教授 小野 薫 (微分幾何学・位相幾何学の研究)

空間の幾何構造，特に symplectic 構造，の幾何学の研究をしている。Arnold は symplectic 幾何学が興味深い研究対象であることを数々の予想とともに指摘し，その後の研究に大きな影響を与えた。1980 年頃に Conley-Zehnder は Hamilton 系の周期解の存在，個数の下からの評価に関する Arnold の予想をトーラス上で証明した。また，Gromov は (擬) 正則曲線の方法を考案し，symplectic 幾何学の研究を大きく進展させた。1980 年代の半ば過ぎに Floer は Conley-Zehnder の変分法の枠組と正則曲線の方法を結びつけて現在 Floer (co)homology と呼ばれる理論を創始した。技術的な困難を避けるために条件はついていたが，新たな数学が切り開かれた。現在では，他の様々な設定でも Floer 理論が研究され，symplectic 幾何に限らず，低次元トポロジーなどでも強力な道具となっている。

私は，Hamilton 微分同相写像に対する Floer 理論を技術的条件なしで構成することを研究し，先ず Floer の条件を弱めることができること [1]，そのあと深谷賢治氏と一般の閉 symplectic 多様体上で構成できること [4] を示し，Betti 数版の Arnold 予想を証明した。同様の議論で，Gromov-Witten 不変量の構成し，期待される性質が満たされることを示した。Hamilton 微分同相写像より広いクラスの symplectic 微分同相写像に対する Floer 理論についても研究し [2], それを発展させて Hamilton 微分同相写像群は symplectic 微分同相写像群の中で C^1-位相に関して閉じていること (flux 予想) を証明した [6]。

Lagrange 部分多様体の Floer (co)homology は一般には定義できないが，境界作用素を適当に修正することで定義できる場合もある。その一般論を深谷氏，Oh 氏，太田氏と研究し [7]，それを具体的な場面に応用することで Hamilton 微分同相写像で displace できない Lagrange トーラスの記述に関する成果を得た [8]，[9]，[10]。Lagrange 部分多様体の Floer 理論は，深谷圏の基盤であり，ホモロジー的ミラー対称性の研究に不可欠である。上述の研究に引き続き，トーリック多様体のホモロジー的ミラー対称性に関する研究成果を論文あるいは preprint として順次纏めて発表している。

上に書いた研究は、1996 年の深谷賢治氏との共同研究による倉西構造と仮想的基本類・仮想的基本鎖の理論に基礎を置いている。この理論の詳細を含む expository articles を深谷氏、Oh 氏、太田氏とともに書き、順次公表している。

1. On the Arnold conjecture for weakly monotone symplectic manifolds, Invent. Math. 119 (1995), 519-537.
2. Symplectic fixed points, the Calabi invariant and Novikov homology (with H.-V. Le), Topology 34 (1995), 155-176.
3. Lagrangian intersection under legendrian deformations, Duke Math. J. 85 (1996), 209-225.
4. Arnold conjecture and Gromov-Witten invariants, (with K. Fukaya), Topology 38 (1999), 933-1048.

5. Simple singularities and symplectic fillings, (with H. Ohta), J. Differential Geom. 69 (2005), 1-42.
6. Floer-Novikov cohomology and the flux conjecture, Geom. Funct. Anal. 16 (2006), 981-1020.
7. Lagrangian intersection Floer theory - anomaly and obstruction -, (with K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta), AMS/IP Studies in Advanced Mathematics 46-1,2, Amer. Math. Soc. and International Press, 2009.
8. Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds I, (with K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta), Duke Math. J. 151 (2009), 23-174.
9. Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds II, (with K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta), Selecta Math. New Series, 17 (2011), 609-711.
10. Toric degeneration and non-displaceable Lagrangian tori in $S^2 \times S^2$, (with K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta), International Mathematical Research Notices, 2012, no13, 2942-2993, DOI 10.1093/imrn/rnr128.
11. Symplectic fillings of links of quotient surface singularities, (with M. Bhupal), Nagoya Math. J. 207 (2012), 1-45.
12. Displacement of polydisks and Lagrangian Floer theory, (with K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta), J. Symp. Geom. 11 (2013), 231-268.
13. Lagrangian Floer theory and mirror symmetry on compact topic manifolds, (with K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta), Astérisque 376, Société Mathématique de France, 2016.
14. Spectral invariants with bulk, quasi-morphisms and Lagrangian Floer theory, (with K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta), Memoir of Amer. Math. Soc. 1254, Amer. Math. Soc. 2019.
15. Kuranishi Structures and Virtual Fundamental Chains, (with K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta), Springer Monographs in Mathematics, Springer Nature Singapore, 2020.