三角関数と円周率

幡谷泰史　　廣澤史彦

目 次

第1章　はじめに

1.1　講義概要

小学校の算数で初めて習う「円周率: π」は, 身近にある数学の奥深さを感じさせる魅力的な素材である. しかし, π が持つ単なる円周率を超えた様々な魅力を解説するための数学は, 高等学校の指導要領をほんの少しだけ超えたところにあるため, ほとんどの人たちが π の真の魅力を知らぬまま, 数学の世界から距離を置くようになってしまう.

高等学校で初めて登場する三角関数は, それ以前に学んだ多項式関数や分数関数とは明らかに異質なものに見える. この関数は, 前後して登場する指数関数や対数関数と同様, 適当に代入した値に対して, 関数の値が必ずしも「わかる」わけではなく, そもそも数表やコンピューターを使わなければわからないものがほとんどである. また, この得体の知れない関数たちの周囲には, その正体を理解しようとする者を拒む高い壁のように, 加法定理をはじめとする数多くの公式が煩雑にひしめいている. 数学嫌いを公言する人々の中には, この三角関数や指数・対数関数の登場がきっかけであったという人も, 少なからず存在するようである. 残念ながら, こうした人々が辿り着けなかったほんの僅か先には, しかし, 数学の世界では最も美しく, 自然科学や工学の世界でも欠かすことのできない重要な役割を果たす, 三角関数によって展開される素晴らしい世界が広がっている.

本講義の目的は, このような π や三角関数の重要性と魅力を, 次のようなアプローチで再認識することである.

- 三角関数や指数関数を冪級数の立場から考察する.
- 加法定理や指数法則といった抽象的な関数の性質から, これらの関数が持つべき具体的な性質を導く.
- 三角関数や指数関数に対する複数の同値な定義の存在から, 幅広い視点でこれらの関数を再認識する.
- π が現れる円とは無関係な様々な公式の紹介と, π の値の具体的な計算方法を紹介する.

本講義では, 限られた時間内にできるだけ多くの事実を紹介することを重視し, 大学の微分積分学の授業では膨大な時間を費やす, 収束・発散に関するデリケートな議論は割愛ることを予め断っておく.

1.2　各種定義・公式

本講義に関連する基本的な定義や公式を以下に紹介しておく.

- 階乗: 非負の整数 n に対して
$$n! = \begin{cases} 1 & (n=0), \\ n(n-1)! & (n \geq 1). \end{cases}$$
- 二項定理:
$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k}.$$

- 虚数単位: $i \Leftrightarrow \sqrt{-1} \Leftrightarrow 2$ 次方程式「$z^2 = -1$」の解の片方.
- 偶関数・奇関数: 任意の実数 x に対して
$$f(x) = f(-x) \;\Leftrightarrow\; f \text{ は偶関数}, \quad f(x) = -f(-x) \;\Leftrightarrow\; f \text{ は奇関数}.$$
- 三角関数の相互関係:
$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$
- 加法定理:
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y, \quad \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y,$$
$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}.$$
- 半角の公式:
$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos x}{2}, \quad \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos x}{2}.$$
- 微分の定義と記号:
$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$
- 逆関数の微分:
$$y = f(x) \;\Leftrightarrow\; x = f^{-1}(y), \quad \frac{d}{dy} f^{-1}(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}.$$
- 微分公式:
$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x, \quad \frac{d}{dx}\sin x = \cos x, \quad \frac{d}{dx}\tan x = \frac{1}{\cos^2 x},$$
$$\frac{d}{dx} x^p = p x^{p-1}, \quad \frac{d}{dx} a^x = a^x \log a \quad (a > 0).$$
- ネイピア数 e:
$$\mathrm{e} = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.71828182\cdots,$$
- 対数関数の性質: 任意の正の実数 a, α, β と任意の実数 γ に対して
$$y = a^x \;\Leftrightarrow\; x = \log_a y,$$
$$\log_a(\alpha\beta) = \log_a \alpha + \log_a \beta, \quad \log_a\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \log_a \alpha - \log_a \beta, \quad \log_a \alpha^\gamma = \gamma \log_a \alpha.$$
- 平面上の曲線の長さ: 区間 (a, b) 上で $y = f(x)$ と表される平面上の曲線の長さ:
$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

第2章　指数関数

2.1　指数法則

正の実数 a と自然数 x に対して, a を x 回掛けるという a の自然数冪を次のように定義する:

$$a \times \cdots \times a = a^x. \tag{2.1}$$

このとき a^x は, その意味も計算によって得られる値も明らかである. 上記の意味では, a^x は自然数を定義域とする関数であるが, これを実数や複素数を定義域にもつ関数へと拡張する問題を考える.

x が自然数の場合の a^x の定義を一般の実数 x に対してそのまま適用しても, 例えば「a を 2 分の 1 回掛ける」とか「a をマイナス 1 回掛ける」などは常識的には定義として意味を持たない. しかし, 平面上に点 (x, a^x) $x = 1, 2, \cdots$ をとり, それらの間を自然に補間する曲線を考えると, 実数 x を変数とする関数 a^x を定義できそうな気がする. このような a^x の値を, 改めて一般の実数に x 対する「a を x 回掛ける計算」と定義すれば, 常識的には意味を持たなかった「非自然数回」という操作に意味を持たせることができる. このように, 具体的なモデルを一旦抽象化・一般化し, そこから改めて具体的なモデルを眺めることによって, より深い理解を得ることが, 数学の面白さであり, それを学ぶ意義だと考えられる.

改めて, 一般の実数 x に対する実数冪 a^x の定義を考えてみる. このとき, 上で提案したように, 自然数冪に対応する平面上の点を補完する曲線を考える, という立場からも定義は可能ではあるが, ここでは, 自然数冪の場合に成り立つ以下の「指数法則」を基本とする定義を考える:

$$a^x a^y = a^{x+y} \quad (x, y \text{ は任意の自然数}). \tag{2.2}$$

上記の指数法則は, 単に成り立つ性質というより, 自然数冪の定義そのものとみなしてもさしつかえない, 本質的な性質であることに注意しておく.

ここで, a^x を次のように表す:

$$a^x = e(x) = e(x; a). \tag{2.3}$$

このとき, 指数法則 (2.2) は次のように表される:

$$e(x)e(y) = e(x + y). \tag{2.4}$$

これより, 実数 x に対して指数関数 $e(x)$ を, 指数法則 (2.4) を満たす関数として定義してゆく.

指数法則 (2.4) が任意の実数に対して成り立つことを仮定すると, 直ちに次の事実が得られる:

命題 2.1.1. $e(0; a) = 1$ **である.**

Proof. $e(1) = e(1; a) = a > 0$ であることに注意しておく. $e(0) = 0$ と仮定すると, $x = 0$, $y = 1$ の場合,

$$e(0)e(1) = 0 \times a = 0 \ \text{ かつ } \ e(0 + 1) = e(1) = a \neq 0$$

となり (2.4) に矛盾するため, $e(0) \neq 0$ としてよい. $x = y = 0$ とすると, (2.4) より $e(0)e(0) = e(0)$ であり, 両辺を $e(0) \neq 0$ で割ると $e(0) = 1$ が得られる. □

以降, 一般の実数 x, y に対して指数法則 (2.4) を満たす関数を指数関数とよび, この指数関数の定義について次の立場から考察する:

- 高等学校で紹介する定義.
- 冪級数による定義.
- 微分方程式の解としての定義.

2.2　高等学校で紹介する定義

高等学校で紹介される指数関数の定義は, 変数が有理数の場合は「代数方程式の正値実数解」, 無理数の場合には, その極限という立場である．この定義は直感的にも理解しやすく, 収束・発散に関するデリケートな話題をあえて持ち出さずに済ますことができる優れたものである.

定義 2.2.1. $a > 0$ とする．自然数 x に対して, 指数法則を満たす関数 $e(x) = e(x; a)$ を, 実数 x に対して次のように定義する:

(i) x が自然数 n に対して $x = \frac{1}{n}$ と表される場合:

$$e\left(\frac{1}{n}; a\right) := n \text{ 次代数方程式「} t^n = a \text{」の実数解で正のもの.}$$

(ii) x が正の有理数; 自然数 m, n に対して $x = \frac{m}{n}$ と表される場合:

$$e\left(\frac{m}{n}; a\right) := e\left(m; e\left(\frac{1}{n}; a\right)\right) = e\left(\frac{1}{n}; a\right) \times \cdots \times e\left(\frac{1}{n}; a\right) \ (m \text{ 個の積}) .$$

($e(\frac{1}{n}; a)$ は (i) で正の実数として定義されている．)

(iii) x が負の有理数の場合:

$$e\left(x; a\right) = \frac{1}{e(-x; a)}.$$

($-x$ は正の有理数なので, $e(-x; a)$ は (ii) で正の実数として定義されている.)

(iv) x が一般の実数の場合: x に収束する有理数列 $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ に対して,

$$e(x; a) = \lim_{j\to\infty} e(x_j; a).$$

(x_j は有理数なので, $e(x_j; a)$ は (iii) で正の実数として定義されている.)

ここで, (i) は, 自然数 p, q に対して指数法則 (2.2) から直ちに導かれる性質:

$$(a^p)^q = a^{pq} \ \Leftrightarrow \ e(q; e(p; a)) = e(pq; a), \tag{2.5}$$

(iii) は, 同じく指数法則から導かれる命題 2.1.1 より従う次の関係

$$e(x; a)e(-x; a) = e(x + (-x)) = e(0; a) = 1 \tag{2.6}$$

が, それぞれの定義の根拠になっている．実際, 定義 2.2.1 で定まる指数関数 $e(x; a)$ が指数法則を満たすことは, 次の命題によって保証される:

命題 2.2.1. 定義 2.2.1 によって定まる指数関数は, a に応じて一意的に定まり, 任意の実数 x, y に対して指数法則 (2.4) を満たす.

Proof. x, y が正の有理数の場合のみを示す. 自然数 p, q, r によって, $x = \frac{p}{r}$, $y = \frac{q}{r}$ と表す. このとき,

$$\begin{aligned} e\left(x+y;a\right) =& e\left(\frac{p+q}{r};a\right) = e\left(p+q; e\left(\frac{1}{r};a\right)\right) \\ =& e\left(p; e\left(\frac{1}{r};a\right)\right) e\left(q; e\left(\frac{1}{r};a\right)\right) = e\left(\frac{p}{r};a\right) e\left(\frac{q}{r};a\right) = e\left(x;a\right) e\left(y;a\right). \end{aligned}$$

□

定義 2.2.1 による指数関数は, x が有理数の場合には代数方程式の解として定義できるため, 基本的には多項式関数の範疇で理解することができる. しかし, この定義から実際に指数関数の値を計算しようとすると, 高次の代数方程式を解かなければならないので, あまり実用的とは言えない.

2.3　冪級数による三角関数の定義

高等学校で学ぶ関数は, 多項式関数にはじまり, 指数関数, 対数関数, 三角関数と続く. しかし, 中学で学ぶ 2 次関数の延長として, さほど抵抗なく受け入れることが可能な多項式関数に対して, それ以外の関数は少し敷居が高い. そう感じられる一つの要因は, 多項式関数に比べて抽象的な定義にあると思われる.

ところで, 関数の世界では, 計算の容易さから多項式に次いで素性の良い関数として「冪級数」がある. 冪級数とは, 多項式関数の拡張として, 実数列（または複素数列）$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して次のような無限次の多項式として表される関数である:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{2.7}$$

ここで, $f(0) = a_0$ とみなし, 本講義では以後もそれに従うこととする.

指数関数も対数関数も, 有限次の多項式で表現することはできないが, 無限次の多項式と考えられる冪級数では表現が可能かもしれない. ここでは, 冪級数による指数関数の定義について考察する.

注意 2.3.1. 多項式関数の自然な拡張として具体的に表現された冪級数は, 指数関数や三角関数などより遥かにとっつきやすいように思われるが, 高等学校の数学では通常触れられない. 実際, それなりに厳密に冪級数の概念を導入しようとすると, 有限和から無限和への移行の際に現れる, 関数の収束性の極めてデリケートな問題を避けて通ることができない. その議論は, かの悪名高い「ε-δ 論法」抜きには難しく, そうなると, 高校数学の範囲から除外されていることに誰もが納得してしまう. しかし, 収束発散の問題に目をつぶれば, 冪級数の導入によって, 抽象的な関数の性質を具体的な冪級数の係数 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ の値として観測することができる, という大きなメリットがある. 無論, そうすることによるデメリットは数多く, 解析学の困難な問題のほとんど全てが, その境界線上にあると言ってもさしつかえない. しかし, 本講義で扱う内容に関しては, メリットがデメリットを上回ると考え, ほとんどの場合, 冪級数は収束するという立場で議論を展開してゆくことにする.

定義 2.3.1. ρ は 0 でない実数とする. 実数 x に対して, 冪級数による指数関数 $\tilde{e}(x) = \tilde{e}(x;\rho)$ を次のように定義する:

$$\tilde{e}(x;\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\rho x)^n}{n!}. \tag{2.8}$$

ここで, (2.8) で定義される $\tilde{e}(x)$ が, 指数法則を満たすという意味で指数関数となり得ることは, 次の命題で保証される:

命題 2.3.1. (2.8) で定義される冪級数 $\tilde{e}(x)$ は次の指数法則を満たす:

$$\tilde{e}(x)\tilde{e}(y) = \tilde{e}(x+y) \quad (x, y \text{ は任意の実数}). \tag{2.9}$$

逆に, 指数法則 (2.9) を満たす冪級数 $\tilde{e}(x)$ は, 0 でない実数 ρ を用いて (2.8) と表される.

Proof. 簡単のために $\rho = 1$ の場合のみを考えるが, この制限は本質的なものではない. $\tilde{e}(x;\rho)$ が冪級数 (2.8) で与えられているとすると, 二項定理から, 任意の実数 x, y に対して次が得られる:

$$\begin{aligned}
\tilde{e}(x+y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k)!} x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{j!} x^k y^j = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!} \right) = \tilde{e}(x)\tilde{e}(y).
\end{aligned}$$

一方, 次で与えられる冪級数 $\tilde{e}(x)$:

$$\tilde{e}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{2.10}$$

は, 任意の 0 でない実数 ρ に対して次を満たす:

$$\begin{aligned}
\tilde{e}(x+y) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+y)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_n n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{j+k}(j+k)!}{k!j!} x^k y^j = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{j+k}(j+k)!}{\rho^{j+k} k! j!} (\rho x)^k (\rho y)^j,
\end{aligned}$$

$$\tilde{e}(x)\tilde{e}(y) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j y^j \right) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k a_j x^k y^j = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k a_j}{\rho^{j+k}} (\rho x)^k (\rho y)^j.$$

ここで, $\tilde{e}(x)$ が指数法則 (2.9) を満たすと仮定すると, 任意の非負の自然数 n に対して $a_n = \frac{1}{n!}$ でなければならない. □

関数 $\tilde{e}(x)$ が冪級数で表されるとき, その表現は一意的に定まる. よって, 定義 2.2.1 で構成した指数関数が冪級数で表されるならば, ある 0 でない実数 ρ に対して次で与えられなければならない:

$$e(x;a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\rho x)^n}{n!}.$$

ここで, $e(1;a) = a$ より, ρ と a は次のように関係付けられる:

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!}. \tag{2.11}$$

すなわち, $e(x;a)$ と $\tilde{e}(x;\rho)$ は次の関係を満たす:

$$e\left(x; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!} \right) = \tilde{e}(x;\rho). \tag{2.12}$$

この事実は, (2.11) を考慮すると, 定義 2.2.1 と定義 2.3.1 は, 同一の指数関数を定義していることを意味している.

ここで, (2.11) で定義される $\rho = 1$ の場合の a の値を, 次のように e で表す:

$$\mathrm{e} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}. \tag{2.13}$$

ここで, 定数 e の近似値は, (2.13) で与えられる級数の部分和を計算によって得ることができ, その値はネイピア数とよばれ, 次のような無理数であることが知られている:

$$\mathrm{e} = 2.71828182\cdots.$$

演習 2.3.1. $e_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}$ とする. $e_1, \cdots, e_{10}$ の値を計算し, 数列 $\{e_N\}_{N=1}^{\infty}$ が e に収束することを検証せよ.

注意 2.3.2. 高等学校の教科書では, ネイピア数 e は次の極限値として定義される:

$$\mathrm{e} := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \tag{2.14}$$

ここで, (2.13) と (2.14) が同じ定数を定義することは, 後程検証する.

注意 2.3.3. 定義 2.3.1 による指数関数の定義は, 与えられた x に対する $\tilde{e}(x;\rho)$ の近似値を効率的に計算するのに適している. 実際, 例えば $\sqrt{\mathrm{e}} = 1.648721271\cdots$ であるが,

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \tilde{e}\left(\frac{1}{2};\mathrm{e}\right) = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3!} + \cdots$$

より, 右辺の第 n 項までの部分和を c_n とすると,

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_2 &= 1.5 \\ c_3 &= 1.625 \\ c_4 &= 1.64583\cdots \\ c_5 &= 1.64843\cdots \end{aligned}$$

となり, 第 5 項までの部分和で, 小数第 3 位まで一致する近似値が計算できる.

2.4　微分方程式の解としての指数関数の定義

ネズミ算式に増える人口や放射性物質の出す放射線量をのように, 指数的に増大, または減少すると言われるモデルがある. 時間を x, 人口や放射線量の値を $\hat{e}(x)$ とすると, その値は 0 でない定数 ρ に対して次のような微分方程式で記述されると言われている:

$$\frac{d}{dx}\hat{e}(x) = \rho\hat{e}(x). \tag{2.15}$$

ここで $\hat{e}(0) > 0$ とすると, $\rho > 0$ の場合には $\hat{e}(x)$ は時間とともに増大し, $\rho < 0$ の場合には減少する. このような現象を表す関数を, 逆に指数関数の定義と考えることも可能である. 実際, 指数関数 a^x に関する次の微分公式:

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \log_{\mathrm{e}} a$$

は, $\log_{\mathrm{e}} a = \rho$, $a^x = \hat{e}(x)$ と考えると, a^x が微分方程式 (2.15) の解であることを示している.

定義 2.4.1. 0 でない実数 ρ に対して, 次の微分方程式の初期値問題の解を $\hat{e}(x) = \hat{e}(x;\rho)$ と定義する:

$$\frac{d}{dx}\hat{e}(x) = \rho\hat{e}(x), \quad \hat{e}(0) = 1. \tag{2.16}$$

このとき, 定義 2.4.1 で定まる関数 $\hat{e}(x;\rho)$ が指数関数であることは, 次の命題で保証される:

命題 2.4.1. 微分方程式の初期値問題 (2.16) の冪級数解 $\hat{e}(x)$ は, 次の指数法則を満たす:

$$\hat{e}(x)\hat{e}(y) = \hat{e}(x+y) \quad (x, y \text{ は任意の実数}). \tag{2.17}$$

逆に, 指数法則 (2.17) を満たす冪級数は, 微分方程式の初期値問題 (2.16) の解となる.

Proof. 微分方程式の初期値問題 (2.16) を満たす冪級数 $\hat{e}(x;\rho)$ が

$$\hat{e}(x;\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\rho x)^n}{n!} \tag{2.18}$$

で与えられることが示されれば, (2.8) で定義される冪級数 $\tilde{e}(x;\rho)$ と $\hat{e}(x;\rho)$ が一致するため, 命題 2.3.1 より, $\hat{e}(x;\rho)$ が指数法則 (2.17) を満たすこと, 逆に指数法則 (2.17) を満たす冪級数 $\hat{e}(x;\rho)$ が (2.18) で与えられることがわかる. 実際, $\hat{e}(x)$ が次の冪級数で与えられているとする:

$$\hat{e}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

このとき, $\hat{e}(x)$ は初期条件 $\hat{e}(0) = 1$ を満たすため, $\hat{e}(0) = a_0 = 1$ でなければならない. また, $\hat{e}(x;\rho)$ は微分方程式 $\frac{d}{dx}\hat{e}(x;\rho) = \hat{e}(x;\rho)$ の解であるため,

$$\frac{d}{dx}\hat{e}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad \rho\hat{e}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \rho a_{n-1} x^{n-1}$$

より, 任意の自然数 n に対して次が成り立たなければならない:

$$n a_n = \rho a_{n-1} \ \Leftrightarrow\ a_n = \frac{\rho}{n} a_{n-1} = \frac{\rho^2}{n(n-1)} a_{n-2} \cdots = \frac{\rho^n}{n!} a_0 = \frac{\rho^n}{n!}.$$

以上より, $\hat{e}(t;\rho)$ が (2.18) で与えられることが示された. □

2.5 指数関数の定義に関するまとめ

これまでの議論をまとめると, 以下の定理が得られる:

定理 2.5.1. 正の実数 a と 0 でない実数 ρ は, 次の関係を満たしているとする:

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{n!}.$$

このとき, 定義 2.2.1, 定義 2.3.1, 定義 2.4.1 で定められる関数 $e(x;a)$, $\tilde{e}(x;\rho)$, $\hat{e}(x;\rho)$ は全て等しく, これを $E(x) = E(x;\rho)$ と表すと, $E(x)$ は次の指数法則を満たす指数関数である:

$$E(x)E(y) = E(x+y) \quad (x, y \text{ は任意の実数}). \tag{2.19}$$

2.6　複素数冪

これまでの議論で, 指数法則を満たすことを基本に, 自然数冪を実数冪に拡張した. これと同様にして, 複素数冪を定義することも可能である.

定義 2.6.1. ρ を 0 でない複素数とし, 複素変数 z の指数関数 $E(z) = E(z;\rho)$ を次のように冪級数で定義する:

$$E(z;\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\rho z)^n}{n!}. \tag{2.20}$$

ことき, 命題 2.3.1 の証明と全く同様に, $E(x)$ が次の指数法則を満たすことが証明される:

$$E(z)E(w) = E(z+w) \quad (z, w \text{ は任意の複素数}). \tag{2.21}$$

冪乗の意味が本来持つ「同じ数を x 回掛ける」という視点からは, ある数の複素数冪の値を具体的にイメージすることは困難であるが, 複素変数の指数関数 (2.20) はそれを実現することができる.

例 2.6.1 (2^{1+i} の値)**.** $2^{x+iy} = 2^x(\mathrm{e}^{\log_\mathrm{e} 2})^{iy} = 2^x \mathrm{e}^{iy\log_\mathrm{e} 2}$, $\log_\mathrm{e} 2 = 0.6931\cdots$ より,

$$\begin{aligned} 2^{1+i} =& 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\log_\mathrm{e} 2)^n}{n!} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n(\log_\mathrm{e} 2)^n}{n!} \\ =& 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(\log_\mathrm{e} 2)^{2k}}{(2k)!} + 2i\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}(\log_\mathrm{e} 2)^{2k-1}}{(2k-1)!} \\ =& 1.5384\cdots + i\,1.2779\cdots. \end{aligned}$$

次章で紹介する「オイラーの公式」

$$\mathrm{e}^{ix} = \cos x + i\sin x \tag{2.22}$$

を認めると, 更に様々な数の冪を計算することが可能となる.

例 2.6.2 (i^i の値)**.** 任意の整数 n に対して

$$i = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = \mathrm{e}^{\frac{(4n+1)i\pi}{2}}$$

より次が得られる:

$$i^i = \left(\mathrm{e}^{\frac{(4n+1)i\pi}{2}}\right)^i = \mathrm{e}^{-\frac{(4n+1)\pi}{2}} \quad (n \text{ は任意の整数}).$$

例 2.6.3 ($\mathrm{e}^{i\pi}$)**.** オイラーの公式 (2.22) において $x = \pi$ とすると, オイラーの等式とよばれる次が得られる:

$$\mathrm{e}^{i\pi} = -1. \tag{2.23}$$

このように, 複素数冪の値が定義でき, それを実際に計算できることは, 数学が好きな人にとってはワクワクするような事実だが, そうでない人々にとっては, 単なる数のお遊びにしか映らず, 数学以外の立場からその意義を説明するのは難しいかもしれない. しかし, 「虚数」を含む複素変数の指数関数は, 我々の身の回りに「現実」を記述する自然科学の分野でも, 「日常」に溢れる物づくりの基礎となる工学の世界でも, 欠かすことのできない極めて重要なツールでもある.

2.7　ネイピア数（補足）

ネイピア数の定義に関して次の命題が成り立つ:

命題 2.7.1. ネイピア数に対する二つの定義 (2.13), (2.14) は同値である．すなわち, 次が成り立つ:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}. \tag{2.24}$$

Proof. 全ての実数 x に対して, 定理 2.5.1 で定義された指数関数

$$y=E(x)=\hat{e}(x;1)=\tilde{e}(x;1)=e(x;\mathrm{e})$$

は次を満たす:

$$E(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!},\quad \frac{d}{dt}E(x)=E(x).$$

$E(x)$ は狭義単調増加でその値域は $(0,\infty)$ であるので, 任意の $y>0$ に対して逆関数 $x=E^{-1}(y)$ が定義できる．ここで, $E(x)=\mathrm{e}^x$, $E^{-1}(y)=\log_{\mathrm{e}} y$ であることに注意すると, 任意の正の実数 α,β と任意の実数 γ に対して次が成り立つ:

$$E^{-1}(\alpha\beta)=E^{-1}(\alpha)+E^{-1}(\beta),\quad E^{-1}\left(\alpha^{\gamma}\right)=\gamma E^{-1}(\alpha).$$

以上より, (2.24) は次のように示される:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n =&E\left(E^{-1}\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\right)=E\left(\lim_{n\to\infty}E^{-1}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\right)\\
=&E\left(\lim_{n\to\infty}nE^{-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=E\left(\lim_{h\to 0}\frac{E^{-1}(1+h)}{h}\right)\\
=&E\left(\lim_{h\to 0}\frac{E^{-1}(1+h)-E^{-1}(1)}{h}\right)=E\left(\left(\frac{d}{dy}E^{-1}\right)(1)\right)\\
=&E\left(\frac{1}{\left(\frac{d}{dx}E\right)\left(E^{-1}(1)\right)}\right)=E\left(\frac{1}{E\left(E^{-1}(1)\right)}\right)=E(1)\\
=&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}.
\end{aligned}$$

□

ネイピア数 e は, 解析学の世界では円周率 π に劣らず重要な定数であり, 無理数, かつ超越数（有理数係数の代数方程式の解としては表すことができない数）であることが知られている．また, オイラーの等式 (2.22) で与えられるように, 虚数単位 i を介して π と不思議な関係で結ばれている．

第3章　三角関数

3.1　高等学校での三角関数の定義

高等学校の数学の教科書では, 鋭角 θ を持つ直角三角形の辺の長さの比として, $0 < \theta < \pi$ における三角関数 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ が定義された．それでは定義できない $0 < \theta < \pi$ 以外の実数 θ に対しては, 原点を中心とする半径 1 の円周上で偏角が θ である点の x, y 座標として, それぞれ $\cos\theta$, $\sin\theta$ を定義した．また, $\tan\theta$ は既に定義された $\cos\theta$, $\sin\theta$ を用いて次のように定められた:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}.$$

三角関数と呼ばれる関数は, 他にも, 上記の 3 つの関数の逆数である $\sec\theta$, $\csc\theta$, $\cot\theta$ があるが, $\cos\theta$, $\sin\theta$ を用いてその他の三角関数が定義されているため, 特に断らない限り, 基本となる $\cos\theta$, $\sin\theta$ のみを, ここでは三角関数と呼ぶことにする.

高等学校で学ぶ上記の幾何学的な三角関数の定義は非常に明快である．しかし, 任意に与えられた偏角 θ から実際に三角関数の値を計算しようとすると, $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ などの特別な場合を除き, 果たしてどのように計算すればよいのかと途方に暮れてしまう．しかし, 指数関数と同様に三角関数も, 上記のような具体的にイメージできる幾何学的解釈の呪縛から逃れると, 計算に適した同値な定義を与えることが可能となる．前章で, 指数関数の持つべき最も基本的な性質である「指数法則」を満たす関数という立場で幾つかの同値な定義を与えたように, 本章では, 三角関数の持つべき最も基本的な性質である「加法定理」を満たす関数という立場から同様の考察を行ってゆく.

3.2　逆三角関数を用いた三角関数の定義

上で紹介したように, 高等学校の数学で, 単位円周上の座標として定義された三角関数は, 特別な場合を除き, 与えられた角度を円周上の座標に対応させる計算方法が明示されない．例えば, $2^{\frac{1}{3}}$ の値は, それを直接計算するための式はわからなくとも, 代数方程式 $t^3 = 2$ の解として定義されているため, 式に適当な値を代入することによって近似値を調べることが可能である．しかし, 三角関数の値は, そのような場当たり的な方法ですら調べることができない．これが, 図形的には明確でも, 数値的にはその定義からはブラックボックスに近い三角関数の扱いの難しい点である．そこで, 単位円周上の座標という幾何学的な定義から, 三角関数の値が具体的にどのように与えらるのか, より厳密に考察してみる.

原点を中心とする半径 1 の円周を S_1 と表す．単位円の弧の長さを角度と同一視する弧度法により, 無次元量である角度を, 1 次元の量を持つ長で表現することができる．これにより, 三角関数 $\cos\theta$ は, 与えられた弧の長さに対して定まる S_1 上の点の x 座標を対応させる関数とみなすことができる．このとき, $\cos\theta$ は $0 \leq \theta \leq \pi$ において狭義単調減少であることに注意する．よって, 与えられた S_1 上の点の x 座標を弧の長さ θ に対応させる $x = \cos\theta$ の逆関数 $\theta = \cos^{-1} x$ が存在する.

ここで, 区間 (a, b) 上で $y = f(x)$ と表される平面上の曲線の長さは, 次の積分で与えられることが知られている:

$$\int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx} f(x)\right)^2}\, dx.$$

$y \geq 0$ とすると, 円周 S_1 は $y = \sqrt{1-x^2}$ で表されるため, 区間 $(x, 0)$ 上での S_1 上の弧の長さ θ は次で与えられる:

$$\theta = \int_x^1 \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dt}\sqrt{1-t^2}\right)^2}\, dt = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

よって, 単位円周上の点の x 座標を, $x = 1$ を始点とする弧の長さ θ に対応させる関数 $\cos^{-1} x$ は, 次で与えられる:

$$\cos^{-1} x = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}. \tag{3.1}$$

そこから, $\theta = \cos^{-1} x$ の逆関数として, 区間 $(0, \pi)$ 上で三角関数 $x = \cos\theta$ を定義することができる．ここで, $x = \cos\theta$ を周期 2π の連続な偶関数とすると, 全ての実数 θ に対して $\cos\theta$ の値を拡張して定義することができる．また, S_1 上の弧の長さを S_1 上の点の y 座標に対応させる関数を考えると, 同様に実数全体で $y = \sin\theta$ を定義することができる．あるいは, $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ で与えられる周期 2π の奇関数と定義してもよい.

難解で冗長のようにも思えるこのような手続きも, 厳密に偏角から単位円周上の座標として三角関数の値を定義するにはに必要不可欠である．実際, 少なくとも, (3.1) で与えられる定義から, 任意の $x \in (-1, 1)$ に対する $\theta = \cos^{-1} x$ の値を（数値計算によって）計算することが可能であることがわかる.

3.3　加法定理と指数法則

三角関数の加法定理は, 三角関数の幾何学的定義から, 作図による純粋に幾何学的な方法で証明することができる．一方, 三角関数 $\cos x$, $\sin x$ をそれぞれ $c(x), s(x)$ と記述すると, 加法定理に対応する等式は次のように表される:

$$\begin{cases} c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y), \quad c(x-y) = c(x)c(y) + s(x)s(y), \\ s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y), \quad s(x-y) = s(x)c(y) - c(x)s(y). \end{cases} \tag{3.2}$$

これを, 一般の関数の組 $c(x), s(x)$ が, 任意の実数（または複素数）x, y に対して満たす一般的な関係とみなすと, 幾何学的概念にとらわれることなく, 単なる関数としての三角関数の性質を議論することが可能となる．以後, 関数の組 $c(x), s(x)$ に対する関係 (3.2) を, 単に「加法定理」と呼ぶことにする.

ここで, 加法定理 (3.2) を単なる関数の性質として眺めてみると, その中に指数法則 $E(x+y) = E(x)E(y)$ との類似性を見出すことができるかもしれない．実際, 加法定理と指数法則の間には極めて密接な関係がある.

定義 3.3.1. ρ を 0 でない複素数とする．定義 2.6.1 で定められた複素変数の指数関数 $E(z) = E(z; \rho)$ に対して, 関数 $C(x), S(x)$ を次のように定義する:

$$C(x) = \frac{E(ix) + E(-ix)}{2}, \quad S(x) = \frac{E(ix) - E(-ix)}{2i}. \tag{3.3}$$

命題 3.3.1. 定義 3.3.1 で, 指数関数 $E(z)$ から定義された関数 $C(x), S(x)$ は, 次の加法定理を満たす:

$$C(x+y) = C(x)C(y) \mp S(x)S(y), \quad S(x+y) = S(x)C(y) \pm C(x)S(y).$$

Proof. $C(x+y) = C(x)C(y) - S(x)S(y)$ のみを証明する. E が指数法則を満たすことより,

$$\begin{aligned}
C(x)C(y) - S(x)S(y) =& \frac{E(ix)+E(-ix)}{2}\frac{E(iy)+E(-iy)}{2} - \frac{E(ix)-E(-ix)}{2i}\frac{E(iy)-E(-iy)}{2i} \\
=& \frac{(E(ix)+E(-ix))(E(iy)+E(-iy)) + (E(ix)-E(-ix))(E(iy)-E(-iy))}{4} \\
=& \frac{E(ix)E(iy)+E(-ix)E(-iy)}{2} = \frac{E(i(x+y))+E(-i(x+y))}{2} \\
=& C(x+y).
\end{aligned}$$

□

演習 3.3.1. $S(x+y) = S(x)C(y) + C(x)S(y)$ が成り立つことを証明せよ.

演習 3.3.2. 任意の実数 x に対して $C(x)^2 + S(x)^2 = 1$ が成り立つことを証明せよ.

注意 3.3.1. 任意の複素数 x に対して, 行列値関数 $A(x)$ を次で定める:

$$A(x) = \begin{pmatrix} C(x) & -S(x) \\ S(x) & C(x) \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

このとき, 命題 3.3.1 より, 任意の複素数 x, y に対して次が成り立つ:

$$\begin{aligned}
A(x+y) &= \begin{pmatrix} C(x+y) & -S(x+y) \\ S(x+y) & C(x+y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C(x)C(y)-S(x)S(y) & -S(x)C(y)-C(x)S(y) \\ S(x)C(y)+C(x)S(y) & C(x)C(y)-S(x)S(y) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} C(x) & -S(x) \\ S(x) & C(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C(y) & -S(y) \\ S(y) & C(y) \end{pmatrix} = A(x)A(y).
\end{aligned}$$

このように, 加法定理を満たす関数 $C(x), S(x)$ によって構成された行列値関数 $A(x)$ は指数法則を満たすことがわかる. 一方, $A(x)$ が行列値関数として指数法則 $A(x+y) = A(x)A(y)$ を満たすならば, 各要素の関数が加法定理を満たす. このような意味で, 指数法則と加法定理は同一視することができる.

3.4 加法定理を満たす冪級数

定義 3.4.1. ρ は 0 でない実数とする. 複素数 x に対して, 冪級数 $\tilde{c}(x;\rho)$, $\tilde{s}(x;\rho)$ を次のように定義する:

$$\tilde{c}(x;\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(\rho x)^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{(\rho x)^2}{2!} + \frac{(\rho x)^4}{4!} - \frac{(\rho x)^6}{6!} + \cdots, \tag{3.5}$$

$$\tilde{s}(x;\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}(\rho x)^{2k-1}}{(2k-1)!} = \rho x - \frac{(\rho x)^3}{3!} + \frac{(\rho x)^5}{5!} - \frac{(\rho x)^7}{7!} + \cdots. \tag{3.6}$$

　このとき, 指数関数の冪級数表現に関する定理 2.5.1, 指数法則と加法定理の関係を与える命題 3.3.1 より, 次の命題が得られる:

命題 3.4.1. 任意の 0 でない実数 ρ に対して, 定義 3.4.1 で与えられる冪級数 $\tilde{c}(x) = \tilde{c}(x;\rho)$, $\tilde{s}(x) = \tilde{s}(x;\rho)$ は次の加法定理を満たす:

$$\tilde{c}(x+y) = \tilde{c}(x)\tilde{c}(y) \mp \tilde{s}(x)\tilde{s}(y), \quad \tilde{s}(x+y) = \tilde{s}(x)\tilde{c}(y) \pm \tilde{c}(x)\tilde{s}(y). \tag{3.7}$$

Proof. 定義 2.6.1 で与えられた指数関数 $E(z)=E(z;\rho)$:

$$E(z;\rho)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\rho z)^n}{n!} \tag{3.8}$$

に対して, 等式:

$$\tilde{c}(x;\rho)=\frac{E(ix;\rho)+E(-ix;\rho)}{2},\quad \tilde{s}(x;\rho)=\frac{E(ix;\rho)-E(-ix;\rho)}{2i} \tag{3.9}$$

が示されれば, 命題 3.3.1 より加法定理 (3.7) が成り立つことがわかる. ここでは, $\tilde{c}(x;1)$ についてのみ (3.9) を証明する. (3.8) より

$$\begin{aligned}
\frac{E(ix;1)+E(-ix;1)}{2} =&\frac{1}{2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(ix)^n}{n!}+1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-ix)^n}{n!}\right)\\
=&1+\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n x^n}{n!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-i)^n x^n}{n!}\right)\\
=&1+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i^{2k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{i^{2k}x^{2k}}{(2k)!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-i)^{2k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-i)^{2k}x^{2k}}{(2k)!}\right)\\
=&1+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(i^{2k-1}+(-i)^{2k-1}\right)x^{2k-1}}{(2k-1)!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(i^{2k}+(-i)^{2k}\right)x^{2k}}{(2k)!}\right)\\
=&1+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(1+(-1)^{2k-1}\right)i^{2k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(1+(-1)^{2k}\right)i^{2k}x^{2k}}{(2k)!}\right)\\
=&1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}\\
=&\tilde{c}(x;1).
\end{aligned}$$

□

演習 3.4.1. $\tilde{s}(x;1)=\frac{E(ix;1)-E(-ix;1)}{2i}$ を証明せよ.

注意 3.4.1. ここでは, 天下り式に (3.7) で冪級数 $\tilde{c}(x),\tilde{s}(x)$ を与え, それらが加法定理を満たすことを示した. しかし, 前章で指数法則を満たす冪級数を定めたように, $\tilde{c}(x),\tilde{s}(x)$ を一般の冪級数として

$$\tilde{c}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n,\quad \tilde{s}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$$

で与え, これらが加法定理を満たすことから $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ を定めることも可能である. こうして定義される冪級数も, それぞれ (3.5), (3.6) と一致する.

3.5　解が加法定理を満たす微分方程式

前章で議論した指数関数の場合と同様, 三角関数をある種の微分方程式の解として定義することもできる.

単位円との関係から幾何学的に定義された三角関数 $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$ が, それぞれ θ-x, θ-y 平面上の描く曲線は, バネや振り子の微小振動といった単振動が, (時間)-(変位) 平面上に描く曲線を, 縦横方向に引き伸ばし平行移動させたものと重なる. すなわち, これらの現象を記述する運動方程式:

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x)=-af(x)\quad (a\ \text{は正定数}) \tag{3.10}$$

から三角関数を定義する発想はごく自然であるともいえる. ところで, 指数関数を定義する微分方程式は 1 階だったので, 解を一つに定めるためには初期条件が一つ必要だった. 一方, (3.10) は 2 階の微分方程式であるため, 解を一つに定めるためには 2 つの初期条件が必要となることに注意する.

定義 3.5.1. 0 でない実数 ρ に対して, 次の微分方程式の初期値問題の解を, それぞれ $\hat{c}(x;\rho)$, $\hat{s}(x;\rho)$ と定義する:

$$\frac{d^2}{dx^2}\hat{c}(x) = -\rho^2\hat{c}(x), \quad \hat{c}(0) = 1, \quad \hat{c}'(0) = 0, \tag{3.11}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\hat{s}(x) = -\rho^2\hat{s}(x), \quad \hat{s}(0) = 0, \quad \hat{s}'(0) = \rho. \tag{3.12}$$

このとき, $\hat{c}(x;\rho)$, $\hat{s}(x;\rho)$ の冪級数に関する次の命題が成り立つ:

命題 3.5.1. 微分方程式の初期値問題 (3.11), (3.12) の解は, それぞれ (3.5), (3.6) で定めた加法定理を満たす冪級数を用いて次で与えられる:

$$\hat{c}(x;\rho) = \tilde{c}(x;\rho) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\rho x)^{2k}}{(2k)!}, \tag{3.13}$$

$$\hat{s}(x;\rho) = \tilde{s}(s;\rho) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}(\rho x)^{2k-1}}{(2k-1)!}. \tag{3.14}$$

Proof. (3.13) のみを証明する. $\hat{c}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ とすると, 初期条件より $\hat{c}(0) = a_0 = 1$, $c'(0) = a_1 = 0$ となる. また,

$$\frac{d}{dx}\hat{c}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n,$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\hat{c}(x) = 2!a_2 + \sum_{n=2}^{\infty}(n+1)na_{n+1}x^{n-1} = 2!a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n,$$

に注意すると, $\hat{c}(x)$ が微分方程式を満たすことより,

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}\hat{c}(x) = -\rho^2\hat{c}(x) \;&\Leftrightarrow\; (n+2)(n+1)a_{n+2} = -\rho^2 a_n \quad (n = 1, 2, \cdots) \\ &\Leftrightarrow\; a_{2k-1} = 0, \quad a_{2k} = \frac{(-\rho)^2 a_{2(k-1)}}{2k(2k-1)} \quad (k = 1, 2, \cdots).\end{aligned}$$

これより

$$a_{2k} = \frac{-\rho^2 a_{2(k-1)}}{(2k)(2k-1)} = \frac{(-1)^2\rho^4 a_{2(k-2)}}{2k(2k-1)(2k-2)(2k-3)}\cdots = \frac{(-1)^k\rho^{2k}a_0}{(2k)!} = \frac{(-1)^k\rho^{2k}}{(2k)!}.$$

よって (3.13) が得られる. □

演習 3.5.1. (3.14) を証明せよ.

3.6 三角関数の同値な定義

これまでの議論で, 定義 3.3.1 による加法定理を満たす関数 $C(x), S(x)$, 定義 3.4.1 による冪級数で与えられた関数 $\tilde{c}(x), \tilde{s}(x)$, そして定義 3.5.1 による 2 階の微分方程式の初期値問題の解 $\hat{c}(x), \hat{s}(x)$ の同値性:

$$C(x) = \tilde{c}(x) = \hat{c}(x), \quad S(x) = \tilde{s}(x) = \hat{s}(x) \tag{3.15}$$

が示された. これらの関数と, 幾何学的な立場で逆関数によって定義される本来の三角関数 $\cos x, \sin x$ との関係は, 次の定理で保証される:

定理 3.6.1. 任意の実数 x に対して次が成り立つ:

$$\cos x = C(x;1) = \tilde{c}(x;1) = \hat{c}(x;1), \quad \sin x = S(x;1) = \tilde{s}(x;1) = \hat{s}(x;1). \tag{3.16}$$

すなわち, 三角関数 $\cos x, \sin x$ に対する (i)-(iv) の定義は同値である:

(i) 定義域: $[-1,1]$, 値域: $[0,\pi]$ である狭義単調減少な関数 $p(\theta)$:

$$p(\theta) = \int_\theta^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \tag{3.17}$$

に対して

$$\cos x = \begin{cases} p^{-1}(x) & (0 < x < \pi), \\ \text{上の定義を周期 } 2\pi \text{ の連続な偶関数として拡張} & (x \le 0,\ \ \pi \le x), \end{cases} \tag{3.18}$$

$$\sin x = \begin{cases} \sqrt{1-\cos^2 x} & (0 < x < \pi), \\ \text{上の定義を周期 } 2\pi \text{ の連続な奇関数として拡張} & (x \le 0,\ \ \pi \le x). \end{cases} \tag{3.19}$$

(ii)

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}. \tag{3.20}$$

(iii)

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{(2k-1)!}. \tag{3.21}$$

(iv) $\cos x$, $\sin x$ は, それぞれ次の微分方程式の初期値問題の解:

$$\frac{d^2}{dx^2}\cos x = -\cos x, \ \ \cos 0 = 1, \ \ \left(\frac{d}{dx}\cos x\right)\bigg|_{x=0} = 0, \tag{3.22}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\sin x = -\sin x, \ \ \sin 0 = 0, \ \ \left(\frac{d}{dx}\sin x\right)\bigg|_{x=0} = 1. \tag{3.23}$$

Proof. (ii)-(iv) の同値性は, それぞれの定義を満たす冪級数が一致することですでに示されている. これから (i) と (iv) の同値性を示すが, 微分方程式の初期値問題 (3.22), (3.23) の解が一意的に定まること（ここではその事実は証明しない）に注意すると, (3.17), (3.18) で定義される $\cos x$ が, (3.22) の解であることを示せば十分である. 逆関数の微分公式より $-1 < \theta < 1$, $0 < x < \pi$ に対して

$$\frac{d}{dx}p^{-1}(x) = \frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1-\theta^2}}} = -\sqrt{1-\theta^2},$$

$$\frac{d^2}{dx^2}p^{-1}(x) = \frac{d}{d\theta}\left(-\sqrt{1-\theta^2}\right)\frac{d\theta}{dx} = \frac{\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}\left(-\sqrt{1-\theta^2}\right) = -\theta.$$

また,

$$\cos 0 = p^{-1}(0) = 1 \ \left(\Leftrightarrow \ p(1) = \int_1^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 0\right),$$

$$\left(\frac{d}{dx}\cos x\right)\bigg|_{x=0} = -\sqrt{1-\theta^2}\bigg|_{\theta=1} = 0.$$

さらに (3.22) の解の連続性より, $p^{-1}(x) = \cos x$ は, $0 \leq x \leq \pi$ における初期値問題 (3.22) の解である. $-\pi \leq x < 0$ に対しても, (3.18) で定義される $\cos x$ が, 同様に (3.22) の解であることが示される. 以上より, $-\pi \leq x \leq \pi$ においては, (i) と (iv) が等しい関数 $\cos x$ を定義することがわかった. さらに $\sin x$ に対しても同様のことがわかる. 最後に, (iv) で定義される $\cos x$, $\sin x$ が 2π 周期関数であることが示されれば, 全ての実数 x に対して, これらの関数が (i) の (3.18), (3.19) によって定義される関数と等しいことがわかる. $\cos 0 = -\cos\pi = 1$, $\sin 0 = \sin\pi = 0$ が成り立つことと, (ii) と (iv) の定義が一致し, (ii) の定義から $\cos x$, $\sin x$ は全ての実数に対して加法定理を満たしていることに注意する. このとき, 加法定理より

$$\cos(2\pi) = \cos\pi\cos\pi - \sin\pi\sin\pi = 1,$$
$$\sin(2\pi) = \sin\pi\cos\pi + \cos\pi\sin\pi = 0$$

であるので, 一般の実数 x に対して次の等式が成り立つ:

$$\cos(x+2\pi) = \cos x\cos(2\pi) - \sin x\sin(2\pi) = \cos x,$$
$$\sin(x+2\pi) = \sin x\cos(2\pi) + \cos x\sin(2\pi) = \sin x.$$

よって, $\cos x$, $\sin x$ が 2π 周期関数である. □

3.7 応用

3.7.1 オイラーの公式

e^x と三角関数 $\cos x$, $\sin x$ の冪級数:

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!},\quad \sin x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

から, オイラーの公式と呼ばれる次の等式が成り立つ:

$$\mathrm{e}^{ix} = \cos x + i\sin x. \tag{3.24}$$

この関係は, 指数関数を用いた加法定理を満たす関数の定義 (3.3):

$$C(x) = \frac{E(ix)+E(-ix)}{2},\quad S(x) = \frac{E(ix)-E(-ix)}{2i}$$

からも, $C(x;1) + iS(x;1) = E(ix;1)$ として直ちに導かれる.

オイラーの公式から, 次のような, ネイピア数 e と円周率 π を関係づけるオイラーの等式や, ド・モアブルの公式が直ちに従う:

$$\mathrm{e}^{i\pi} = -1 \quad (\text{オイラーの等式}), \tag{3.25}$$

$$(\cos x + i\sin x)^n = \mathrm{e}^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx) \quad (\text{ド・モアブルの公式}). \tag{3.26}$$

本講義では, 加法定理が成り立つ関数という立場で三角関数を定義し, 指数関数との関連からオイラーの公式に至ったが, 冪級数による三角関数の定義 (3.21) や, 微分方程式の初期値問題の解としての定義 (3.22), (3.23) からでもオイラーの公式を証明することができる. オイラーの公式を用いると, 加法定理や, そこから導かれる三角関数の各種公式を, 指数法則に帰着させて証明することができる.

例 3.7.1. 加法定理:

$$\begin{aligned}\cos(x \pm y) =& \frac{\mathrm{e}^{i(x+y)} + \mathrm{e}^{-i(x+y)}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{ix}\mathrm{e}^{iy} + \mathrm{e}^{-ix}\mathrm{e}^{-iy}}{2} \\ =& \frac{\left(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}\right)\left(\mathrm{e}^{iy} + \mathrm{e}^{-iy}\right) + \left(\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}\right)\left(\mathrm{e}^{iy} - \mathrm{e}^{-iy}\right)}{4} \\ =& \frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2}\frac{\mathrm{e}^{iy} + \mathrm{e}^{-iy}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}\frac{\mathrm{e}^{iy} - \mathrm{e}^{-iy}}{2i} \\ =& \cos x \cos y - \sin x \sin y.\end{aligned}$$

例 3.7.2. 2 倍角の公式:

$$\begin{aligned}\cos(2x) =& \frac{\mathrm{e}^{2ix} + \mathrm{e}^{-2ix}}{2} = \frac{\left(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}\right)^2 - 2\mathrm{e}^{ix}\mathrm{e}^{-ix}}{2} \\ =& 2\left(\frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2}\right)^2 - 1 = 2\cos^2 x - 1.\end{aligned}$$

例 3.7.3. 3 倍角の公式:

$$\begin{aligned}\cos(3x) =& \frac{\mathrm{e}^{3ix} + \mathrm{e}^{-3ix}}{2} = \frac{\left(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}\right)^3 - 3\mathrm{e}^{ix}\mathrm{e}^{-ix}\left(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}\right)}{2} \\ =& 4\left(\frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2}\right)^3 - 3\frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2} = 4\cos^3 x - 3\cos x.\end{aligned}$$

例 3.7.4. 4 倍角の公式:

$$\begin{aligned}\cos(4x) =& \frac{\mathrm{e}^{4ix} + \mathrm{e}^{-4ix}}{2} = \frac{\left(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}\right)^4 - 4\mathrm{e}^{3ix}\mathrm{e}^{-ix} - 6\mathrm{e}^{2ix}\mathrm{e}^{-2ix} - 4\mathrm{e}^{ix}\mathrm{e}^{-3ix}}{2} \\ =& 8\left(\frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2}\right)^4 - 4\frac{\mathrm{e}^{2ix} + \mathrm{e}^{-2ix}}{2} - 3 = 8\cos^4 x - 4\cos(2x) - 3 \\ =& 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1.\end{aligned}$$

演習 3.7.1. 上の例にならい, 指数法則を用いて $\sin 4x$ を, $\sin x$, $\cos x$ で表せ.

3.7.2　三角関数の値の近似計算

三角関数の冪級数

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

において, 右辺の第 n までの部分和を, $\tilde{c}_n(x)$ と表す. このとき, 数値計算で $\tilde{c}_n(\pi)$ の値を求めると, n を大きくするにつれ, $\tilde{c}_n(\pi)$ が $\cos\pi = -1$ に近づく様子がわかる:

$$\begin{aligned}c_1(\pi) &= 1 \\ c_2(\pi) &= 1 - \frac{\pi^2}{2!} = -3.9348\cdots \\ c_3(\pi) &= 1 - \frac{\pi^2}{2!} + \frac{\pi^4}{4!} = 0.1239\cdots \\ c_4(\pi) &= 1 - \frac{\pi^2}{2!} + \frac{\pi^4}{4!} - \frac{\pi^6}{6!} = -1.2113\cdots \\ c_5(\pi) &= 1 - \frac{\pi^2}{2!} + \frac{\pi^4}{4!} - \frac{\pi^6}{6!} + \frac{\pi^8}{8!} = -0.9760\cdots \\ c_6(\pi) &= 1 - \frac{\pi^2}{2!} + \frac{\pi^4}{4!} - \frac{\pi^6}{6!} + \frac{\pi^8}{8!} - \frac{\pi^{10}}{10!} = -1.0018\cdots\end{aligned}$$

演習 3.7.2. $\sin x$ の冪級数

$$\sin x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

において, 右辺の第 n までの部分和を $\tilde{s}_n(x)$ と表す. コンピューターを使って $\tilde{s}_n(\frac{\pi}{6})$ の値を $n = 1, \cdots, 8$ の場合に求め, $\tilde{s}_n(\frac{\pi}{6})$ が n を大きくするにつれ, $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ に近づく様子を確かめよ.

第 4 章　円周率

4.1　円周率とは？

円周率 π を初めて学ぶ小学校では, その値を「円の直径に対する円周の中さの割合」と定義する. これは「円周率」の単語そのものであり, 教室で十分な大きさの円を描き, その直径と円周を測定することによって, 円周率が「$3.14\cdots$」程度の値であることは簡単に求めることができる. それは, 高等学校の物理の授業で重力加速度「$9.8\cdots\mathrm{m/s^2}$」を実験で求めるよりも遥かに易しい作業である. しかし, 地球上の異なる場所では異なる値として計測され, 最終的に人間によって定められた定数である重力加速度とは異なり, 数学的に定義された π の値は, その測定方法による一切の誤差を許さない. そうなると, 物理的な測定によって π の値を求めることは現実的に不可能であり, 純粋な数学的手法によって求められなければならない. しかし, それを実現する数学は, 小学校ではおろか, 高校の数学でも十分では無い. こうした背景から, 小学校で初めて π の近似値を 3.14 と習った以降, 高校卒業までその数値的な裏付けには全くと言ってよいほど触れられることはない.

以降では, 高校までの算数・数学ではほとんど触れられない, 単なる円周率とは異なる π の定義とその具体的な計算方法, そして, 円周率という立場では理解し難い π が持つ様々な興味深い性質を紹介する.

注意 4.1.1. ここで, 数学的に円周率の値を求めるとは, 「任意の小さな誤差に対する円周率の近似値を数学的手法によって計算すること」であり, このことは, 「任意の精度で円周率が計算できる数学的な手続きを構築すること」と言い換えてもよい. これを実行し, 具体的な数値を得るのにコンピューターを用いることは構わないとする.

注意 4.1.2. 円周率の値 π は, 半径 1 の円周の長さの半分であり, 半径 1 の円の面積であることは, 小学校でも行う簡単な考察によって確認することができる.

4.2　円に内接する正多角形による円の近似

n を非負の整数とし, 単位円に内接する正 2^{n+2} 角形の面積 S_n で, 単位円の面積 π を近似する. 二辺の長さが 1, 頂角が $\frac{\pi}{2^{n+1}}$ の二等辺三角形の面積を T_n とすると,

$$T_n = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{2} \tag{4.1}$$

であり, $S_n = 2^{n+2}T_n$ より, S_n は次で与えられる:

$$S_n = 2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right). \tag{4.2}$$

このとき $\lim_{n\to\infty} S_n = \pi$ より, 大きな n に対して S_n の値を実際に計算することにより, π の近似値を得ることができる. ここで問題になるのが, $\sin(\frac{\pi}{2^{n+1}})$ の値の計算方法であるが, 次の命題で与える半角の公式がそれに答える.

命題 4.2.1. $\{\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})\}_{n=0}^{\infty}$ **は次の漸化式で与えられる:**

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)=\sqrt{\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)+1}{2}}\quad (n=1,2,\cdots). \tag{4.3}$$

Proof. $c_n=\cos(\frac{\pi}{2^{n+1}})$ とする. $c_0=\cos\frac{\pi}{2}=0$ であり, $n\geq 1$ に対しては半角の公式より

$$c_{n-1}=\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)=2\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)-1=2c_n^2-1.$$

よって, $c_n\geq 0$, $\sin(\frac{\pi}{2^{n+1}})=\sqrt{1-c_n^2}$ に注意すると (4.3) が得られる. □

命題 4.2.1 より S_n は次のように表されることがわかる:

$$\begin{aligned}
S_n &=2^{n+1}\sqrt{1-c_n^2}=2^n\sqrt{2-2c_{n-1}}\\
&=2^n\sqrt{2-\sqrt{2+2c_{n-2}}}\\
&=2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+2c_{n-3}}}}\\
&\ \vdots\\
&=2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots\sqrt{2+\sqrt{2+2c_0}}}}}}\\
&=2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}.
\end{aligned}$$

このとき, S_n の値は, 2^n 次方程式の解であることに注意する. すなわち, ここで行った S_n の構成は, 有限次の代数方程式の解で π の値を近似していることに相当する.

実際に $S_0,\cdots,S_6$ の値を計算すると次のようになる:

$$\begin{aligned}
S_0&=2\\
S_1&=2\sqrt{2}=2.8284\cdots\\
S_2&=2^2\sqrt{2-\sqrt{2}}=3.0614\cdots\\
S_3&=2^3\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}=3.1214\cdots\\
S_4&=2^4\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}=3.1365\cdots\\
S_5&=2^5\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}=3.1403\cdots\\
S_6&=2^6\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}=3.1412\cdots.
\end{aligned}$$

演習 4.2.1. 上記の方法で, 単位円に内接する正 2^{10} 角形の面積 S_8 の近似値を, 小数点以下第 6 位まで計算せよ.

注意 4.2.1. 上記のように, S_n の極限として π の近似値を計算するのは, 数列 $\{S_n\}$ の収束が遅いため, あまり効率的ではない. しかし, 必要な数学知識は半角の公式, 計算も和差積と平方根のみなので, 高校生でも電卓だけで気軽に理論の数値計算による検証が可能である.

4.3 積分による π の定義

逆三角関数を用いた三角形の定義の際に議論したように, $0 \leq \theta \leq \pi$ における $\cos\theta$ の逆関数は次で与えられた:

$$\cos^{-1} x = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}. \tag{4.4}$$

このとき,

$$\cos\pi = -1 \;\Leftrightarrow\; \cos^{-1}(-1) = \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \pi \tag{4.5}$$

は, 少々厳めしいが, 小学校で学ぶ円周率 π の定義「円の直径の長さにに対する円周の長さの比」に忠実に従った積分による π の定義である.

π の近似値を計算するには, 例えば, 十分大きな自然数 N に対して, 区分求積を用いた次のような数値計算を行う:

$$P_N = \frac{2}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{k}{N}\right)^2}}.$$

実際の P_N の値は, $P_{100} = 2.944\cdots$, $P_{1000} = 3.077\cdots$, $P_{10000} = 3.121\cdots$ であり, あまり効率の良い π の計算方法とはいえない.

4.4 三角関数の零点としての π の定義

前章で $\sin x$ が次の冪級数で与えられることが示された:

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)!}. \tag{4.6}$$

ここで, 任意の整数 m に対して $\sin(m\pi) = 0$ より, 次の関係が成り立つ:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}(m\pi)^{2k-1}}{(2k-1)!} = 0. \tag{4.7}$$

特に $m = 1$ の場合を考えると, π は次のように定義されることがわかる:

$$\pi \;\Leftrightarrow\; \text{方程式 } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)!} = 0 \text{ の } x > 0 \text{ である最小の解.} \tag{4.8}$$

これより, $\sin x$ の冪級数の第 n 項までの部分和 $s_n(x)$:

$$s_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)!} \tag{4.9}$$

に対する x に関する $2n-1$ 次方程式 $s_{2n-1}(x) = 0$ の解は, π の近似値を与える. 実際, $\pi = 3.141592\cdots$ に対して, 例えば次の事実が確認できる:

$$s_6(3.1415)(= -0.00035\cdots) < 0 < s_6(3.141)(= 0.00014\cdots).$$

これより, 11 次方程式 $s_6(x) = 0$ は, 小数点以下第 3 位までの精度で π の近似値を与えることがわかる. 一方, 半角の公式を用いて円に内接する正多角形の面積で近似する方法では, 得られた 32 次方程式の π の近似精度が高々小数点以下第 2 位までだった. これより, 冪級数を用いた代数方程式の解による π の近似の方が, 方程式の次数と解の近似精度という立場からは優れていると考えられる.

注意 4.4.1. 代数方程式の近似解をニュートン法で求める場合, 要求する精度が同じならば, 1 ステップごとの乗算回数が少ない次数の低い方程式の方が, より高速に計算を実行することができる.

演習 4.4.1. π に対する $s_7(x)=0$, $s_8(x)=0$ の解の近似精度を求めよ.

4.5　逆正接関数の冪級数展開を用いた π の定義

$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ で定義された狭義単調増加な関数 $y=\tan x$ の値域は $(-\infty,\infty)$ であるので, その逆関数 $y=\tan^{-1}x$ は実数全体で定義され, 値域は $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ である.

$\tan\frac{\pi}{4}=1 \Leftrightarrow \tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}$ より, $\tan^{-1}x$ の冪級数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ が与えられれば, $4\sum_{n=0}^{\infty}a_n=\pi$ によって π の値が級数を用いて定義できる. 実際, テイラーの定理などを用いることによって, $\tan^{-1}x$ の冪級数が次のように与えられることが知られている（証明は省略）:

$$\tan^{-1}x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}x^{2k-1}\quad(|x|\leq 1). \tag{4.10}$$

これを用いると, 級数による π の定義を与える次の等式が得られる:

$$4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}=4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right)=\pi. \tag{4.11}$$

このような, 分数の無限和から, 突如「円周率」である π が現れる事実は大変興味深い.

(4.11) で与えられる π の級数表現は大変美しいが, いざ π の近似値をこの級数の部分和を用いて計算しようとすると, 非常に効率が悪いことがわかる. これは, 級数の収束が非常に遅いためで, 実際に第 N 項までの部分和を Q_N で表すと, 次のような計算結果が得られるのみである:

$$\begin{aligned}Q_{100}&=3.1516\cdots\\Q_{1000}&=3.1425\cdots\\Q_{10000}&=3.1416\cdots.\end{aligned}$$

$\tan^{-1}x$ の冪級数を使い, 上記の方法より効率よく π の近似値を求めるには, 次の等式を用いて, より収束の早い級数を構成することによって可能となる:

$$\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}.$$

上の関係は, $\tan x$ に関する加法定理を用いた以下の等式から確かめられる:

$$\tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}\right)=\frac{\tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)+\tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{3}\right)}{1-\tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)\tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{3}\right)}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1.$$

$x=\frac{1}{2},\frac{1}{3}$ として (4.10) を用いると, (4.11) に代わって π に収束する次の級数が得られる:

$$4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2k-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{2k-1}\right)=\pi. \tag{4.12}$$

この級数の第 N 項までの部分和を $\tilde{Q}_N$ で表すと, 次のように Q_N を計算するよりも遥かに容易に精度の高い値が得られることがわかる:

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_1&=3.33333\cdots\\\tilde{Q}_2&=3.11728\cdots\\\tilde{Q}_3&=3.14557\cdots.\end{aligned}$$

この方法は, 先に紹介した, 冪級数の部分和から得られる代数方程式 $s_n(x)=0$ の解を求める方法と比較しても, 数値計算の立場から遥かに優れているといえる.

演習 4.5.1. $\tilde{Q}_4, \cdots, \tilde{Q}_{10}$ の値を計算せよ.

4.6　その他の定義

上記で紹介したのはほんの一例で, 他にも π の値は様々な式の中に現れ, そのいずれをもって π の定義としても差し支えない. 以下に幾つかの例を挙げておく:

- $\zeta(2)$, $\zeta(4)$, $\zeta(6)$, $\cdots$ の値:
$$\zeta(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},\qquad \zeta(4)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90},\qquad \zeta(6)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{945},\qquad \cdots. \tag{4.13}$$
ここで, $\zeta(z)$ はリーマンのゼータ関数と呼ばれる次で定義される複素変数関数である:
$$\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}. \tag{4.14}$$
- ガウス積分:
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}. \tag{4.15}$$
- $\lim_{x\to\infty}\tan^{-1}x$ の値:
$$\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+1}\,dx=\frac{\pi}{2}. \tag{4.16}$$
- $\frac{\sin x}{x}$ の積分の値:
$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}. \tag{4.17}$$
- $\frac{1}{2}!$ の値:
$$\frac{1}{2}!=\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{4.18}$$
ここで, 正の実数 a に対する $a!$ の値は, 実部が正の複素平面上で定義されるガンマ関数 $\Gamma(z)$:
$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty} x^{z-1}e^{-x}\,dx \tag{4.19}$$
によって
$$a!=\Gamma(a+1) \tag{4.20}$$
で定義される値である.

注意 4.6.1. (4.17) で定義されたガンマ関数 $\Gamma(z)$ が次の性質を持つことは, 部分積分により容易に示される:
$$\Gamma(n+1)=n!\ \ (n=0,1,2,\cdots),\quad \Gamma(x+1)=x\Gamma(x).$$
一般の z に対する $\Gamma(z)$ の値を計算することは困難だが, ガウス積分 (4.15) を用いると, $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ が得られる. これより, $\frac{2n-1}{2}!=\Gamma(\frac{2n+1}{2})$ $(n=1,2,\cdots)$ の値は次のようになる:
$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}!&=\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}=0.88627\cdots\\
\frac{3}{2}!&=\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}=1.32934\cdots\\
\frac{5}{2}!&=\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{15\sqrt{\pi}}{8}=3.32335\cdots.
\end{aligned}$$

このように, 本来は非負の整数 n に対して定義された n の階乗 $n!$ が, $\Re(z) > -1$ である一般の複素数に対して, ガンマ関数を用いて $z! = \Gamma(z+1)$ と定義することができると, 本来は非負の整数でしか意味をなさなかった概念, 例えば「微分回数」を拡張し, 「非整数回微分」を考えることができる可能性が生まれてくる. 実際, ラプラス変換を用いて非自然数回の微分を定義することが可能であり, 例えば, $p+1 > \max\{0, m\}$ に対して x^p の m 階微分 $\frac{d^m}{dx^m}x^p$ は次のように定義できる:

$$\frac{d^m}{dx^m}x^p = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-m+1)}x^{p-m}. \tag{4.21}$$

ここで, m が自然数の場合は

$$\frac{d^m}{dx^m}x^p = p\cdots(p-m+1)x^{p-m} \tag{4.22}$$

となり, 通常の自然数回微分に一致する. また, $p=1$, $m=\frac{1}{2}$ の場合, すなわち x の $\frac{1}{2}$ 回微分は, 次で与えられることがわかる:

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dx^{\frac{1}{2}}}x = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})}x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{\frac{1}{2}}.$$

関連図書

[1] 矢野健太郎, 石原繁 (1993)『基礎解析学』裳華房.

専門性を求められない理工系の学生向けに書かれた教科書である. 定理の証明などはあまり重視せず, 大学の数学に苦手意識を持つ非専門家でも気軽に「複素関数」, 「ベクトル解析」, 「フーリエ解析」, 「ラプラス変換」などの要点を一通り学ぶことができる良書である.

[2] 吹田信之, 新保経彦 (1996)『理工系の微分積分学』学術図書出版社.

山口大学理学部数理科学科で「微分積分学 I」・「微分積分学 II」等の授業で使用している教科書である. レベルは [1] と [3] の中間といったところで, 収束・発散は「ε-δ 論法」を用いてきちんと議論されている. その反面, 気楽に勉強するには少し敷居が高い.

[3] 杉浦光夫 (1980)『解析入門　』東京大学出版会.

専門家を志す学生を想定した, [2] よりも更に厳密性を重視した教科書である. [2] で満足がゆかなければ次に読むべき教科書である.