ド・モアブルの定理

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ （n は整数）

証明

n は整数ですから，数学的帰納法で証明します。

整数は自然数と違い，正の方向に無限に大きくなっていくのみならず，
負の方向に無限に小さくなってもいきますので，
これらを場合分けして証明しなければなりません。
そこで，まず $0 \leq n$ の整数についてド・モアブルの定理が成り立つことを
数学的帰納法により証明します。

（ｉ）

$n = 0$ のとき

左辺 $= (\cos\theta + i\sin\theta)^0 = 1$，右辺 $= \cos 0 + i\sin 0 = 1$ より成立

（ii）

$n = k$ のとき $(\cos\theta + i\sin\theta)^k = \cos k\theta + i\sin k\theta$ が成り立つとすると，

$n = k+1$ のとき

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^{k+1} &= (\cos\theta + i\sin\theta)^k(\cos\theta + i\sin\theta)\\ &= (\cos k\theta + i\sin k\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)\\ &= (\cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta) + i(\cos k\theta\sin\theta + \sin k\theta\cos\theta)\\ &= \cos(k\theta + \theta) + i\sin(k\theta + \theta)\\ &= \cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta\end{aligned}$$

より，$n = k+1$ のときも成り立つ。

よって，（ｉ）と（ii）を合わせると，

$0 \leq n$ の整数についてド・モアブルの定理が成り立つ。

続いて，この結果を利用し，$n < 0$ のときも成り立つことを示します。

$n < 0$ のとき，$n = -m$ とおくと，

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^n &= (\cos\theta + i\sin\theta)^{-m}\\ &= \frac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)^m}\\ &= \frac{1}{\cos m\theta + i\sin m\theta} \qquad (\because 0 < m)\\ &= \frac{1}{\cos m\theta + i\sin m\theta}\frac{\cos m\theta - i\sin m\theta}{\cos m\theta - i\sin m\theta}\\ &= \frac{\cos m\theta - i\sin m\theta}{\cos^2 m\theta + \sin^2 m\theta}\\ &= \cos m\theta - i\sin m\theta\\ &= \cos(-n\theta) - i\sin(-n\theta)\\ &= \cos n\theta + i\sin n\theta\end{aligned}$$

となり，$n<0$ のときも成り立つ。

以上より，すべての整数についてド・モアブルの定理が成り立つ。

応用例

$\alpha=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ のとき，α^{100} の値をもとめる場合，

$$\begin{aligned}\alpha&=\frac{\sqrt{3}+i}{2}\\&=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\\&=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

より，

$$\begin{aligned}\alpha^{100}&=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{100}\\&=\cos\frac{100}{6}\pi+i\sin\frac{100}{6}\pi\\&=\cos\frac{50}{3}\pi+i\sin\frac{50}{3}\pi\\&=\cos\frac{2\cdot3\cdot8\pi+2\pi}{3}+i\sin\frac{2\cdot3\cdot8\pi+2\pi}{3}\\&=\cos\left(8\cdot2\pi+\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(8\cdot2\pi+\frac{2}{3}\pi\right)\\&=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\\&=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\end{aligned}$$

補足

実数と純虚数は全く異なる世界の数字ですから，
それらを同一の数直線上で表すことができません。
そこで，複素数を表す場合，数直線ではなく，
横軸を実軸，縦軸を虚軸とする座標平面（「複素平面」といいます）を用います。
たとえば，複素数が $z=a+bi$ ならば，それを表す座標は (a,b) です。
これを点 Z とすると，Z と原点 O の距離，

すなわち z の絶対値は，$|z|=|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$ ですから，

これを r とおき，$|z|=r$ とします。

また，実軸（横軸）正の向きと $\overrightarrow{\mathrm{OZ}}$ のなす角（偏角）を θ とすると，
$Z(a,b)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ より，
$z=a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ となります。
これを 2 乗すると，

$$
\begin{aligned}
z^2 &= r^2(\cos\theta+i\sin\theta)^2 \\
&= r^2(\cos 2\theta + -\sin 2\theta) \\
&= r^2\{\cos(\theta+\theta)+i\sin(\theta+\theta)\}
\end{aligned}
$$

となり，点 Z は，$\overrightarrow{\mathrm{OZ}}$ を角 θ だけ 1 次変換し，大きさを r 倍した点に移されます。
n 乗では，$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$ となり，
点 Z は，この移動が $n-1$ 回繰り返された点に移されます。

発展：複素数のオイラー表示

$e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots$（$e^x$ のマクローリン展開）に

$x=i\theta$ を代入すると，

$$
\begin{aligned}
e^{i\theta} &= 1+i\theta-\frac{\theta^2}{2!}-\frac{i\theta^3}{3!}+\frac{\theta^4}{4!}+i\frac{\theta^5}{5!}-\cdots \\
&= \left(1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\cdots\right)+i\left(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\cdots\right) \\
&= \cos\theta+i\sin\theta
\end{aligned}
$$

$$
\left[
\begin{array}{l}
\sin\theta=\theta-\dfrac{\theta^3}{3!}+\dfrac{\theta^5}{5!}-\dfrac{\theta^7}{7!}+\cdots\ \text{（}\sin\theta\text{ のマクローリン展開）} \\[2ex]
\cos\theta=1-\dfrac{\theta^2}{2!}+\dfrac{\theta^4}{4!}-\dfrac{\theta^6}{6!}+\cdots\ \text{（}\cos\theta\text{ のマクローリン展開）}
\end{array}
\right]
$$

$\therefore e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

$\therefore e^{in\theta}=\left(e^{i\theta}\right)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$