインの軸として、4 変数ヴァインコピュラの時点 t の対数尤度は次式のように与えられる。

$$l_t(\theta_c) = l_{12}(u_{1,t}, u_{2,t}; \delta_{12,t}) + l_{13}(u_{1,t}, u_{3,t}; \delta_{13,t}) + l_{14}(u_{1,t}, u_{4,t}; \delta_{14,t})$$

$$+ l_{23|1}(u_{2|1,t}, u_{3|1,t}; \delta_{23,t}) + l_{24|1}(u_{2|1,t}, u_{4|1,t}; \delta_{24,t})$$

$$+ l_{34|12}(u_{3|12,t}, u_{4|12,t}; \delta_{34,t}).$$

時点は $t = 1, \dots, T$ とし、 θ_c は式 (5.4) のうち依存構造パラメータを駆動する潜在変数の状態方程式のパラメータセットを表す。

ここで、依存構造パラメータが確率的に変動する場合、ヴァインコピュラの構築について注意が必要である。具体的には、第 2 枝以降のペアコピュラについては、データ k ($k = \{\{1\}, \{12\}\}$) に条件付けされた観測データ $\{u_{i|k,t}\}_{t=1}^T$ の h 関数⁸⁾ を通じたデータの変換が必要となるが、 h 関数は依存構造パラメータ $\delta_{ik,t}(x_{ik,t})$ を含み、このパラメータは潜在変数 x_t を内包することから、潜在変数 x_t をある値で固定する必要がある。この研究では、HMC 法による潜在変数の推定の過程で得られる事後平均をもって値を固定している。すなわち、

$$(5.5) \quad \bar{x}_t = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x_t^{(n)})$$

によって潜在変数 x_t の値を代替している。周辺分布が SV モデルの場合も同様である。SV モデルによってフィルターにかけられた観測データ $\hat{\epsilon}_{i,t}$ を $u_{i,t} = F(\epsilon_{i,t}; h_{i,t})$ によって一様化変数 $\hat{u}_{i,t}$ へ変換することが必要である。ポラテリティを駆動する潜在変数 h_t を固定することで周辺分布を通じた変換が可能となるが、この潜在変数を HMC 法における事後平均をもって値を固定している。

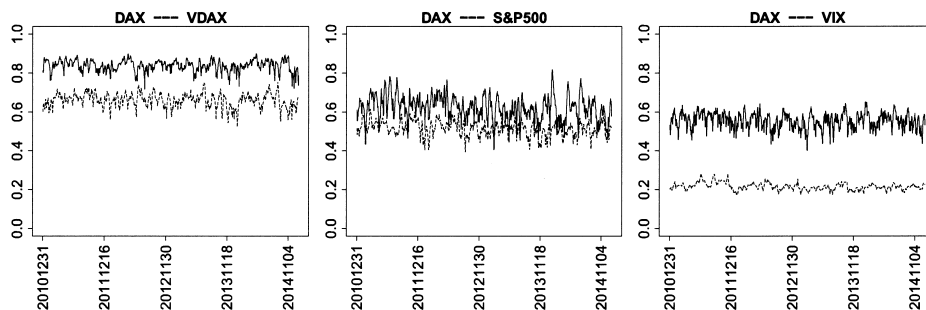


図 3. ドイツ市場から米国市場への影響を計測する BB7 コピュラの依存構造パラメータ(データ期間: 12/31/2010 – 12/31/2014). 実線と破線はそれぞれ下側と上側裾依存係数 λ_t^L と λ_t^U を表す. 左からそれぞれ DAX と VDAX, DAX と S&P500, DAX と VIX の依存構造を表す.

モデルの当てはまりについては, Watanabe (2010) による WAIC を用いて評価している. ヴァインコピュラ全体の WAIC については, それぞれのペアコピュラの WAIC の合計値として比較をしている. 結果としては, 前述の 4 つのコピュラのうち, BB7 コピュラの WAIC が他のコピュラと比較して当てはまりが良いと報告されている. ここから考えることは, 株式リターンとボラティリティ・インデックス変化の依存構造に上下非対称性が存在することである. 以下では BB7 コピュラに基づく確率的コピュラに焦点を当てる.

図 3 は上方および下方裾依存 λ_t^U と λ_t^L の変動を示している. 対象はドイツ市場から米国市場への影響で, 同日のリターンデータに基づく. 左と右のチャートは, DAX とボラティリティ・インデックスの依存構造である. 両チャートとも, 下側裾依存係数が上側裾依存係数よりも常に上位で推移している様子が見られる. ボラティリティ・インデックス変化についてはコピュラ・ベースの観測データの上下を反転させた反転データとしていることを考慮すると, DAX の下落とボラティリティ・インデックスの上昇が同時に発生する傾向があり, またその度合いが, DAX の上昇時よりも強い傾向が示唆されている. 中央のチャートは DAX と S&P500 の関係を表している. 上方および下方裾依存パラメータがともに同水準で推移していることから, 市場の上昇, 下落について上下対称の依存構造であることがわかる.

5.3 確率的依存構造をもつコピュラモデルによる為替ヘッジに対する考察

Nozawa and Nakamura (2015) では, 日本円をベース通貨とするファンドの視点から, 依存構造モデルの違いによる通貨ヘッジの効率性をグローバル株式およびグローバル債券について考察している.

単変量の資産リターン $\{r_t\}_{t=1}^T$ のモデルとして, リターン分布の歪度を考慮するとともに, 資産リターンの下落時にボラティリティが上昇する特徴を組み込む. これを表現するため, Skewed-t 分布を攪乱項に持つ AR(1)-GJR-GARCH(1,1) を採用し, 以下のように表す.

$$\begin{aligned}
 (5.6) \quad r_t &= \mu_r + \alpha_r(r_{t-1} - \mu_r) + \epsilon_t, \\
 \epsilon_t &= \sigma_t z_t, \\
 \sigma_t^2 &= \phi_0 + \phi_1 \epsilon_{t-1}^2 + \phi_2 \mathbb{I}_{(-\infty, 0)}(\epsilon_{t-1}) \epsilon_{t-1}^2 + \phi_3 \sigma_{t-1}^2.
 \end{aligned}$$

ここで σ_t は時点 t までの情報が反映された条件付ボラティリティで, $\mathbb{I}_{(-\infty, 0)}(\epsilon_{t-1})$ を $\epsilon_{t-1} < 0$ で 1 をとり, $\epsilon_{t-1} \geq 0$ で 0 をとる定義関数とすることでボラティリティの非対称性を表現する.

また, $z_t \sim ST(z_t; \nu, \gamma)$ は Fernández and Steel (1998) の skewed-t 分布に従う攪乱項で, 平均 0, 分散 1 を取り, その確率密度関数は,

$$f_{ST}(z_t; \nu, \gamma) = \frac{2}{\gamma + \gamma^{-1}} [t_\nu(\gamma z_t) \mathbb{I}_{(-\infty, 0)}(z_t) + t_\nu(\gamma^{-1} z_t) \mathbb{I}_{[0, +\infty)}(z_t)]$$

で表される. ここで, $t_\nu(\cdot)$ は自由度 $\nu > 4$ を持つ標準 t 分布であり, 歪度を司るパラメータ γ は正値をとり, $\gamma = 1$ のとき分布は対称となり, $0 < \gamma < 1$ のとき歪度が負, $\gamma > 1$ のとき正となる. 依存構造の推定に際しては, コピュラベースの観測方程式と潜在変数の挙動を記述する状態方程式を式 (5.4) として与え, 依存構造パラメータの定義域を考慮して, 潜在変数 x_t を表 1 にまとめられた関数を通じて変換し $\delta_{ij,t}$ を得る. また対象とするコピュラは楕円コピュラに属する正規コピュラと t コピュラとしている⁹⁾.

多通貨の為替ヘッジ戦略にあたり, 多次元の動的な依存構造を把握するために, この研究では確率的ヴァインコピュラによる推定を行なっている. ひとつのシステムとして組み入れる資産数は, 円建て外貨資産のリターン, ドル円およびユーロ円の 3 つであり, 3 次元をヴァインコピュラで表現する. また, ヴァインの構築方法としては C-ヴァインを用いており, 円建て外貨資産を C-ヴァインの第 1 変数として議論している. ここからは, 添え字の $i \in \{1, 2, 3\}$ をそれぞれ円建て外貨資産, ドル円およびユーロ円に割り当てる. ここで, 時変依存構造パラメータ $\delta_{ij,t}$ ($i, j \in \{1, 2, 3\}$) は表 1 のように定義する.

ここで用いられるデータは, 債券指数は Citi 米国国債インデックスと欧州国債インデックス, 株式指数は S&P 500 と Eurostoxx 50, 為替ヘッジに用いられるのは 1 ヶ月フォワード為替レート, そしてロンドン 4 時の米ドル円とユーロ円のスポット為替レートである. ここでは, 彼らの分析期間のうち 2008 年末から 2014 年末について紹介する. この期間について, 前 5 年間をイン・サンプル期間, 後 1 年間をアウト・オブ・サンプル期間として設定している.

また, モデルの当てはまりについては WAIC を通じて評価し, t コピュラによるヴァインが正規コピュラと比較してパフォーマンスが良好であったとの報告をしている.

ヴァインコピュラを推定した後, 日本円をベース通貨とするファンドの視点から為替ヘッジの効率性を検証している. 具体的には, グローバル債券およびグローバル株式に対し, 米ドル円とユーロ円のヘッジ効率を観察している.

推定したモデルに基づき, 為替のヘッジ比率について次のように設定する. 時刻 t におけるヘッジ付きポートフォリオのリターン r_t^H を, ヘッジなしポートフォリオのリターン $r_{1,t}$ と, 2 つの為替リターンベクトル $r_t^F = (r_{2,t}, r_{3,t})^\top$, そしてヘッジ比率ベクトル $\beta_t = (\beta_{2,t}, \beta_{3,t})^\top$ によって次のように定義する.

$$(5.7) \quad r_t^H = r_{1,t} - \beta_t^\top r_t^F.$$

また, 時刻 t におけるヘッジなし外貨資産リターンは, 米国建て資産とユーロ建て資産への投資比率を w として

$$(5.8) \quad r_{1,t} = w^{\text{US}} r_t^{\text{US}} + w^{\text{EU}} r_t^{\text{EU}}$$

とし, 円建て外貨資産のリターン r_t^i は, $i \in \{\text{US}, \text{EU}\}$ として, $r_t^i = \log(P_t^{a,i} P_t^{s,i} / P_{t-1}^{a,i} P_{t-1}^{s,i})$ とする. なお, $P_t^{a,i}$ をグローバル資産指数, $P_t^{s,i}$ を為替レートとし, 米国とユーロのウェイト $w = (w^{\text{US}}, w^{\text{EU}})^\top$ は期を通じて一定とし $w^{\text{US}} = w^{\text{EU}} = 0.5$ とし, 等ウェイトとする. ヘッジ比率 β_t は $0 \leq \beta_t \leq w$ とすることで, 投機的な買いやオーバーヘッジを禁止している.

ヘッジ比率の計算は, 周辺分布モデルである式 (5.6) と依存構造モデルである式 (5.4) をもとにシミュレーションによって生成された一期先リターンにより計算する. 具体的には, $t+1$ 期の各リターン $r_{t+1}^{(k)} = (r_{1,t+1}^{(k)}, r_{2,t+1}^{(k)}, r_{3,t+1}^{(k)})$ ($k = 1, \dots, K$) をコピュラモデルから生成し, 期

待ショートフォール最小化問題の解として $t+1$ 期のヘッジ比率 β_{t+1} を決定する．ポートフォリオの損失 $L = -r_{t+1}^H$ について数値的に VaR を定め、次の最適化問題を解く．

$$(5.9) \quad \min_{\beta_{t+1} \in \mathbb{R}^2} \text{ES}_{p,t+1}(\beta_{t+1}) \quad \text{s.t.} \quad 0 \leq \beta_{t+1} \leq w.$$

ここで、期待ショートフォールの推定値は

$$\widehat{\text{ES}}_{p,t+1}(\beta_{t+1}) = \widehat{\text{VaR}}_{p,t+1}(\beta_{t+1}) + \frac{1}{pK} \sum_{k=1}^K \max(-r_{t+1}^{H(k)}(\beta_{t+1}) - \widehat{\text{VaR}}_{p,t+1}(\beta_{t+1}), 0)$$

で与えられ、シミュレーションに基づくヘッジ後リターン $r_{t+1}^{H(k)}(\beta_{t+1})$ は式 (5.7) によって求め、また、シミュレーションに基づく $\widehat{\text{VaR}}_{p,t+1}$ は、 p 分位点について $r_{t+1}^{H(k)}(\beta_{t+1})$ ($k = 1, \dots, K$) より求める．

ヘッジ比率は、 $t+1$ 時点のヘッジ比率を t 時点までの市場情報をもとに予測して算出する．推定したモデルに基づく 1 日先予測により期待ショートフォールを式 (5.9) を通じて計算し、最小化ヘッジ比率 β_{t+1} を決定する．なお、計算負荷が高いため、予測はイン・サンプル期間のモデルのパラメータに基づき、期先予測においてはモデルのパラメータを再度推定せずに固定する．イン・サンプル期間の終点を T_{in} とし、アウト・オブ・サンプル期間である $t = T_{\text{in}} + 1, \dots, T_{\text{out}}$ において市場情報を更新する．なお、シミュレーションでは 10000 のサンプルパスを発生させてヘッジ効率を評価している．

ヘッジなしおよびヘッジ付きポートフォリオリターンをもとに、Hilal et al. (2011) を参考に分散削減比率、VaR 削減比率、および期待ショートフォール削減比率によってヘッジ効率を評価している．それぞれの指標は次のとおりである．

$$\text{HPM}_1 = 1 - \frac{\text{Var}(r^H)}{\text{Var}(r^{\text{UH}})}, \quad \text{HPM}_2 = 1 - \frac{\widehat{\text{VaR}}_p(r^H)}{\widehat{\text{VaR}}_p(r^{\text{UH}})}, \quad \text{HPM}_3 = 1 - \frac{\widehat{\text{ES}}_p(r^H)}{\widehat{\text{ES}}_p(r^{\text{UH}})}.$$

ここで p は VaR と期待ショートフォールの分位点を表し、添え字の H と UH はそれぞれヘッジ付とヘッジ無しリターンを表す．なお、これらの指数が高位であるほどヘッジが効率的であることを示す．アウト・オブ・サンプル期間の分散は当該期間のシミュレーション・リターンに基づく標本分散、VaR および期待ショートフォールについては、当該期間のシミュレーション・リターンに基づく平均値として次のように定めている．

$$\widehat{\text{VaR}}_p = \frac{1}{T_{\text{out}} - T_{\text{in}}} \sum_{t=T_{\text{in}}+1}^{T_{\text{out}}} \text{VaR}_{p,t}, \quad \widehat{\text{ES}}_p = \frac{1}{T_{\text{out}} - T_{\text{in}}} \sum_{t=T_{\text{in}}+1}^{T_{\text{out}}} \text{ES}_{p,t}.$$

結果は表 2 の通りである．グローバル債券については、 t コピュラに基づくヘッジが正規コピュラに基づくヘッジよりも効率的であるとの結果が、特に VaR と期待ショートフォールの

表 2. ヘッジ・パフォーマンス評価.

	グローバル債券				グローバル株式			
	正規コピュラ		t コピュラ		正規コピュラ		t コピュラ	
	$p = 5\%$	$p = 1\%$	$p = 5\%$	$p = 1\%$	$p = 5\%$	$p = 1\%$	$p = 5\%$	$p = 1\%$
HPM 1	0.8188	0.8466	0.8865	0.8838	0.3730	0.4049	0.3831	0.4014
HPM 2	0.2941	0.2001	0.6677	0.6528	0.1653	0.2109	0.2705	0.2584
HPM 3	0.3640	0.3723	0.6618	0.6483	0.2033	0.1972	0.2556	0.2564

指標 HPM 2 と HPM 3 から得られたと報告している。確率的な裾依存構造を適切に捕捉することが、特にテール・リスクのヘッジ効率向上につながると考えられる。また、グローバル債券とグローバル株式のリスク削減効果を比較すると、特に期待ショートフォールについて債券に対する為替ヘッジの効果がより高いことが報告されている。

6. 結論と今後の課題

確率的コピュラモデルに関する統計的推定と関連するトピック、特に、ファイナンスへの応用事例を中心に解説を行った。確率的コピュラでは依存構造のパラメータが潜在変数の関数として与えられるため静的コピュラのような最尤推定を行うことができない。そのため、フィルタリングやベイズ推定法などの統計的推定方法を用いることになる。本稿では EIS, HMC 法を中心に解説した。ファイナンスにおける応用事例に関しては、枚挙に暇はないが、動的依存関係が重要な例として、ダイナミックヘッジ、アセット・アロケーション、資産価格理論におけるベータ・アノマリーなどを取り上げた。

今後の課題に関しては、高次元の確率的ヴァインコピュラの推定では、一般的には次元の呪いで推定は容易ではないが、事前に 2 変量の確率的ヴァインコピュラを逐次的にできるだけ精緻に推定しておき、パラメータのレンジを押さえた上で、同時推定を行うのが薦められる。リスク管理やアセット・アロケーションでは多変量の依存構造のモデル化が特に重要である。Yoshida (2018) の多変量 Skewed-t コピュラの最尤推定法の研究や、夷藤・中村 (2019) における Engle (2002) の DCC (Dynamic Conditional Correlation) モデルを組み合わせた多変量非対称 t コピュラによる資産運用への応用研究などを多変量確率的ヴァインコピュラに拡張するのも今後の興味深い課題であろう。

注.

- 1) レバレッジ係数と呼ばれる。
- 2) $K(p) = p^2/(2m)$; ここで m は粒子の質量で、 p は粒子の運動量、通常 m は 1 と取るが、Fisher の情報行列と関係する量である。
- 3) 株式指数の RV は Oxford-Man Institute から入手可能である。
- 4) 付録参照。Joe (2014) に詳しい。
- 5) GHST については Aas and Haff (2006) が詳しい。なお、GHST には様々なパラメータ設定があるが、この研究では Nakajima and Omori (2012) を参照している。
- 6) AR モデルのパラメータ μ_h , ϕ_h および σ_h の事前分布については、たとえば Almeida and Czado (2012) を参照。その他の事前分布は、パラメータの上限と下限を考慮して設定した。具体的には、上限と下限について、 $(-\infty, +\infty)$ のパラメータは μ_h と同様に正規分布を、上限と下限の両方を有するパラメータは ϕ_h と同様にベータ分布を、下限のみ有するパラメータはガンマ分布を仮定してそれぞれの定義域を考慮した。
- 7) t コピュラの推定には自由度 ν が含まれるが、推定の安定性のため、このパラメータについてはまず依存構造パラメータが時不変である静的 t コピュラで最尤推定し、そこで得られた自由度の推定値を用いている。また、BB7 コピュラは負の依存構造を表現できないことから、静的正規コピュラの最尤推定で負の関係性が示唆されたペアについては第 2 変数を $1 - u_j$ とした第 2 軸反転アルキメディアン・コピュラを推定している。
- 8) 本稿に関連するコピュラの h 関数については付録を参照。
- 9) ただし、t コピュラの自由度パラメータ ν は、推定の安定性のため、依存構造パラメータが時不変の静的コピュラモデルの最尤推定によって求めた結果を用いている。

謝 辞

本論文作成にあたり、日本銀行金融機構局の吉羽要直博士ならびに匿名のレフェリーの方から有益なコメントをいただいた。ここに深い感謝の意を示す次第である。なお、本稿の内容は野澤勇樹が属するステート・ストリート・グローバル・アドバイザーズ株式会社あるいはそのグループ会社の見解を示すものではなく、個人の見解である。The opinions expressed here by the Author, Yuki Nozawa, are solely Author's opinions and do not reflect opinions of State Street Global Advisors (Japan) Co., Ltd. or its group entities.

付録：各種ペアコピュラの補足説明

ペアコピュラ $C(u, v)$ を組み合わせるヴァインコピュラの構築では $h(v|u) := \partial C(u, v)/\partial u$ で定義される h 関数での変換が必要となる。本論文で採用した各種ペアコピュラとその h 関数は以下のように与えられる。

A.1 楕円コピュラの h 関数

Joe (2014) より、正規コピュラと t コピュラの h 関数はそれぞれ

$$h^{\text{Normal}}(v|u; \delta) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(v) - \delta\Phi^{-1}(u)}{\sqrt{1 - \delta^2}}\right),$$

$$h^{\text{Student}}(v|u; \delta, \nu) = t_{\nu+1}\left(\frac{t_{\nu}^{-1}(v) - \delta t_{\nu}^{-1}(u)}{\sqrt{(\nu + t_{\nu}^{-1}(u)^2)(1 - \delta^2)/(\nu + 1)}}\right)$$

で与えられる。ここで $\Phi(\cdot)$ と $t_{\nu}(\cdot)$ はそれぞれ標準正規分布と自由度 ν の t 分布の分布関数を表す。

A.2 アルキメディアン・コピュラの h 関数

2変量クレイトンコピュラでは、裾依存パラメータを $\alpha(\geq 0)$ とすると、コピュラ分布関数

$$C^{\text{Clayton}}(u, v; \alpha) = (u^{-\alpha} + v^{-\alpha} - 1)^{1/\alpha}$$

から

$$h^{\text{Clayton}}(v|u; \alpha) = u^{-\alpha-1}(u^{-\alpha} + v^{-\alpha} - 1)^{-1-1/\alpha}.$$

2変量グンベルコピュラでは、裾依存パラメータを $\delta(\geq 1)$ とすると、コピュラ分布関数

$$C^{\text{Gumbel}}(u, v; \delta) = \exp[-\{(-\log u)^{\delta} + (-\log v)^{\delta}\}^{1/\delta}]$$

から

$$h^{\text{Gumbel}}(u|v; \delta) = C^{\text{Gumbel}}(u, v; \delta) \cdot \frac{1}{u} \cdot (-\log u)^{\delta-1} \{(-\log u)^{\delta} + (-\log v)^{\delta}\}^{1/\delta-1}.$$

と計算される。

A.3 BB7 コピュラ

Joe (2014) より、BB7 コピュラのコピュラ分布関数は以下のように表される。

$$C^{\text{BB7}}(u, v; \delta^U, \delta^L) = 1 - (1 - [(1 - \bar{u}^{\delta^U})^{-\delta^L} + (1 - \bar{v}^{\delta^L})^{-\delta^U} - 1]^{-1/\delta^L})^{1/\delta^U}$$

ここで, $\bar{u} = 1 - u$, $\bar{v} = 1 - v$ である. また, 確率密度関数は, $x = (1 - [1 - u]^{\delta^U})^{-\delta^L} - 1$, $y = (1 - [1 - v]^{\delta^U})^{-\delta^L} - 1$ とおいて,

$$c^{\text{BB7}}(u, v; \delta^U, \delta^L) = [1 - (x + y + 1)^{-1/\delta^L}]^{1/\delta^U - 2} (x + y + 1)^{-1/\delta^L - 2} [(x + 1)(y + 1)]^{1+1/\delta^L} \\ \cdot [\delta^U (\delta^L + 1) - (\delta^U \delta^L + 1)(x + y + 1)^{-1/\delta^L}] ([1 - u][1 - v])^{\delta^U - 1}$$

として表され, h 関数は $\partial C^{\text{BB7}}(u, v; \delta^U, \delta^L) / \partial u$ より,

$$h^{\text{BB7}}(v|u; \delta^U, \delta^L) = [1 - (x + y + 1)^{-1/\delta^L}]^{1/\delta^U - 1} (x + y + 1)^{-1/\delta^L - 1} (x + 1)^{1+1/\delta^L} [1 - u]^{\delta^U - 1}$$

として表される.

参 考 文 献

- Aas, K. and Haff, I. H. (2006). The generalized hyperbolic skew Student's t -distribution, *Journal of Financial Econometrics*, **4**(2), 275–309.
- Aas, M., Czado, C., Frigessi, A. and Bakken, H. (2009). Pair-copula constructions of multiple dependence, *Insurance: Mathematics and Economics*, **44**(2), 182–198.
- Adrian, T. and Brunnermeier, M. K. (2016). CoVaR, *American Economic Review*, **106**(7), 1705–1741.
- Almeida, C. and Czado, C. (2012). Efficient bayesian inference for stochastic time-varying copula models, *Computational Statistics and Data Analysis*, **56**, 1511–1527.
- Asness, A., Frazzini, A., Gormsen, N. and Pedersen, L. (2020). Betting against correlation: Testing theories of the low-risk effect, *Journal of Financial Economics* (to appear), <https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2019.07.003>.
- Bedford, T. and Cooke, R. M. (2002). Vines — A new graphical model for dependent random variables, *Annals of Statistics*, **30**, 1031–1068.
- Bollerslev, T., Tauchen, G. and Zhou, H. (2009). Expected stock returns and variance risk premia, *Review of Financial Studies*, **22**, 4463–4492.
- Bollerslev, T., Marrone, J., Xu, L. and Zhou, H. (2014). Stock return predictability and variance risk premia: Statistical inference and international evidence, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **49**, 633–661.
- Bloorforoosh, A., Christoffersen, P., Fournier, M. and Gouriéroux, C. (2020). Beta risk in the cross-section of equities, *The Review of Financial Studies* (to appear), <https://doi.org/10.1093/rfs/hhz139>.
- Boudt, K., Carl, P. and Peterson, B. (2013). Asset allocation with conditional value-at-risk budgets, *Journal of Risk*, **15**, 39–68.
- Brechmann, E. and Czado, C. (2011). Extending the CAPM using pair copulas: The regular vine market sector model, *Proceedings of 4th Workshop on Vine Copula Distributions and Applications*, Munich, May 11–12.
- Engle, R. (2002). Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models, *Journal of Business and Economic Statistics*, **20**(3), 339–350.
- Fernández, S. and Steel, M. F. J. (1998). On Bayesian modelling of fat tails and skewness, *Journal of the American Statistical Association*, **93**, 359–371.
- Frazzini, A. and Pedersen, L. (2014). Betting against beta, *Journal of Financial Economics*, **111**, 1–25.
- Hafner, C. M. and Manner, H. (2012). Dynamic stochastic copula models: Estimation inference and applications, *Journal of Applied Econometrics*, **27**, 269–295.
- Heinen, A. and Valdesogo, A. (2009). Asymmetric CAPM dependence for large dimensions: The canonical vine autoregressive model, Working Paper, Departamento de Estadística, Universidad Carlos III de Madrid, Spain.

- Hilal, S., Poon, S. and Tawn, J. (2011). Hedging the black swan: Conditional heteroskedasticity and tail dependence in S&P500 and VIX, *Journal of Banking and Finance*, **35**, 2374–2387.
- Hoffman, M. and Gelman, A. (2014). The no-u-turn sampler: Adaptively setting path lengths in hamiltonian monte carlo, *Journal of Machine Learning Research*, **15**, 1593–1623.
- 夷藤翔, 中村信弘 (2019). ダイナミック非対称 t コピュラを用いた新興国債市場の相互依存構造に関する研究, *ジャファイ・ジャーナル*, **17**, 45–66.
- 岩永育子 (2015). ヴァインコピュラを用いた CAPM の非正規・非線形への拡張: 日本株式市場における実証分析, *ジャファイ・ジャーナル*, 69–113.
- Joe, H. (2014). *Dependence Modeling with Copulas*, Chapman and Hall/CRC, New York.
- 監物輝夫 (2017). CoVaR によるシステミック・リスク計測: 確率的コピュラによる比較分析, *ジャファイ・ジャーナル*, 10–48.
- Liesenfeld, R. and Richard, J. (2003). Univariate and multivariate volatility models: Estimation and diagnostics, *Journal of Empirical Finance*, **10**, 505–531.
- Liesenfeld, R. and Richard, J. (2006). Classical and bayesian analysis of univariate and multivariate stochastic volatility models, *Econometric Reviews*, **25**, 335–360.
- Liu, J. and West, M. (2001). Combined parameters and state estimation in simulation-based filtering, *Sequential Monte Carlo Methods in Practice* (eds. A. Doucet, N. de Freitas and N. Gordon), 197–223, Springer, New York.
- Mehrabian, A. (2012). The leverage effect in stochastic volatility: New models, Bayesian inference, and model selection, PhD Thesis, Department of Mathematics & Statistics, McGill University, Montréal, Canada.
- Nakajima, J. and Omori, Y. (2012). Stochastic volatility model with leverage and asymmetrically heavy-tailed error using GH skew Student's t -distribution, *Computational Statistics and Data Analysis*, **56**, 3690–3704.
- Nakamura, N. (2011). Copula-based asymmetric leverage in stochastic volatility models — Particle filtering approach —, *Proceedings of the 35th Meeting of the Japanese Association of Financial Econometrics and Engineering*, Vol. 35 Summer, 241–252.
- Nakamura, N. (2017). Asset return predictability and dynamics of return and variance risk premia, *Proceedings of the 48th meeting of the Japanese Association of Financial Econometrics and Engineering*, Vol. 48 Winter, 24–35.
- Nakamura, N. (2018). Non-affine and non-reduced form approach to pricing of VIX and VVIX: Quadratic diffusion model, *Proceedings of the 49th meeting of the Japanese Association of Financial Econometrics and Engineering*, Vol. 49 Summer.
- Nápoles, O., Cooke, R. M. and Kurowicka, D. (2010). About the number of vines and regular vines on n nodes, Working Paper, Delft Institute of Applied Mathematics, Delft University of Technology, *The Netherlands*.
- Neal, R. M. (2011). MCMC using Hamiltonian dynamics, *Handbook of Markov Chain Monte Carlo* (eds. S. Brooks, A. Gelman and G. Jones), 113–162, Chapman and Hall/CRC, New York.
- Nozawa, Y. and Nakamura, N. (2015). Dynamic hedging strategy with stochastic vine copulas, *Proceedings of the 43rd Meeting of the Japanese Association of Financial Econometrics and Engineering*, Vol. 43 Summer, 168–179.
- Nozawa, Y. and Nakamura, N. (2016). Estimation of stochastic dependence structures between equity markets and volatility indices using stochastic copulas, *Proceedings of the 44th meeting of the Japanese Association of Financial Econometrics and Engineering*, Vol. 44 Winter, 228–238.
- Richard, J. and Zhang, W. (2007). Efficient high-dimensional importance sampling, *Journal of Econometrics*, **141**, 1385–1411.
- Rockafellar, R. and Uryasev, S. (2000). Optimization of conditional value-at-risk, *Journal of Risk*, **2**, 21–41.
- Roncalli, T. (2013). *Introduction to Risk Parity and Budgeting*, Chapman and Hall/CRC, New York.

- Stan Development Team (2020). *Stan User's Guide 2.22*, https://mc-stan.org/docs/2_22/stan-users-guide-2_22.pdf.
- Takahashi, M., Omori, Y. and Watanabe, T. (2009). Estimating stochastic volatility models using daily returns and realized volatility simultaneously, *Computational Statistics and Data Analysis*, **53**, 2404–2426.
- Watanabe, S. (2010). Asymptotic equivalence of Bayes cross validation and widely applicable information criterion in singular learning theory, *Journal of Machine Learning Research*, **11**, 3571–3594.
- Yoshihara, T. (2018). Maximum likelihood estimation of skew- t copulas with its applications to stock returns, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **88**, 2489–2506.

A Copula Model with Stochastic Tail Dependence: Statistical Inference and Applications to Quantitative Finance

Yuki Nozawa¹ and Nobuhiro Nakamura²

¹State Street Global Advisors (Japan) Co., Ltd.

²Graduate School of Business Administration, Hitotsubashi University

We survey model structures of stochastic copulas in which the dependence structures stochastically vary, as well as statistical estimation methods for these dependence structures. Because dependence structures in stochastic copulas are described by state equations that incorporate latent variables, likelihood evaluation requires numerical calculation. In this survey, we summarize these methodologies and discuss the application of stochastic copulas to multivariate dependence structures through vine copulas. We also introduce some applications to the field of finance, including time-varying copula models with leverage and copula models with time-varying dependence parameters. As an example of the latter models, we report a currency hedging model for time-varying dependence parameters in copula models.