DE SERIE LAMBERTINA,
PLVRIMISQVE EIVS INSIGNIBVS PROPRIETATIBVS.

Auctore
L. EVLERO.

§. 1.

Hoc cognomine appellare liceat illam maxime memorabilem feriem, qua vir acutiffimi ingenii *Lambertus* radices aequationum trinomialium primus exprimere docuit in Actorum Heluetieorum Volum. III. Haec autem feries, fi eius elementa parumper immutentur, fequenti forma repraefentari poteft:

$$S = 1 + nv + \tfrac{1}{2} n(n + \alpha + \beta) v^2$$
$$+ \tfrac{1}{6} n(n + \alpha + 2\beta)(n + 2\alpha + \beta) v^3$$
$$+ \tfrac{1}{24} n(n + \alpha + 3\beta)(n + 2\alpha + 2\beta)(n + 3\alpha + \beta) v^4$$
$$+ \text{etc.}$$

cuius feriei fumma S ita pendet a refolutione huius aequationis trinomialis:

$$x^\alpha - x^\beta = (\alpha - \beta) v x^{\alpha + \beta}, \text{ vt fit } S = x^n$$

 vbi

vbi cum illa aequatio plures habere possit radices, pro x earum maximam vel minimam accipi oportet, prouti circumstantiae postulauerint. Praesenti autem forma hanc seriem exhibere est visum, vt litterae α et β inter se permutabiles euaderent, ita vt, quicquid de altera fuerit obseruatum, etiam de altera valeat.

§. 2. Praecipua igitur huius seriei proprietas in hoc consistit, vt eius summa semper aequalis sit potestati exponentis n, ad quem certa quaepiam quantitas eleuetur. Vnde si pro valore ipsius n quocunque $n = p$ summa seriei ponatur $= P$; pro alio autem valore quocunque $n = q$ summa ponatur $= Q$: tum, quia habebitur $P = x^p$ et $Q = x^q$, manifestum est fore $P^q = Q^p$, siue $lP : lQ = p : q$; sicque, dummodo summa huius seriei pro vnico casu exponentis n innotuerit, inde summae pro aliis quibuscunque valoribus semper assignari poterunt, siquidem reliquae quantitates α, β et v eosdem valores retineant. Plurimum igitur optandum foret, vt ista insignis proprietas ex ipsa seriei indole demonstrari posset.

§. 3. Hic igitur ante omnia casus notatu dignus occurrit, quo $n = 0$ et summa $S = 1$. Cum igitur sit $S = x^n$, notum est casu $n = 0$ formulam $\frac{x^n - 1}{n}$ abire in logarithmum hyperbolicum ipsius x, quamobrem hic casus nobis istam summationem imprimis memoratu dignam suppeditat:

$lx =$

$$lx = v + \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta)v^2 + \tfrac{1}{6}(\alpha+2\beta)(2\alpha+\beta)v^3$$
$$+ \tfrac{1}{24}(\alpha+3\beta)(2\alpha+2\beta)(3\alpha+\beta)v^4$$
$$+ \tfrac{1}{120}(\alpha+4\beta)(2\alpha+3\beta)(3\alpha+2\beta)(4\alpha+\beta)v^5$$
$$+ \text{etc.}$$

Quodſi ergo ſumma huius ſeriei iam fuerit explorata, voceturque $= \Delta$, ob $lx = \Delta$ erit $x = e^{\Delta}$, denotante e numerum, cuius logarithmus hyperbolicus eſt $= 1$. Vnde cognito hoc valore Δ pro quocunque numero n ſumma ſeriei propoſitae erit $= e^{n\Delta}$; ex quo igitur aliam ſeriem infinitam exhibere licet, propoſitae aequalem, ſcilicet:

$$S = 1 + n\Delta + \tfrac{1}{2}n^2\Delta^2 + \tfrac{1}{6}n^3\Delta^3 + \tfrac{1}{24}n^4\Delta^4 + \text{etc.}$$

tum vero, quia $\Delta = lx$, ſimul habebitur iſta aequatio:

$$e^{\alpha\Delta} - e^{\beta\Delta} = (\alpha-\beta)\,v\,e^{(\alpha+\beta)\Delta},\ \text{ſiue:}$$
$$e^{-\beta\Delta} - e^{-\alpha\Delta} = (\alpha-\beta)v$$

ex qua aequatione etiam valorem ipſius Δ inueſtigare licebit.

§. 4. Praeterea vero etiam ſummationem ſeriei propoſitae generalis ita deſcribere licet, vt, ſi fuerit

$$v = \frac{x^{-\beta} - x^{-\alpha}}{\alpha-\beta},$$

ſeriei ſumma futura ſit $S = x^n$, atque adeo quicunque valores litteris α et β tribuantur, ſi modo notetur, vti iam obſeruauimus, quando ex pluribus valoribus pro x aſſumtis idem valor pro v reſultare poteſt, tum pro ſumma $S = x^n$ eum accipi oportere, qui fuerit vel maximus vel minimus. His in genere praenotatis percurramus aliquos caſus praecipuos, ratione litterarum α et β, quibus cognitio noſtrae ſeriei non mediocriter illuſtrabitur.

Ca-

Casus I.

Quo $\beta = 0$.

§. 5. Quoniam litterae α et β sunt permutabiles, perinde est, siue α siue β euanescat. Sit igitur $\beta = 0$ et nostra series sequentem induet formam:

$$S = 1 + n v + \tfrac{1}{2} n (n + \alpha) v^2 + \tfrac{1}{6} n (n + \alpha)(n + 2\alpha) v^3 + \tfrac{1}{24} n (n + \alpha)(n + 2\alpha)(n + 3\alpha) v^4 + \tfrac{1}{120} n (n + \alpha)(n + 2\alpha)(n + 3\alpha)(n + 4\alpha) + \text{etc.}$$

cuius ergo summa erit $S = x^n$, si modo x capiatur ex hac aequatione: $x^\alpha - 1 = \alpha v x^\alpha$, ex qua prodit $x^\alpha = \frac{1}{1 - \alpha v}$, ideoque $x = (1 - \alpha v)^{-\frac{1}{\alpha}}$; quamobrem summa istius seriei erit $S = (1 - \alpha v)^{-\frac{n}{\alpha}}$, quae more solito euoluta eandem prorsus seriem gignit. Quo ergo casu ipsa series Lambertina iam insigne firmamentum accipit.

§. 6. Quodsi hic exponentem n euanescere faciamus, series hoc modo ad logarithmum reuocabitur, vt sit

$$l x = v + \tfrac{1}{2} \alpha v^2 + \tfrac{1}{3} \alpha \alpha v^3 + \tfrac{1}{4} \alpha^3 v^4 + \tfrac{1}{5} \alpha^4 v^5 + \text{etc.}$$

Cum igitur sit

$$x = (1 - \alpha v)^{-\frac{1}{\alpha}}, \text{ erit } l x = -\tfrac{1}{\alpha} l (1 - \alpha v).$$

Notum autem est esse

$$l (1 - \alpha v) = -\alpha v - \tfrac{1}{2} \alpha^2 v^2 - \tfrac{1}{3} \alpha^3 v^3 - \tfrac{1}{4} \alpha^4 v^4 - \text{etc.}$$

quae series ducta in $-\frac{1}{\alpha}$ ipsam seriem modo inuentam reddit.

Ca-

Casus II.

Quo $\beta = \alpha$.

§. 7. Hic casus maxime est memoratu dignus, propterea quod aequatio, vnde valorem x deriuari oportet, sit incongrua, scilicet: $x^\alpha - x^\alpha = 0\, v\, x^{2\alpha}$, siue $0 = 0$; ad quod incommodum euitandum ponamus $\alpha = \beta + \omega$, existente ω infinite paruo, et nostra aequatio erit

$$x^{\beta+\omega} - x^\beta = \omega\, v\, x^{2\beta+\omega}, \text{ siue}$$

$$\frac{x^\omega - 1}{\omega} = v\, x^{\beta+\omega}.$$

Constat autem, euanescente ω esse $\frac{x^\omega - 1}{\omega} = l\, x$, ita vt hoc casu fiat $l\, x = v\, x^{\beta+\omega} = v\, x^\alpha$, quae ergo est aequatio, ex qua valorem ipsius x elici oportet.

§. 8. Posito autem $\beta = \alpha$ ad sequentem seriem perueniemus:

$$S = 1 + n\, v + \tfrac{1}{2} n\,(n + 2\,\alpha)\, v^2 + \tfrac{1}{6} n\,(n + 3\,\alpha)^2\, v^3$$
$$+ \tfrac{1}{24} n\,(n + 4\,\alpha)^3\, v^4 + \tfrac{1}{120} n\,(n + 5\,\alpha)^4\, v^5$$
$$+ \tfrac{1}{720} n\,(n + 6\,\alpha)^5\, v^6 + \text{etc.}$$

quae series ideo maxime est notatu digna, quod non solum exponentes continuo crescant, sed etiam ipsae quantitates eleuatae in progressione arithmetica procedant, cuiusmodi series vix adhuc a Geometris sunt consideratae. Interim tamen hic nouimus, summam huius seriei esse $S = x^n$, si modo valor ipsius x huic aequationi conueniat, nempe: $l\, x = v\, x^\alpha$, quem autem valorem aliter nisi appropinquando cognoscere non datur.

§. 9. Quodsi vlterius statuamus $n = 0$, ex supra allatis sequens series colligitur:

$$l x = v + \alpha v^2 + \tfrac{3^2}{6} \alpha \alpha v^3 + \tfrac{4^3}{24} \alpha^3 v^4 + \tfrac{5^4}{120} \alpha^4 v^5 + \tfrac{6^5}{720} \alpha^5 v^6 + \text{etc.}$$

Cum igitur sit $l x = v x^\alpha$, erit

$$x^\alpha = 1 + \tfrac{2^1}{1.\,2} \alpha v + \tfrac{3^2}{1.\,2.\,3} \alpha^2 v^2 + \tfrac{4^3}{1.\,2.\,3.\,4} \alpha^3 v^3 + \tfrac{5^4}{1.\,2.\,\ldots\,5} \alpha^4 v^4 + \tfrac{6^5}{1.\,\ldots\,6} \alpha^5 v^5 + \text{etc.}$$

Ponamus hic $\alpha v = u$, ita vt $\alpha l x = u x^\alpha$. Sit iam porro $x^\alpha = y$, ideoque $\alpha l x = l y$, consequenter aequatio nostra fiet $l y = u y$, quocirca nanciscimur hanc summationem:

$$y = 1 + \tfrac{2^1}{1.\,2} u + \tfrac{3^2}{1.\,2.\,3} u u + \tfrac{4^3}{1.\,2.\,3.\,4} u^3 + \tfrac{5^4}{1.\,\ldots\,5} u^4 + \tfrac{6^5}{1.\,\ldots\,6} u^5 + \text{etc.}$$

si modo fuerit $u = \frac{l y}{y}$.

§. 10. Quoniam in hac serie exponentes numeratorum ab ipsis numeratoribus vnitate deficiunt, eos sequenti modo ad paritatem reducamus. Multiplicemus vtrinque per u ac differentiemus, fietque

$$\frac{d.\,l y}{d u} = \frac{d y}{y\, d u} = 1 + \tfrac{2^2}{1.\,2} u + \tfrac{3^3}{1.\,2.\,3} u u + \tfrac{4^4}{1.\,2.\,3.\,4} u^3 + \tfrac{5^5}{1\,.\,.\,.\,5} u^4 + \tfrac{6^6}{1\,.\,.\,.\,6} u^5 + \text{etc.}$$

Cum autem sit $l y = u y$, erit $\frac{d y}{y} = u\, d y + y\, d u$, vnde fit $\frac{d y}{d u} = \frac{y y}{1 - u y}$; sicque summa illa erit $= \frac{y}{1 - u y}$. Multiplicemus porro vtrinque per u, et ob $u y = l y$ adipiscemur hanc summationem maxime notabilem:

$$\frac{l y}{1 - l y} = u + \tfrac{2^2}{1.\,2} u^2 + \tfrac{3^3}{1.\,2.\,3} u^3 + \tfrac{4^4}{1\,.\,.\,.\,4} u^4 + \tfrac{5^5}{1\,.\,.\,.\,5} u^5 + \text{etc.}$$

si modo fuerit $u = \frac{l y}{y}$.

§. 11.

§. 11. Haec postrema series ob concinnitatem vtique meretur, vt in eius indolem accuratius inquiramus. Ac primo quidem patet, si sumeremus $u = 1$ vel $u > 1$, seriem prodituram esse diuergentem; cum in forma generali $\frac{n^n}{1.2...n}$ numerator continuo magis denominatorem superet, ideoque omnes termini adeo in infinitum excrescant, quod signum est summae imaginariae; id quod per formulam $u = \frac{ly}{y}$ manifesto declaratur, siquidem nullius numeri logarithmus ipso maior euadere potest. Quando autem u vnitate minus accipitur, summa istius seriei vtique finita prodire potest, quoties scilicet formula $\frac{ly}{y}$ finitum accipit valorem, id quod euenit, quando $ly < 1$, siue $y < e$. Sumto autem $y = e$, vnde fit $u = \frac{1}{e}$, series nostra etiamnunc summam infinitam habebit, etiamsi eius termini continuo decrescant, atque adeo tandem euanescant.

§. 12. In hac autem serie imprimis memorabile occurrit, quod, si u tantillo superet $\frac{1}{e}$, terminos tandem in infinitum excrescant, id quod egregie conuenit cum iis, quae olim circa valorem producti $1.2.3.....n$ obseruaui in calculo differentiali pag. 466. Quodsi enim ponatur $T = \frac{n^n}{1.2...n}$, vt sit

$$lF = n\,ln - l1 - l2 - l3 \ldots\ldots - ln$$

loco citato demonstraui esse $l1 + l2 + l3 + l4 + \ldots + ln$

$$= \tfrac{1}{2} l\, 2\pi + (n + \tfrac{1}{2})\, ln - n + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360 n^3} + \frac{1}{1260 n^5} - \text{etc.}$$

vnde sequitur ipsum productum

$$1.2.3.....n = \frac{\sqrt{2\pi} \times n^{n+\frac{1}{2}} \times e^{\frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3}\,\text{etc.}}}{e^n}$$

ſicque habebimus

$$T = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}} \cdot e^{n - \frac{1}{12n} + \frac{1}{360 n^3} - \text{etc.}}$$

Quando ergo n eſt numerus praemagnus, totus ſeriei noſtrae terminus erit $T u^n = \frac{e^n u^n}{\sqrt{2 n \pi}}$, ex qua forma manifeſtum eſt, ſimulac fuerit $e u > 1$, ſiue $u > \frac{1}{e}$, tum hunc terminum euadere infinitum; ſin autem fuerit $e u$ vel $= 1$ vel adeo < 1, ſiue $u < \frac{1}{e}$, tum iſtum terminum in nihilum eſſe arbiturum.

§. 13. Illuſtremus hanc ſummationem vnico exemplo, ponentes $l y = \frac{1}{2}$, vt ſumma ſeriei euadat $= 1$; tum autem èrit $u = \frac{1}{2\sqrt{e}}$, quo ergo caſu certi ſumus fore

$$1 = u + \frac{2^2}{1.2} u^2 + \frac{3^3}{1.2.3} u^3 + \frac{4^4}{1 \ldots 4} u^4 + \text{etc.}$$

Cum autem ſit $e = 2,71828$, valores priorum huius ſeriei terminorum in fractionibus decimalibus ita reperientur expreſſi:

$$\begin{aligned} u &= 0,303269 \\ 2u^2 &= 0,183944 \\ \tfrac{9}{2} u^3 &= 0,125515 \\ \tfrac{32}{3} u^4 &= 0,090228 \\ \frac{5^4}{1.2.3.4} u^5 &= 0,066805 \\ \frac{3^2.6^2}{5} u^6 &= 0,050413 \end{aligned}$$

Haec ergo ſeries perquam lente conuergit, ita tamen, vt tota ſumma non vltra vnitatem aſcendere ſit cenſenda.

De

De resolutione
aequationis $l x = v x^{\alpha}$.

§. 14. Quoniam pro casu secundo, vbi $\beta = \alpha$, summatio nostrae seriei pendet ab aequatione $l x = v x^{\alpha}$, ex qua, pro quouis valore v, quantitatem x erui oportet: ante omnia obseruari conuenit, cuilibet valori v geminos valores ipsius x respondere posse. Ad hoc ostendendum faciamus $x^{\alpha} = y$ et $\alpha v = u$, vt habeatur ista aequatio: $l y = u y$, siue $u = \frac{l y}{y}$; vnde patet numerum u positiuum esse non posse, nisi sit $y > 1$. Tum autem semper erit $u < \frac{1}{e}$, propterea quod maximus valor formulae $\frac{l y}{y}$ oritur sumto $y = e$, ita vt, siue y maius capiatur quam e siue minus, semper prodeat $u < \frac{1}{e}$. Hinc igitur patet, seriem pro casu secundo inuentam finitam summam habere non posse, quamdiu fuerit $u > \frac{1}{e}$, siue $v > \frac{1}{\alpha e}$, siquidem v fuerit quantitas positiua; quando enim foret negatiua, ob signa alternantia summa semper futura esset finita.

§. 15. Hinc sequitur porro, quoties fuerit $u < \frac{1}{e}$, toties duos valores pro y exhiberi posse: alterum scilicet maiorem quam e, alterum vero minorem, ex quorum vtroque prodeat idem valor $u = \frac{l y}{y}$. Veluti, siue statuatur $y = 2$, siue $y = 4$, vtrinque prodit $u = \frac{l 2}{2}$. Idem vsu venit, siue statuatur $y = (\frac{3}{2})^3 = \frac{27}{8}$, siue $y = (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$, siquidem ex vtroque prodit $u = \frac{8}{9} l \frac{3}{2}$. Idem porro euenit, siue sumatur $y = (\frac{4}{3})^4$, siue $y = (\frac{4}{3})^3$, quandoquidem ex vtroque fit $u = \frac{3^4}{4^4} l \frac{4}{3}$.

§. 16. Ad tales binos ipsius y valores inueniendos sint p et q huiusmodi valores, quibus euadat $u = \frac{l p}{p} = \frac{l q}{q}$.

Ponamus nunc $q = p\,r$, fierique oportet

$$\frac{lp}{p} = \frac{lpr}{pr} = \frac{lp + lr}{pr},$$

siue $r\,lp = lp + lr$, vnde fit $lp = \frac{lr}{r-1}$, ideoque $p = r^{\frac{1}{r-1}}$,

hincque $q = r^{\frac{r}{r-1}}$, quae formulae quo commodiores reddantur, faciamus $\frac{1}{r-1} = m$, vt fit $r = \frac{m+1}{m}$, vnde bini valores ipsius y, quos vocauimus p et q, nunc erunt: alter $y = p = (\frac{m+1}{m})^m$, alter vero $y = q = (\frac{m+1}{m})^{m+1}$; ex vtroque enim prodit $u = \frac{m^{m+1}}{(m+1)^m}\, l\,\frac{m+1}{m}$.

§. 16. His expositis hic quaestio oritur maximi momenti: vter horum duorum valorum ipsius y adhiberi debeat ad summam huius seriei exprimendam:

$$y = 1 + \frac{2^1}{1.2}u + \frac{3^2}{1.2.3}uu + \frac{4^3}{1.2.3.4}u^3 + \frac{5^4}{1.2\ldots5}u^4 + \text{etc.}$$

ad quam quaestionem dirimendam sumamus primo $u = \frac{1}{e}$, vt vterque valor ipsius y sit $= e$; nullum enim est dubium quin hoc casu sit $y = e$. Nunc vero, si fuerit $u < \frac{1}{e}$, euidens est summam seriei euadere minorem quam e. Quare cum pro y inuenerimus duos valores, alterum maiorem, alterum quidem minorem quam e, manifestum est, semper valorem minorem accipi debere ad summam illius seriei exprimendam. Ita si fuerit $u = \frac{m^{m+1}}{(m+1)^m}\, l\,\frac{m+1}{m}$, valor pro y assumendus erit $y = (\frac{m+1}{m})^m$, quippe qui semper minor est quam e, dum alter, $y = (\frac{m+1}{m})^{m+1}$, maior est quam e

Theo-

Theorema.

§. 17. Si quantitates x et v ita a se inuicem pendeant, vt sit $lx = vx$, atque adeo cuilibet valori v gemini valores x respondeant, alter maior quam e, alter vero minor, tum in sequentibus summationibus:

$$\text{I. } \frac{x^n - 1}{n} = v + \frac{n+2}{1 \cdot 2} v^2 + \frac{(n+3)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} v^3 + \frac{(n+4)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} v^4 + \text{etc.}$$

$$\text{II. } \frac{x^n}{1 - lx} = 1 + \frac{n+1}{1} v + \frac{(n+2)^1}{1 \cdot 2} v^2 + \frac{(n+3)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} v^3 + \frac{(n+4)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} v^4 + \text{etc.}$$

perpetuo loco x minorem valorem accipi oportet, qui scilicet sit minor quam e. Ratio harum duarum serierum ex euolutione casus secundi per se est manifesta; prior enim nascitur ex §. 8. sumendo $\alpha = 1$.

§. 18. Posterior vero series ex priore deducitur per differentiationem; hinc enim per dv diuidendo et differentiando adipiscimur

$$\frac{x^{n-1}\,dx}{dv} = 1 + \frac{n+2}{1} v + \frac{(n+3)^2}{1 \cdot 2} v^2 + \frac{(n+4)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} v^3 + \text{etc.}$$

Cum autem sit $v = \frac{lx}{x}$, erit $dv = \frac{dx}{xx}(1 - lx)$, ideoque

$$\frac{x^{n-1}\,dx}{dv} = \frac{x^{n+1}}{1 - lx}.$$

Quare si hic loco n scribamus $n - 1$, orietur ista summatio:

$$\frac{x^n}{1 - lx} = 1 + \frac{n+1}{1} v + \frac{(n+2)^2}{1 \cdot 2} v^2 + \frac{(n+3)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} v^3 + \text{etc.}$$

quae est ipsa series nostra posterior.

§. 19. Hae duae autem ſeries eo magis omni attentione dignae ſunt cenſendae, quod multo ſint ſimpliciores et concinniores, quam ipſa ſeries generalis *Lambertina*; tum vero imprimis, quod nulla plane via patere videatur ad earum veritatem directe demonſtrandam. Quanquam enim veritas ipſius ſeriei *Lambertinae* iam ſatis eſt euicta: tamen rationes, quibus demonſtratio illa innititur, ad caſum praeſentium ſerierum nullo modo accommodari poſſunt, in quo vtique inſigne paradoxon conſpicitur, quod propoſitionem quandam generalem demonſtratione munire liceat, quae tamen ad quempiam caſum ſpecialem applicari penitus nequeat.

§. 20. Quemadmodum autem ſeries generalis *Lambertina* ex aequatione trinomiali

$$x^{\alpha} - x^{\beta} = (\alpha - \beta)\, v\, x^{\alpha+\beta},$$

deriuari queat, alia occaſione fuſius monſtraui, vbi ſimul ſimilem reſolutionem ad aequationes quantumuis polynomias extendi. At vero quomodo viciſſim ſeries *Lambertina* ad aequationem trinomialem perduci queat, quaeſtio multo magis ardua videtur; vnde operae pretium erit talem analyſin expoſuiſſe, quod opus quo facilius ſuccedat, ſequens problema praemittam.

Problema.

Propoſita ſerie *Lambertina*, vti initio eſt euoluta, eius conſenſum cum hac aequatione trinomiali:

$$x^{\alpha} - x^{\beta} = (\alpha - \beta)\, v\, x^{\alpha+\beta},$$

docere.

Solutio.

Solutio.

§. 21. Posita seriei illius summa $= S$, hic quidem assumo istam summam aequari huiusmodi potestati, x^n, ita vt tantum nobis incumbat relationem inter istam quantitatem x et quantitates ipsam seriem constituentes, quae sunt α, β et v inuestigare. Facile autem intelligitur, hanc ob rationem neutiquam pro demonstratione haberi posse, (propterea quod hoc ipsum ante omnia demonstrandum fuisset), istam summam S per talem formam x^n exhiberi posse. Hoc autem concesso ratiocinium sequenti modo instituamus.

§. 22. Posito scilicet $S = x^n$ primo loco exponentis indefiniti n statuo valorem determinatum $n = -\alpha$, indeque ista series obtinebitur:

$$x^{-\alpha} = 1 - \alpha v - \tfrac{1}{2}\alpha\beta v^2 - \tfrac{1}{6}\alpha . 2\beta(\alpha + \beta) v^3$$
$$- \tfrac{1}{24}\alpha . 3\beta(\alpha + 2\beta)(2\alpha + \beta) v^4$$
$$- \tfrac{1}{120}\alpha . 4\beta(\alpha + 3\beta)(2\alpha + 2\beta)(3\alpha + \beta) v^5 - \text{etc.}$$

Simili modo, si statuamus $n = -\beta$, ad sequentem seriem pertingemus:

$$x^{-\beta} = 1 - \beta v - \tfrac{1}{2}\beta\alpha v^2 - \tfrac{1}{6}\beta . 2\alpha(\beta + \alpha) v^3$$
$$- \tfrac{1}{24}\beta . 3\alpha(\beta + 2\alpha)(2\beta + \alpha) v^4$$
$$- \tfrac{1}{120}\beta . 4\alpha(\beta + 3\alpha)(2\beta + 2\alpha)(3\beta + \alpha) v^5 - \text{etc.}$$

§. 23. Iam priorem harum duarum serierum a posteriore subtrahamus, atque impetrabimus istam aequalitatem: $x^{-\beta} - x^{-\alpha} = (\alpha - \beta) v$, propterea quod praeter terminos secundos omnes sequentes se manifesto destruunt. Quodsi iam istam aequationem inuentam per $x^{\alpha+\beta}$ multiplicetiplicemus, prodibit ipfa aequatio trinomialis affumta

$$x^{\alpha} - x^{\beta} = (\alpha - \beta)\, v\, x^{\alpha + \beta}.$$

§. 24. Dummodo igitur demonftrari poffet, fummam feriei *Lambertinae* aequari poteftati exponentis n cuiuspiam quantitatis x, quae ab n non pendeat, praecedens Analyfis firmam vtique demonftrationem fuppeditaret. Hunc autem defectum in fequente problemate fupplere conabimur.

Problema principale.

Operationes analiticas exponere, quae ad cognitionem verae fummae feriei *Lambertinae* manuducant.

Solutio.

§. 25. Cum feries propofita *Lambertina* quatuor quantitates α, β, v et n inuoluat, ternas priores α, β et v tanquam datas et conftantes fpectemus, dum quarta n quafi variabilis confideretur; hocque modo fummam quaefitam S tanquam certam functionem quantitatis n contemplari licebit, quam more recepto hoc modo repraefentemus: $S = \Phi : n$, ita vt fit

$$\begin{aligned}\Phi : n = 1 &+ n v + \tfrac{1}{2} n (n + \alpha + \beta)\, v^2 \\ &+ \tfrac{1}{6} n (n + \alpha + 2\beta)(n + 2\alpha + \beta)\, v^3 \\ &+ \tfrac{1}{24} n (n + \alpha + 3\beta)(n + 2\alpha + 2\beta)(n + 3\alpha + \beta)\, v^4 \\ &+ \tfrac{1}{120} n (n + \alpha + 4\beta)(n + 2\alpha + 3\beta)(n + 3\alpha + 2\beta)\, \times \\ &\quad \times (n + 4\alpha + \beta)\, v^5 + \text{etc.}\end{aligned}$$

§. 26. Cum igitur haec aequatio vera effe debeat, quicunque numeri loco n fcribantur, loco n ftatuamus

mus primo $n-\alpha$ et impetrabimus

$$\Phi:(n-\alpha) = 1 + (n-\alpha)v + \tfrac{1}{2}(n-\alpha)(n+\beta)v^2$$
$$+ \tfrac{1}{6}(n-\alpha)(n+2\beta)(n+\alpha+\beta)v^3$$
$$+ \tfrac{1}{24}(n-\alpha)(n+3\beta)(n+\alpha+2\beta)(n+2\alpha+\beta)v^4$$
$$+ \tfrac{1}{120}(n-\alpha)(n+4\beta)(n+\alpha+3\beta) \times$$
$$\times (n+2\alpha+2\beta)(n+3\alpha+\beta)v^5 + \text{etc.}$$

Simili vero modo reperiemus fore

$$\Phi:(n-\beta) = 1 + (n-\beta)v + \tfrac{1}{2}(n-\beta)(n+\alpha)v^2$$
$$+ \tfrac{1}{6}(n-\beta)(n+2\alpha)(n+\alpha+\beta)v^3$$
$$+ \tfrac{1}{24}(n-\beta)(n+3\alpha)(n+\alpha+2\beta)(n+2\alpha+\beta)v^4$$
$$+ \tfrac{1}{120}(n-\beta)(n+4\alpha)(n+\alpha+3\beta)(n+2\alpha+2\beta)$$
$$\times (n+3\alpha+\beta)v^5 + \text{etc.}$$

§. 27. Subtrahamus nunc priorem harum duarum ferierum a posteriore, et cum pro terminis cuiuscunque ordinis, praetermissis factoribus communibus, habeamus

$$(n-\beta)(n+\lambda\alpha) - (n-\alpha)(n+\lambda\beta) = (\lambda+1)n(\alpha-\beta),$$

hoc obferuato, fubtractione facta inueniemus

$$\Phi:(n-\beta) - \Phi:n-\alpha)$$
$$= (\alpha-\beta)v + \tfrac{2}{2}(\alpha-\beta)nv^2 + \tfrac{3}{6}(\alpha-\beta)n(n+\alpha+\beta)v^3$$
$$+ \tfrac{4}{24}(\alpha-\beta)n(n+\alpha+2\beta)(n+2\alpha+\beta)v^4$$
$$+ \tfrac{5}{120}(\alpha-\beta)n(n+\alpha+3\beta)(n+2\alpha+2\beta)$$
$$\times (n+3\alpha+\beta)v^5 \text{ etc.}$$

§. 28. Quia in hac ferie omnes termini factorem continent $(\alpha-\beta)v$, per hunc diuidendo consequimur hanc aequationem:

$$\frac{\Phi:(n-\beta)-\Phi:(n-\alpha)}{(\alpha-\beta)v} = 1 + nv + \tfrac{1}{2}n(n+\alpha+\beta)v^2$$
$$+ \tfrac{1}{6}n(n+\alpha+2\beta)(n+2\alpha+\beta)v^3$$
$$+ \tfrac{1}{24}n(n+\alpha+3\beta)(n+2\alpha+2\beta)$$
$$\times(n+3\alpha+\beta)v^4 + \text{etc.}$$

quae ſeries cum ſit ea ipſa, quam charactere $\Phi:n$ inſignivimus, pro ſumma eruenda hanc adepti ſumus aequationem:

$$\Phi:(n-\beta)-\Phi:(n-\alpha) = (\alpha-\beta)\,v\,\Phi:n.$$

§. 29. Totum negotium igitur ad hanc quaeſtionem eſt perductum: cuiusmodi functionem ipſius n pro $\Phi:n$ accipi oporteat, vt huic aequationi ſatisfiat? Leuiter autem eam inſpicienti mox patebit, ei tali poſitione ſatisfieri poſſe: $\Phi:n = A\,k^n$, vbi quidem neque A neque k litteram n inuoluat; tum autem erit

$$\Phi:(n-\alpha) = A\,k^{n-\alpha} \text{ et } \Phi:(n-\beta) = A\,k^{n-\beta}.$$

Subſtitutis autem his valoribus aequatio inuenta iſtam induet formam:

$$A\,(k^{n-\beta} - k^{n-\alpha}) = (\alpha-\beta)\,v\,A\,k^n$$

quae diuiſa per $A\,k^n$ abit in hanc: $k^{-\beta} - k^{-\alpha} = (\alpha-\beta)\,v$, quam ſi ducamus in $k^{\alpha+\beta}$ et loco n ſcribamus x, deducimur ad ipſam aequationem trinomialem initio commemoratam: $x^\alpha - x^\beta = (\alpha-\beta)\,v\,x^{\alpha+\beta}$.

§. 30. Sic igitur ſolidiſſime eſt euictum, ſummam ſeriei *Lambertinae* neceſſario tali formula exprimi, nempe $S = A\,k^n$, ſiue $S = A\,x^n$, vbi cum poſito $n = 0$ ſumma ſeriei fieri debeat $= 1$, manifeſtum eſt litteram A neceſſario fieri $= 1$, ita vt ſumma iſtius ſeriei prorſus ſit vti

eſt

eſt aſſignata: ſcilicet $S = x^n$, ſiquidem quantitas x iſta aequatione eliciatur: $x^\alpha - x^\beta = (\alpha - \beta)\, v\, x^{\alpha+\beta}$.

§. 31. Contra hanc ſolutionem obiici poſſet, aequationi inuentae

$$\Phi : (n - \beta) - \Phi : (n - \alpha) = (\alpha - \beta)\, v\, \Phi : n$$

fortaſſe adhuc aliis modis ſatisfieri poſſe, praeter valorem $\Phi : n = A\, k^n$, quod quidem negari nequit, cum huiusmodi aequationes plerumque plures admittere ſoleant ſolutiones. Verum, etiamſi ſufficere queat iſtum valorem prorſus ſatisfacere, atque adeo ita, vt neque A neque k ab n pendeat: tamen idem ex principiis Analyſeos infinitorum etiam ſequenti modo confirmari poteſt.

§. 32. Cum $S = \Phi : n$ ſit functio ipſius n, hac quantitate variabili aſſumta, ex notis principiis conſtat fore

$$\Phi : (n - \alpha) = S - \frac{\alpha\, dS}{dn} + \frac{\alpha^2\, d\, dS}{2\, dn^2} - \frac{\alpha^3\, d^3 S}{1.\,2.\,3.\, dn^3} + \frac{\alpha^4\, d^4 S}{1.\,2.\,3.\,4.\, dn^4} - \text{etc.}$$

ſimilique modo

$$\Phi : (n - \beta) = S - \frac{\beta\, dS}{dn} + \frac{\beta^2\, d\, dS}{1.\,2.\, dn^2} - \frac{\beta^3\, d^3 S}{1.\,2.\,3.\, dn^3} + \frac{\beta^4\, d^4 S}{1.\,2.\,3.\,4.\, dn^4} - \text{etc.}$$

his ſubſtitutis perueniemus ad iſtam aequationem differentialem infinitam:

$$(\alpha - \beta)\, v S = (\alpha - \beta)\frac{dS}{dn} - (\alpha\alpha - \beta\beta)\frac{d\, dS}{1.\,2.\, dn^2}$$
$$+ (\alpha^3 - \beta^3)\frac{d^3 S}{1.\,2.\,3.\, dn^3} - (\alpha^4 - \beta^4)\frac{d^4 S}{1.\,2.\,3.\,4.\, dn^4} + \text{etc.}$$

ex qua quantitatem S erui oportet.

§. 33. Cum autem in ſingulis huius aequationis terminis variabilis S vnicam vbique dimenſionem occupet, in in calculo integrali autem ostensum sit, tali aequationi aliter satisfieri non posse, nisi huiusmodi valoribus: $S = C e^{\lambda n}$: hoc euicto, si statuamus $e^{\lambda} = k$, fiet $S = C k^n$, prorsus vti ante assumseramus, ita vt iam nihil amplius super serie *Lambertina* desiderari posse videatur.

Vberior confirmatio Solutionis datae.

§. 34. Si ad solam conditionem inuentam respiciamus, qua esse debet

$$\Phi : (n - \beta) - \Phi : (n - \alpha) = (\alpha - \beta) v \Phi : n,$$

ei vtique modo multo generaliori satisfieri potest. Quodsi enim singulae litterae p, q, r, s etc. fuerint radices aequationis huius: $x^{-\beta} - x^{-\alpha} = (\alpha - \beta) v$, manifestum est istum valorem:

$$\Phi : n = A p^n + B q^n + C r^n + D s^n + \text{etc.}$$

eidem conditioni satisfacere. In hac igitur formula certo continebitur valor summae S seriei *Lambertinae*, quae cum sit determinata et a solis quantitatibus α, β, n et v pendeat, quaeritur, quomodo litteras illas indefinitas A, B, C, D etc. determinari oporteat, vt fiat $S = \Phi : n$.

§. 35. Hic autem statim duo casus se offerunt, prouti vel vnica radicum summam S definit, vel omnes plane radices ad eam definiendam concurrunt, quos ergo ambos casus sollicite perpendi conueniet. Vbi primum obseruo, si omnibus radicibus p, q, r, s etc. simul fuerit vtendum, eas sine dubio pari ratione ingredi debere, cum nulla sit ratio, cur cuipiam earum vlla praerogatiua tribuerebueretur: Forent idcirco coefficientes illi A, B, C, D etc. inter se aequales, ideoque

$$S = A(p^n + q^n + r^n + s^n + \text{etc.});$$

quare cum casu $n = 0$ fieri debeat $S = 1$, si numerus radicum statuatur $= i$, hoc casu fit $S = A\,i$, ergo $A = \frac{1}{i}$.

§. 36. Praeterea autem nostra series ita est comparata, vt sumto $v = 0$ etiam prodeat eius summa $S = 1$. Iam vero casu $v = 0$ nostra aequatio erit $x^{-\beta} - x^{-\alpha} = 0$, siue $x^{\alpha-\beta} - 1 = 0$, cuius vna radix semper est $= 1$, et summa omnium radicum semper est $= 0$, solo casu excepto, quo $\alpha - \beta = 1$. Quodsi ergo sumatur $n = 1$, prodiret $S = \frac{1}{i}(p + q + r + s + \text{etc.}) = 0$, cum tamen summa sit $= 1$, ita vt ista hypothesis veritati aduersetur.

§. 37. Idem incommodum etiam multo clarius elucescet, si in genere statuamus $n = 1$, quippe quo casu foret $S = \frac{1}{i}(p + q + r + s + \text{etc.})$, vbi $p + q + r + s + \text{etc.}$ est summa radicum aequationis trinomialis

$$x^{-\beta} - x^{-\alpha} = (\alpha - \beta)\,v$$

ideoque aequabitur coëfficienti secundi termini, postquam aequatio in ordinem fuerit redacta, qui cum plerumque deficiat, summa seriei etiam nihilo foret aequalis; quod cum veritati contradicat, satis euictum est, non omnes radices aequationis trinomialis ad summam S constituendam concurrere posse.

§. 38. Hoc igitur casu remoto, quo omnes radices aequaliter ingrederentur, relinquitur casus prior, quo summa S per vnicam istarum radicum determinatur, quemadmoadmodum in ſolutione aſſumſimus. Euidens autem eſt iſtam radicem fore vel maximam vel minimam: hic ſcilicet idem diſcrimen vſu venit, atque in reſolutione omnium aequationum per ſeries recurrentes, qua methodo pariter tantum vna aequationum radix vel maxima vel minima inueniri ſolet, ſicque ſolutio noſtra data iam extra omne dubium eſt collocata. Occaſione autem methodi, qua ſumus vſi, ſequens problema adiunxiſſe non pigebit.

Problema.

Inuenire omnes functiones quantitatis variabilis n, quibus huic conditioni generali ſatisfiat:

$$\phi : n = a\phi : (n+\alpha) + b\phi : (n+\beta) + c\phi : (n+\gamma) + \text{etc.}$$

Solutio.

§. 39. Quodſi ratiocinium vti in praecedenti problemate inſtituamus, facile patebit, iſti conditioni ſatisfieri poſſe, ſtatuendo $\phi \cdot n = \mathrm{A} k^n$, ita vt A et k ſint quantitates conſtantes. Facta autem hac ſubſtitutione prodibit haec aequatio:

$$\mathrm{A} k^n = \mathrm{A} a k^{n+\alpha} + \mathrm{A} b k^{n+\beta} + \mathrm{A} c k^{n+\gamma} + \mathrm{A} d k^{n+\delta} + \text{etc.}$$

quae per A k^n diuiſa praebet

$$1 = a k^\alpha + b k^\beta + c k^\gamma + d k^\delta \text{ etc.}$$

ita vt k deſignet quampiam radicem huius aequationis, cuius adeo ſingulae radices conditioni praeſcriptae pariter ſatisfacient. Quin etiam omnes has diuerſas ſolutiones quomodocunque inter ſe combinare licebit. Ita ſi p, q, r, s etc. fuerint radices iſtius aequationis, problemati noſtro gene-

generaliter ſatisfiet, ſtatuendo

$$\Phi : n = A\, p^n + B\, q^n + C\, r^n + \text{etc.}$$

vbi litterae A, B, C, D etc. penitus arbitrio noſtro relinquuntur; haecque eſt ſolutio generalis problematis illius analytici, quod frequenter inſignem vſum afferre poterit.

§. 40. Sed reuertamur ad ſeriem *Lambertinam* atque oſtendamus, quomodo ex ea innumerabiles aliae ſeries affines deriuari queant.

Problema.

Propoſita ſerie *Lambertina*, quam breuitatis gratia ſub hac forma referamus:

$$S = 1 + A\,v + B\,v^2 + C\,v^3 + D\,v^4 + \text{etc.}$$

cuius nouimus eſſe ſummam $= x^n$, ſumendo pro x ſiue maximam ſiue minimam radicem huius aequationis trinomiae: $x^\alpha - x^\beta = (\alpha - \beta)\, v\, x^{\alpha+\beta}$, inde innumerabiles alias ſeries affines formare, quarum ſummam pariter aſſignare liceat.

Solutio.

§. 31. Hic igitur litteris A, B, C, D etc. breuitatis gratia ſequentes valores tribuimus:

$$A = n;\ B = \tfrac{1}{2} n (n + \alpha + \beta);\ C = \tfrac{1}{6} n (n + \alpha + 2\beta)(n + 2\alpha + \beta);$$
$$D = \tfrac{1}{24} n (n + \alpha + 3\beta)(n + 2\alpha + 2\beta)(n + 3\alpha + \beta);$$
$$E = \tfrac{1}{120} n (n + \alpha + 4\beta)(n + 2\alpha + 3\beta)(n + 3\alpha + 2\beta)(n + 4\alpha + \beta)$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

His igitur valoribus notatis duae potiſſimum viae patent ad alias ſeries inde deriuandas: altera ſcilicet per differentiationem, altera vero per integrationem inſtitui poteſt.

§. 42. Cum ſit $(\alpha - \beta) v = x^{-\beta} - x^{-\alpha}$ erit

$$(\alpha - \beta)\, d v = -\beta x^{-\beta - 1}\, d x + \alpha x^{-\alpha - 1}\, d x$$

ſiue

$$(\alpha - \beta)\, d v = \frac{d x (\alpha x^{\beta} - \beta x^{\alpha})}{x^{\alpha + \beta + 1}};$$

hinc ergo ſi noſtram feriem differentiemus, ac per $d v$ diuidamus, ad ſequentem perueniemus ſummationem:

$$\frac{(\alpha - \beta)\, n x^{n + \alpha + \beta}}{\alpha x^{\beta} - \beta x^{\alpha}} = A + 2 B v + 3 C v v$$
$$+ 4 D v^{3} + 5 E v^{4} + 6 F v^{5} \text{ etc.}$$

§. 43. Potuiſſemus etiam feriem propoſitam per quampiam poteſtatem ipſius v ante multiplicare, quam differentiatio inſtituatur; veluti multiplicando per v^{λ}, vt habeamus

$$v^{\lambda} x^{n} = v^{\lambda} + A v^{\lambda + 1} + B v^{\lambda + 2} + C v^{\lambda + 3} + D v^{\lambda + 4} + \text{etc.}$$

haec feries differentiata ac per $d v$ diuiſa praebet

$$\lambda v^{\lambda - 1} x^{n} + n v^{\lambda} x^{n - 1} . \frac{d x}{d v} = \lambda v^{\lambda - 1} + (\lambda + 1) A v^{\lambda}$$
$$+ (\lambda + 2) B v^{\lambda + 1} + (\lambda + 3) C v^{\lambda + 2}$$
$$+ (\lambda + 4) D v^{\lambda + 3} + (\lambda + 5) E v^{\lambda + 4} + \text{ etc.}$$

quae expreſſio per $v^{\lambda - 1}$ diuiſa praebet hanc ſummationem:

$$\lambda x^{n} + n v x^{n - 1} \frac{d x}{d v} = \lambda + (\lambda + 1) A v$$
$$+ (\lambda + 2) B v^{2} + (\lambda + 3) C v^{3} + (\lambda + 4) D v^{4} + \text{etc.}$$

pro qua modo vidimus eſſe

$$\frac{n x^{n - 1}\, d x}{d v} = \frac{(\alpha - \beta)\, n x^{\lambda + \alpha + \beta}}{\alpha x^{\beta} - \beta x^{\alpha}},$$

quo

quo valore fubftituto ifta fumma euadet

$$= \lambda x^n + \frac{n x^{n+\alpha} - n x^{n+\beta}}{\alpha x^\beta - \beta x^\alpha}$$

$$= \frac{x^n}{\alpha x^\beta - \beta x^\alpha} \left((\lambda \alpha - n) x^\beta - (\lambda \beta - n) x^\alpha \right).$$

§. 44. Quodfi iam hanc feriem denuo per v^μ multiplicemus, iterumque differentiemus, innumerabiles nouas feries adipifcemur, quarum fummatio itidem eft in poteftate. Hocque modo continuo vlterius progredi licebit, quem autem laborem perfequi prorfus foret fuperfluum.

§. 45. Simili modo per integrationem nouas feries elicere poterimus. Quodfi enim feriem propofitam per

$$d v = \frac{\alpha x^{-\alpha-1} d x}{\alpha - \beta} - \frac{\beta x^{-\beta-1} d x}{\alpha - \beta},$$

multiplicemus et vtrinque integremus, perueniemus ad fequentem fummationem:

$$\frac{\alpha x^{n-\alpha}}{(\alpha-\beta)(n-\alpha)} - \frac{\beta x^{n-\beta}}{(\alpha-\beta)(n-\beta)} = v + \tfrac{1}{2} A v v$$
$$+ \tfrac{1}{3} B v^3 + \tfrac{1}{4} C v^4 + \tfrac{1}{5} D v^5 + \text{etc.} + \text{conft.}$$

ad quam conftantem definiendam confideretur cafus $v = 0$, quo fit $x = 1$, indeque conftans $= \frac{n}{(n-\alpha)(n-\beta)}$.

§. 56. Potuiffemus etiam ante integrationem multiplicare per v^λ; verum hoc modo in calculos nimis operofos incidiffemus, vnde nobis fufficiat, fontem aperuiffe, ex quo innumerabiles huiusmodi nouae feries hauriri queant.