

多様体の崩壊—ペレルマンの仕事まで

山口孝男

筑波大学数理物質科学研究科

1. はじめに

ガウス・ボンネの定理に代表されるように、リーマン多様体の曲率と位相の間には密接な関係があり、これを明らかにすることは大域リーマン幾何学の大きな主題の一つである。例えば古典的な球面定理によれば、 n 次元のコンパクト単連結なリーマン多様体 M の断面曲率 K が $1/4 < K \leq 1$ を満たせば、 M は n 次元球面に同相である。ここでの研究手法は、 n 次元単位球面 $S^n(1)$ をモデル空間として設定し、 M の幾何学と $S^n(1)$ の幾何学を比較して M の位相的結論を導き出すというものである。

多様体の崩壊とは、多様体の無限列がより低い次元の“空間”に潰れていく現象を云う。筆者は、崩壊する多様体が表す何らかの特徴を捉えて、多様体の位相などの大域構造を理解することが、崩壊現象を研究する醍醐味であるように思う。崩壊理論においては、特別なモデル空間を設定する必要はないので、その適用範囲が広く、多くの多様体を研究対象とすることが出来る。もちろん、大域構造を理解する為には、多様体の曲率条件を設定し、その条件の下にリーマン多様体の崩壊を考察する必要がある。曲率の条件として、なるべく条件の緩い一般的なものを設定した方が良いのは当然である。

多様体の崩壊理論は、初めに断面曲率の絶対値を一様に押えた場合に、チーガー・グロモフ、深谷により研究され、すでに一般論が完成されている ([3])。この講演では、断面曲率の下限を一様に下から押えた場合の崩壊理論 (特に3次元の場合) と、最近のペレルマンのリッチ流と3次元多様体の幾何化に関する仕事 ([8], [9]) において崩壊理論がどのように適用されているかを解説し、多様体の崩壊理論の展開とその応用の一面を紹介したい。

2. 断面曲率の下限とグロモフ-ハウスドルフ収束

先ず、コンパクト距離空間全体の等長類の集合 $\mathcal{C}$ 上のグロモフ-ハウスドルフ距離, d_{GH} , の定義 ([5]) を述べておこう。距離空間 Z のコンパクト部分集合 A, B の古典的ハウスドルフ距離 $d_H^Z(A, B)$ が、 A の ϵ -近傍が B を含み、そして B の ϵ -近傍が A を含むような $\epsilon > 0$ の

山口孝男 筑波大学数理物質科学研究科

下限として定まる. 一般のコンパクト距離空間 $X, Y \in \mathcal{C}$ の間のグロモフ-ハウスドルフ距離は

$$d_{GH}(X, Y) = \inf_{Z, f, g} d_H^Z(f(X), g(Y)),$$

と定義される. ここで下限は全ての距離空間 Z と等長的埋め込み $f: X \rightarrow Z, g: Y \rightarrow Z$ に渡る.

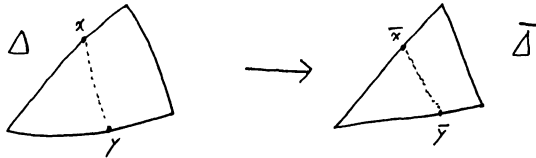
n 次元完備リーマン多様体 M の断面曲率 K が到る所 $K \geq -1$ を満たすとする. このとき, M の一点から出る 2 本の最短測地線の間の距離や距離球の体積などが, 定曲率 -1 の双曲空間 $H^n(-1)$ における対応する量で上から押えられる. すなわち, 次が成り立つ:

M の幾何学 $\leq H^n(-1)$ の幾何学

n 次元閉リーマン多様体 M^n で, 断面曲率 $K \geq -1$, 直径 $\leq D$ を満たすものの等長類の集合を $\mathcal{M}(n, D)$ と表す. 上に述べた M の幾何学の有界性から次のプレコンパクト性定理が従う.

定理 2.1 (グロモフ). $\mathcal{M}(n, D)$ は $(\mathcal{C}, d_{GH})$ において相対コンパクトである.

そこで $\mathcal{M}(n, D)$ 内の無限列 M_i^n がコンパクト距離空間 $X \in \overline{\mathcal{M}(n, D)}$ にグロモフ-ハウスドルフ距離に関して収束すると仮定する. ここで, X は次元が n 以下, 曲率が -1 以上のアレクサンドロフ空間の構造をもつことが分かる. すなわち, X 内の任意の測地三角形 Δ に対して, 定曲率 -1 の双曲平面上に Δ の比較三角形 (辺の長さが対応する Δ の辺の長さに等しい三角形) $\bar{\Delta}$ を取るとき, 自然な対応 $\Delta \rightarrow \bar{\Delta}$ が縮小写像となる.



定曲率 -1 の双曲平面の代わりに定曲率 κ の完備単連結曲面を取ることにより, 曲率が κ 以上のアレクサンドロフ空間が同様に定義される.

$\mathcal{M}(n, D)$ を理解する為の最も本質的な問題は次である.

問題 2.2. $\mathcal{M}(n, D)$ 内の無限列 M_i^n がアレクサンドロフ空間 X にグロモフ-ハウスドルフ距離に関して収束するとき, 十分大きい i に対して M_i^n と X の間の位相的關係を決定せよ.

3. ファイブレーション定理と安定性定理

ある特別な場合には問題 2.2 の解答が得られている.

多様体の崩壊—ペレルマンの仕事まで

一般のアレクサンドロフ空間 X は特異点 (尖った点) をもつし、位相多様体にならないものもある。簡単の為、ここでは特異点であっても、あまり尖っていない点は、特異点ではなく正則点と見做すことにする。

極限空間 X に特異点がない場合、次が成り立つ。

定理 3.1 ([13]). $\mathcal{M}(n, D)$ において、 M_i^n がアレクサンドロフ空間 X に崩壊するとする。もし X が特異点をもたなければ、 M は X 上の局所自明ファイバー束になる。

X が一般のアレクサンドロフ空間の場合でも、正則点の集合 X_0 は open-dense で X において full measure をもつ (ブラゴーグロモフ-ペレルマン [2], 大津一塩谷 [6])。従って定理 3.1 は X_0 の任意の開領域 Y に対して適用できる。こうして Y に対応する M_i^n の開領域 N_i にファイバー束の構造を定めることが出来る。このファイバーを正則ファイバーと呼ぶことにする。崩壊理論の主要課題は、補集合 $M_i - N_i$ 上に、 N_i のファイバー束構造に両立した特異ファイバー構造を定めること、と云っても過言ではない。

ペレルマンは、 M_i^n が崩壊しない場合に、アレクサンドロフ空間の幾何学に幾何学的トポロジーにおける同相写像の変形理論 [12] を適用し、次の位相的安定性定理を証明した。

定理 3.2 ([7]). $\mathcal{M}(n, D)$ 内の無限列 M_i^n が同じ次元のアレクサンドロフ空間 X^n にグロモフ-ハウスドルフ距離に関して収束するとき、十分大きな i に対して M_i^n は X^n に同相である。

定理 3.2 より、 M_i^n が崩壊する場合、つまり X の次元が $n-1$ 以下の場合が問題となる。

4. 3次元多様体の崩壊

n が小さいとき、 $\mathcal{M}(n, D)$ の閉包に現れるアレクサンドロフ空間の特異点の構造は分かり易く、また崩壊の余次元が小さいことから正則ファイバーも決定されるので、一般次元に比べれば崩壊現象を調べ易い。そこで先ず、塩谷隆氏との研究 ([10], [11]) により解明された3次元多様体の崩壊に関する結果を述べよう。以後、3次元多様体は全て向きづけ可能と仮定する。3次元多様体 M が曲面 X 上のザイフェルト束であるとは、有限個の特異 S^1 -ファイバーを除いて、 M が X 上の S^1 -ファイバー束になっている場合を云う。

$\mathcal{M}(3, D)$ における崩壊は次のように記述される ([10]) : $\mathcal{M}(3, D)$ の無限列 M_i^3 がアレクサンドロフ空間 X に崩壊していると仮定する。

- (1) X が2次元である場合、 X は位相多様体で、その境界と高々有限個の内部点を除くすべての点が正則点である。このとき M_i は、軌道空間が X であるような局所 S^1 -作用をもつ。(この

山口孝男 筑波大学数理物質科学研究科

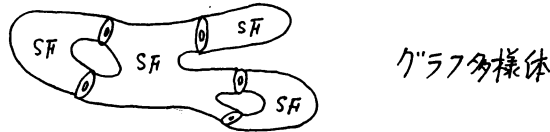
S^1 -作用の固定点集合は X の境界に対応し、例外軌道 (イソトロピー群が有限である軌道) は、内部 $\text{int } X$ の特異点上にのみ存在する。特に、 X に境界がなければ M_i は X 上のザイフェルト束である)。

- (2) X が 1 次元である場合、 X は円周または閉区間に等長的である。 X が円周であれば、 M_i は円周上の球面またはトーラス束になり、 X が 1 次元閉区間であるときは、 M_i は、円盤 D^3 や $P^2 \tilde{\times} I$ の境界の球面に沿った張り合わせか、トーラス体 $S^1 \times D^2$ や $K^2 \tilde{\times} I$ の境界のトーラスに沿った張り合わせになる。ここで $P^2 \tilde{\times} I = (S^2 \times I)/\mathbb{Z}_2$ は射影平面 P^2 上の、 $K^2 \tilde{\times} I = (T^2 \times I)/\mathbb{Z}_2$ はクラインの壺 K^2 上の非自明 I -ファイバー束を表す。
- (3) X が一点の場合、 M_i の有限被覆はホモトピー球面、 $S^1 \times S^2$ 、トーラス T^3 、べき零多様体のいずれかになる (深谷-山口 [4])。

直径が有界でない場合の崩壊定理として、次が成り立つ。

定理 4.1 ([11]). 正数 ϵ_0 が存在して、向きづけ可能な 3 次元閉備リーマン多様体 M の断面曲率と体積が $K \geq -1$, $\text{vol}(M) < \epsilon_0$ を満たし、 M の直径が 1 以上ならば、 M グラフ多様体である。

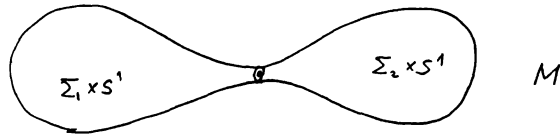
ここでグラフ多様体とは、いくつかのザイフェルト束の境界トーラス達を張り合わせて得られる多様体を指す。



例 4.2 (グラフ多様体の崩壊). 簡単のため、 Σ_1, Σ_2 を境界が連結なコンパクト曲面として、3 次元多様体

$$M = \Sigma_1 \times S^1 \bigcup_f \Sigma_2 \times S^1,$$

を考える。ここで $f: \partial\Sigma_1 \times S^1 \rightarrow \partial\Sigma_2 \times S^1$ は $f(x, y) = (y, x)$ で定まる張り合わせ写像である。 M は最も単純なグラフ多様体の一つである。



各ピース $\Sigma_i \times S^1$ は自然な S^1 作用をもつが、 f の定め方から、一般に M 上には S^1 作用は (局所 S^1 作用ですら) 存在しない。直径の上界 D

多様体の崩壊—ペレルマンの仕事まで

を外した場合、次のように M に崩壊計量を定めることが出来る。任意の $\epsilon > 0$ に対して、 $\Sigma_i(\epsilon)$ で、曲率の絶対値が 1 以下で、その面積が ϵ に関係なく一様に有界で、 Σ_i の境界のある近傍が $S^1(\epsilon) \times [0, 1]$ に等長的であるようなリーマン計量を備えた Σ_i を表すとする。ここで $S^1(\epsilon)$ は半径 ϵ の円周を表す。そこで M 上のリーマン計量 g_ϵ を、張り合わせ $\Sigma_1(\epsilon) \times S^1(\epsilon) \bigcup_f \Sigma_2(\epsilon) \times S^1(\epsilon)$ により定める。 (M, g_ϵ) の断面曲率の絶対値は 1 以下であり、 $\epsilon \rightarrow 0$ のとき (M, g_ϵ) の体積はゼロに収束する。また、 $\Sigma_i(\epsilon)$ の直径が ∞ に発散することから (M, g_ϵ) の直径も ∞ に発散する。ここで (M, g_ϵ) の極限空間はどのようなものだろうか？ 実は M のどの点を中心にして極限を考えるかによって異なった極限空間が現れる。たとえば点 p を張り合わせトーラスの近くにとれば p のまわりの近傍は $\epsilon \rightarrow 0$ のとき、1 次元の線分に崩壊するし、 p を張り合わせトーラスから遠い点に選べば p のまわりの近傍は 2 次元曲面に崩壊する。

定理 4.1 の証明の方針. M の各点 p のまわりの局所近傍 B_p は、次元が 1 または 2 の (曲率が -1 以上の) アレクサンドロフ空間内のある近傍 U_p にグロモフ-ハウスドルフ距離の意味で近い。上の $M(3, D)$ における崩壊の分類から B_p の位相が分かる。ここで U_p の次元は一定ではなく p が変われば変化する可能性がある (M の直径が有界でない為)。そこで U_p の次元により (正確には U_p の面積が小さいときはこれを 1 次元とみなす必要がある)、 M を 1 次元的部分 V_1 と 2 次元的部分 V_2 に分割する。距離関数に対するモース理論から、 V_1 の各連結成分の位相は次の 6 種類に決定される:

$$\begin{aligned} S^2 \times I, \quad D^3, \quad P^2 \tilde{\times} I \quad (\text{正則ファイバーが } S^2 \text{ のとき}) \\ T^2 \times I, \quad S^1 \times D^2, \quad K^2 \tilde{\times} I \quad (\text{正則ファイバーが } T^2 \text{ のとき}) \end{aligned}$$

また S^1 -作用の張り合わせを実行することにより、 V_2 上に局所 S^1 -作用を構成することが出来る。これより M がグラフ多様体であることが従う。□

ペレルマンのリッチ流と 3 次元多様体の幾何化に関する仕事の中で、3 次元多様体の崩壊に関する結果がアナウンスされている。次にそれについて述べよう。

3 次元閉リーマン多様体 (M, g) が ϵ -局所崩壊するとは、 M の任意の点 x に対して正の数 $\rho = \rho_x$, $0 < \rho \leq \text{diam}(M, g)$, が存在して、

$$(1) \quad \text{vol} B(x, \rho) \leq \epsilon \rho^3, \quad K \geq -\rho^{-2} \quad \text{on } B(x, \rho).$$

が成り立つときを云う。つまり各点 x のまわりで計量を $1/\rho^2$ 倍してリスケールすれば、 x のまわりの単位球の上で断面曲率が -1 以上で、その体積が ϵ 以下、となる場合である。これは定理 4.1 の状況と似ている。本質的な違いは上の $\rho = \rho_x$ が x に依存していることである。

山口孝男 筑波大学数理物質科学研究科

定理 4.3 ([9]). 正数 ϵ_0 が存在して、向きづけ可能な 3 次元閉リーマン多様体 M が ϵ_0 -局所崩壊すれば、 M はグラフ多様体である。

上の ρ_x を (1) が成り立つ最大数として定めると、 x が少し変化したとき ρ_x がそれ程大きく変化することが無いことが示せる。その結果、定理 4.3 は定理 4.1 の証明の議論 (本質的には S^1 -作用の張り合わせの議論) から従うことが分かる。

5. リッチ流による 3 次元多様体の幾何化

1980 年代初めにサーストンによって提唱された 3 次元多様体の幾何化予想は、3 次元多様体全体を分類する上で決定的なものである。以下断らない限り、3 次元多様体はコンパクトで境界がなく向きづけ可能なものとする。

二つの 3 次元多様体 M_1, M_2 から開球体を取り除きそれらの境界球面を張り合わせて得られる 3 次元多様体を M_1 と M_2 の連結和と云い $M_1 \# M_2$ と表す。任意の 3 次元多様体 M は $M = M_1 \# \cdots \# M_k$ と順序を除いて一意的に連結和に分解される (クネーザー、ミルナー)。ここで各 M_i は素 (prime) と呼ばれ、自明でない連結和を持たない。

M に埋め込まれたトーラス T が非圧縮的であるとは、包含写像が誘導する基本群の準同型 $\pi_1(T) \rightarrow \pi_1(M)$ が単射である場合をいう。

予想 5.1 (サーストン幾何化予想). 任意の素な 3 次元多様体はいくつかの非圧縮トーラスにより、幾何構造をもつピース (閉領域) に分解される。

ここで幾何構造をもつピースとは、どの点も局所的には同じように見えるリーマン多様体 (局所等質空間とよばれる空間) に微分同相なピースを指す。単連結な 3 次元閉多様体は球面であるという有名なポアンカレ予想は幾何化予想から従う。また、幾何構造をもつ 3 次元多様体のモデルは 8 つある。定曲率空間としてのユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ 、球面 S^3 、双曲空間 $\mathbf{H}^3$ の 3 つと、2 次元と 1 次元の積と捻った積から来る 5 つ ($S^2 \times \mathbf{R}$, $\mathbf{H}^2 \times \mathbf{R}$, $\widetilde{SL}(2, \mathbf{R})$, 単連結ベキ零群 Nil , 単連結可解群 Sol) である。

幾何化予想は、任意の素な 3 次元多様体は、いくつかのグラフ多様体と双曲多様体を非圧縮トーラスにより張り合わせて得られるであろう、と言い換えることもできる。

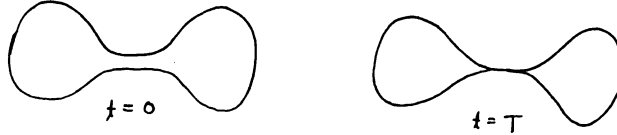
幾何化予想に対する R. ハミルトンのアイデアは、多様体の初期計量 $g_{ij}(0)$ を、リッチ曲率 R_{ij} により発展させる偏微分方程式

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2R_{ij}$$

の解 (リッチ流) によって出来るだけ良い計量に変形しようというものである。リッチ流 $g_{ij}(t)$ は少なくとも短時間 $[0, \epsilon)$ 解が存在する。解

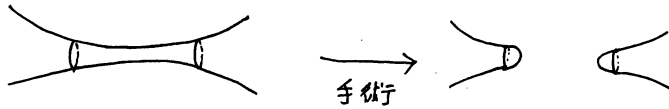
多様体の崩壊—ペレルマンの仕事まで

が存在する極大時間を $[0, T)$ とし、 $T < \infty$ と仮定すると、リッチ流には $t = T$ において特異点が現れ、 $t \rightarrow T$ のとき特異点が現れる部分で曲率は $|K| \rightarrow \infty$ と爆発する。下図は、ダンベル型の3次元球面から出発したリッチ流が有限時間で特異点をもつ様子を示している。



ペレルマンは、ハミルトンによる幾何化予想解決に向けたプログラムに沿った形で、次を明らかにしたと宣言している ([8], [9]) (信憑性が高いと云われるが、残念ながらまだ専門家によって検証中の状態が続いている) :

- (1) 有限時間で起こるリッチ流の特異点は、基本的には $S^2 \times \mathbf{R}$ 上の標準的なものに近い (計量の特異点が起こる寸前で特異点の近くで適当にリスケールするとき、リッチ流が $S^2 \times \mathbf{R}$ 上の標準解に近いという意味で)。
- (2) 特異点が起こる寸前で特異点の近くで下図のような手術を施しその後再びリッチ流を走らせる。そして再び特異点が現れたらその寸前で手術を施すということを繰り返すとき、有限時間内では有限回の手術しか施されない。



上述の手術付きリッチ・フローをどんどん走らせていくと、初めの3次元多様体 M はいくつかの連結成分に分解されていく。その内すべての点でスカラー曲率が非常に大きいような連結成分が現れた場合、その連結成分の位相は S^3 または $S^2 \times \mathbf{R}$ の商空間になることがわかるので、そのような連結成分はどんどん捨てて行く。(逆にこれら全てのピース達から M を復元するには連結和の操作を行えば良い)。

十分大きい時刻 t で残された連結成分の一つを固定して、その上のリッチ流を $(N, h(t))$ と表す。正の数 ϵ_0 を定理 4.3 におけるものとする。 N の点 p を中心とするある半径の距離球が計量の適当なリスケールングの下で $K \geq -1$ と体積 $\geq \epsilon_0$ をみたすとき、そのような点 $p \in N$ 全体の集合を N_{thick} と表す ($(N, h(t))$ の崩壊しない部分)。実は一様な定数 C により N_{thick} 上の断面曲率が $-1 \leq K \leq C$ と上からも押えられることが従う。結局この部分の上では $t \rightarrow \infty$ でリッチ流の解が存在し、

山口孝男 筑波大学数理物質科学研究科

計量の縮小リスケーリング $\frac{1}{t}h(t)$ の下で N_{thick} は体積有限の完備双曲空間に収束することが分かる。従って N_{thick} は双曲構造をもつ。

N_{thick} の補集合を N_{thin} と表す。これは ϵ_0 -局所崩壊する部分であり、定理 4.3 より、 N_{thin} はグラフ多様体になる。

まとめると、リッチ流の特異点の部分から連結和分解 ($S^2 \times \mathbf{R}$) が見え、手術で切り離れた後は、途中で捨て去った S^3 や $S^2 \times S^1$ などが抽出される。また、十分長い時間経過後、崩壊理論から崩壊部分がグラフ多様体であることが分かり、非崩壊部分からはリッチ流により双曲幾何構造をもつピースが抽出されることになり、結果として幾何化予想が従うという筋書きである。

6. おわりに

崩壊理論については、[14] により、4次元多様体の崩壊について $\mathcal{M}(4, D)$ における崩壊現象が解明されています。直径が有界でない場合の4次元多様体の崩壊や一般次元多様体の崩壊など、解明されるべき問題が山積している状況です。これらについての詳細については、[1] を参照して頂ければ幸いです。

REFERENCES

1. 山口孝男, リーマン多様体の崩壊をめぐる諸問題, 21世紀の数学—幾何学の未踏峰, 日本評論社, 2004, pp. 124–139.
2. Yu. Burago, M. Gromov, and G. Perel'man, *A. D. Aleksandrov spaces with curvatures bounded below*, Uspekhi Mat. Nauk **47** (1992), no. 2(284), 3–51, 222, translation in Russian Math. Surveys **47** (1992), no. 2, 1–58.
3. J. Cheeger, K. Fukaya, and M. Gromov, *Nilpotent structures and invariant metrics on collapsed manifolds*, J. Amer. Math. Soc. **5** (1992), no. 2, 327–372.
4. K. Fukaya and T. Yamaguchi, *The fundamental groups of almost nonnegatively curved manifolds*, Ann. of Math. (2) **136** (1992), 253–333.
5. M. Gromov, *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, Textes Mathématiques [Mathematical Texts], vol. 1, CEDIC, Paris, 1981, Edited by J. Lafontaine and P. Pansu.
6. Y. Otsu and T. Shioya, *The Riemannian structure of Alexandrov spaces*, J. Differential Geom. **39** (1994), no. 3, 629–658.
7. G. Perelman, *A. D. Alexandrov's spaces with curvatures bounded from below II*, preprint.
8. ———, *The entropy formula for the ricci flow and its geometric applications*, arXiv:math. DG / 0211159.
9. ———, *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, arXiv:math. DG / 0303109.
10. T. Shioya and T. Yamaguchi, *Collapsing three-manifolds under a lower curvature bound*, J. Differential Geom. **56** (2000), no. 1, 1–66.
11. ———, *Volume collapsed three-manifolds with a lower curvature bound*, arXiv:math. DG/030447 (2003).
12. L. C. Siebenmann, *Deformation of homeomorphisms on stratified sets I, II*, Comment. Math. Helv. **47** (1972), 123–163.

多様体の崩壊—ペレルマンの仕事まで

13. T. Yamaguchi, *Collapsing and pinching under a lower curvature bound*, Ann. of Math. (2) **133** (1991), 317–357.
14. ———, *Collapsing 4-manifolds under a lower curvature bound*, preprint, 2002.