SGC ライブラリ- 64

代数幾何入門講義

小林　正典 著

サイエンス社

まえがき

幾何の対象にはさまざまなものがあるが，代数幾何では多項式や正則関数の零点集合，あるいはそれらを貼り合わせたものを扱う．扱う対象が限定されている反面，構造が深く道具が多いことから詳しく調べることができる．また，さまざまな場面で普遍的に現れる．

デカルト (Descartes) 以来，点を座標関数の値の組として表すことで，解析・代数を用いて幾何を調べることができるようになった．関数によって点がわかり，点があれば関数が定まる．この双対性を押し進めると，古典的な多様体論では取り扱えなかった図形，すなわち，交わったり，尖ったり，重なったりといった，局所線形近似では捉えきれない図形も包摂した理論ができる．グロタンディック (Grothendieck) による概型（スキーム）の理論にはさらに相対化が自然にできたり，数論の幾何をも統一的に取り扱えるといった長所がある．代数多様体は概型の特殊なものとして定義される．概型の理論は抽象度がやや高いが，その険しさがかえって人を惹き付ける魅力でもある．そして，標準的な部分はすっきりしていてわかりやすいと思う．他分野の人にとっても，概型の理論は代数と直結しかつ多様体論との類似もあり有用であろう．

代数多様体論の本はすでに多く，それぞれにさまざまな特色がある．本書は，代数幾何を学ぶ人のために，学部・大学院におけるゼミ・輪講・講義・独習で幅広く使えるよう，以下のことを心がけた．

(1)　基本的な事項を飛ばさずに記述した．

数学科の学部の講義で標準的に学ぶ事柄のみを仮定して平易に記述した．具体的には，線形代数・微積分・集合・位相と，環と加群の初歩を学んだ段階ですぐに読み進められるようにしてある．なるべく自己完結的にするため，また，他分野の読者の便宜も考えて，環と加群・ホモロジー代数の必要となる知識も解説した．既知の場合は飛ばしてよい．また，集合・位相の言葉の定義も備忘録として巻末に付した．基礎的な部分で論理構成に必要な命題の証明を，引用したり省略したり演習としたりすることはできるだけ避けた．

(2)　内容を精選して基本的な内容をじっくり学べるよう配慮した．

1 年間の講義・ゼミ等で使うことを念頭に置き，基礎理論の骨格を手早く学べるよう，全体のボリュームを抑えた．利用しやすいよう，各章のページ数をだいたいそろえた．そのため古典論の詳細や概型の一般論を網羅的に述べてはいない．本書で基礎を学んだ後は，他の詳しい本をどんどん読み進められるとよい．

(3)　標準的な定義・名称を用いるようにした．

読者の無用な混乱を避けるため，なるべく標準的な定義を用いた．また，代数幾何では，同じ概念に長年の間にさまざまな名前が付いているものがある．他の文献を読む場合の利便性を鑑み，定義では複数挙げ，本文では一つに統一した．

(4) 抽象化するが，ゆっくり行うようにした．

近年さらに重要度を増したホモロジー代数の取り扱いを濃くした．ただし，抽象化の前に具体例を与えるように努めた．また，高度な抽象化は段階を踏んで行うようにした．途中からページをめくると難しく見えるかもしれないが，前から順番に読んでいけばさほどでもないはずである．

抽象的に感じる命題は，具体的な例に置き換えて読むとよい．仮定が一般化されているのは，証明にそれだけの仮定しか使っていない，というヒントでもある.「環」であれば，多項式環,「環付き空間」「概型」であれば，アフィン空間や射影空間をまず思い浮かべてみるとよい．

謝辞：原稿にさまざまなコメントを寄せてくれた大前健君と，筆が進まない筆者を辛抱強く脱稿まで導いてくださったサイエンス社『数理科学』編集部の平勢耕介氏に心から感謝いたします．

サポートページ：`http://www.saiensu.co.jp/`からリンクされています．

2008 年 6 月 1 日

小林　正典

目　次

第 1 章
ネーター環

空間や点といった幾何的概念を，関数の環やイデアルなどの代数的概念を用いて処理するのが代数幾何の一つの基本的手法である．この章では，環と加群について基本的な内容，特にネーター (Noether) 環について学ぶ．より進んだ内容については，必要になったときに補足する．詳細は [5], [6], [13] などを見よ．

1.1　基礎事項

この節では環と加群に関して学部で標準的に習う程度の概念を復習する．

環

加減乗が自由にできる集合を**環** (ring) といい，乗法が可換なとき**可換環** (commutative ring)，乗法の単位元 1 をもつとき**単位的環** (unitary ring) という．この本では特に断らない限り，環は単位的可換環とし，**環準同型** (ring homomorphism) は 1 を 1 に移すものとする．$0 = 1$ となる環は 1 元からなり，**零環** (zero ring) と呼ばれる．零環はしばしば例外的取り扱いが必要になり，特に断らずに除外して考えることがある．乗法に関する逆元をもつ元を**単元** (unit) という．0 でない元を掛けて 0 になることがある元を**零因子** (zero divisor) という．零環でなく，0 以外に零因子をもたない環を**整域** (integral domain) といい，零環でなく，0 以外の元が単元であるとき**体** (field) という．

体 k 上の**多項式環** (polynomial ring) $k[x_1, \ldots, x_n]$，有理整数環 $\boldsymbol{Z}$ は整域であり，環の重要な例である．

以下，R を（単位的可換）環とする．

$\boldsymbol{R}$ 加群・$\boldsymbol{R}$ 代数

加群 M は，両立する R のスカラー倍が定まっているとき **$\boldsymbol{R}$ 加群** (R-module)

第 2 章

アフィン代数多様体

まず，基本的な感覚を養うため，古典的な題材に触れておこう．この章では，体 k 上のアフィン空間 k^n 内の多項式系の零点集合を扱い，図形と関数の対応関係について学ぶ．

2.1 代数的集合

この章では，体 k を固定し，n 変数多項式環 $k[x_1, \ldots, x_n]$ を R で表す．

定義 いくつかの多項式 $f_j(x_1, \ldots, x_n) \in R$ $(j = 1, \ldots, m)$ に対し，k^n 内の共通零点集合（連立方程式 $f_1 = \cdots = f_m = 0$ の解集合）を（アフィン）**代数的集合** ((affine) algebraic set) という．k^n 自身を代数的集合と見たとき（k 上の）n 次元**アフィン空間** (affine space) といい，$\boldsymbol{A}_k^n$ あるいは単に $\boldsymbol{A}^n$ で表す．$\boldsymbol{A}^1$, $\boldsymbol{A}^2$ をそれぞれ**アフィン直線**，**アフィン平面**という．

R の部分集合 S に対し，$V(S)$ で S に属するすべての多項式の共通零点集合を表す．

例 $f(x_1, \ldots, x_n)$ が既約 d 次式のとき，$V(\{f\})$ を $\boldsymbol{A}^n$ 内の d 次の**アフィン超曲面** (affine hypersurface) という．$d = 1$ のとき**アフィン超平面** (affine hyperplane) という．

命題 2.1.1 S, T を R の部分集合とするとき，以下が成り立つ．

1. $S \subset T \Longrightarrow V(S) \supset V(T)$.
2. I を S のすべての元で生成されるイデアルとすると，$V(I) = V(S)$.

証明 1 は自明．2. $S \subset I$ より $V(S) \supset V(I)$．I の元は S の元の一次結合で書けるから反対向きの包含関係も成り立つ． $\square$

定理 1.3.1 より R はネーター環であるから，イデアル I は有限個の元

第 3 章

アフィンスペクトル

有限生成 k 代数からアフィン代数多様体を作った操作を，空間と座標環の双対性により，一般の（単位的可換）環に拡張しよう．これは，概型の局所理論であり，多様体でいえば座標近傍の理論に当たる．

座標環が代数的閉体上の有限生成代数のときは，極大イデアル全体が点集合であった．一般の環のときは，素イデアル全体を考えるというのがグロタンディックのアイデアである．0 次元とは限らない既約閉集合の全体に対応する．

3.1 Spec A

環 A に対し，A の素イデアル全体の集合を $\operatorname{Spec} A$ で表し，A の **（アフィン）スペクトル** ((affine) spectrum) という．

例 1. k を体とするとき，$\operatorname{Spec} k = \{(0)\}$（1 点）である．

2. A が PID なら，$\operatorname{Spec} A = \{(0), (f) \mid f$ は既約元 $\}$ である．特に，
   - $\operatorname{Spec} \boldsymbol{Z} = \{(0),\ (p) \mid p$ は素数 $\}$,
   - $\operatorname{Spec} k[x] = \{(0),\ (f(x)) \mid f(x)$ は既約多項式 $\}$.

   となる．
3. $\operatorname{Spec} A = \varnothing \iff A$ は零環.

定義 体 k 上の n 変数多項式環 $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ に対し，$\operatorname{Spec} R$ を $\boldsymbol{A}_k^n$ と書き，k 上の n 次元 **アフィン空間** (affine space) と呼ぶ.

$\operatorname{Spec} A$ にまず位相を定めよう．

定義 A のイデアル I に対し，$V(I) := \{P \in \operatorname{Spec} A \mid P \supset I\}$ と定める．

命題 3.1.1 次が成り立つ．

1. $I \subset J \Longrightarrow V(I) \supset V(J)$.

第 4 章

Hom と $\otimes$，完全系列

この章では R 加群の理論，特に，加群 Hom と，アフィンスペクトル等で逆像・直積・共通部分等に対応するテンソル積，および，加群の完全系列について学ぶ．標準的内容なので，講義などで学んでいる場合は飛ばしてもよい．

R が非可換環でも類似の性質がほとんどそのまま成立するが，簡単のため R を単位的可換環とし，M, N などを R 加群とする．

4.1 Hom

R 加群 M, N に対し，R 線形写像の全体 $\mathrm{Hom}(M,N)$ は自然に R 加群になる．$(f+g)(m) := f(m)+g(m)$, $(rf)(m) := r(f(m))$ $(f,g \in \mathrm{Hom}(M,N),\ m \in M, r \in R)$.

注意　R 加群の同型 $\mathrm{Hom}(R,M) \cong M$ （準同型 f に $f(1)$ を対応させる）が存在する．

注意　R 準同型 $f : M \to N$ と R 加群 L に対し，合成により $\mathrm{Hom}(L,M) \xrightarrow{f\circ} \mathrm{Hom}(L,N)$ および $\mathrm{Hom}(N,L) \xrightarrow{\circ f} \mathrm{Hom}(M,L)$ ができる．容易に確かめられるように，これらは R 線形写像である．

定義　M の上の線形形式の全体，すなわち $\mathrm{Hom}(M,R)$ を M^*（あるいは $M^\vee$）と書き，M の**双対** (dual) R 加群という．M から $(M^*)^*$ への自然な R 準同型 $i : M \to M^{**}$ $(m \mapsto (f \mapsto f(m)))$ ができる．

注意　R が体で M が有限生成（すなわち有限次元 R ベクトル空間）のときは $M \cong M^* \cong M^{**}$ である．しかし有限生成でなければ，例えば M が可算基底をもつベクトル空間のとき，M^*, M^{**} は非可算基底をもち，M とは同型にならない．有限生成であっても，$R = \boldsymbol{Z}$, M がねじれ加群（どの元も何倍かすると 0 になる）のとき，$M^* = 0$ である．

第 5 章
圏と関手

圏と関手に関して必要なことをまとめておく．特に，帰納極限・射影極限について学ぶ．より詳しく知りたいときは [25], [27] などを参照せよ．

5.1　圏

任意の集合に対し，そのべき集合を対応させるとき，写像としてはどこからどこへの写像になるだろうか．集合の全体から集合の全体への写像と言いたいところだが，集合の全体を集合と認めるわけにはいかない．なぜなら，例えば，$S = \{$ 自分自身を元として含まない集合 $\}$ が集合だと仮定して，S が自分自身に含まれるかどうか考えると矛盾が起こる（ラッセル (Russell) の逆理）からである．すると,「無限集合は，可算濃度の部分集合を含む」のように,「条件 P を満たすなら，条件 Q を満たす」という形の命題を考えるとき,「P を満たすもののすべての集まり」は集合としてよいであろうか？

また，同型ではあっても厳密にはものとして異なるかもしれないときに，同一性に触れずにそのまま取り扱いたいときもある．

このようなときは圏と関手を用いて述べるのが便利である．

さらに，線形代数，群論，環と加群といったさまざまなところで，何度も「準同型定理」が出て来て「またか」と思ったことはないだろうか．ベクトル空間・群といった構造を保つ写像について，形式的に成立するような事柄をすっきり述べる言葉としても便利である．逆に，定理を圏の言葉で言える形にまとめるとわかった気がしたりする．

定義　圏 (category) とは，次の三つが定められ：

1. ある**対象** (object) の範囲.
2. 二つの対象 X, Y に対して**射** (morphism) の集合 $\mathrm{Hom}(X, Y)$.
3. 三つの対象 X, Y, Z に対し写像 $\circ : \mathrm{Hom}(X, Y) \times \mathrm{Hom}(Y, Z) \to$

第 6 章

層

層は，正則関数のように局所的性質をもつ大域的な対象を，代数的に表現するのに便利な概念である．

層はどのようなものを抽象化したものであるかを先に説明しておこう．$\boldsymbol{R}^n$ の開集合 U に対して，$C^r(U)$ で U 上の C^r 級関数の全体のなす環を表す．また $\mathscr{A}^p(U)$ で U 上の C^∞ 級 p 形式の全体のなす加群を表す．以下ではこのように，$\mathscr{F}(U)$ で U を定義域とする何らかの局所的性質を満たす関数や微分形式の全体を表している，と思うと理解しやすいであろう．

6.1 局所的性質

位相空間の上の関数が連続であるとか微分可能であるかどうかは，各点の十分小さな近傍で判定される．このように，各点の十分小さな近傍の性質で判定される性質を，**局所的性質**と呼ぶ．

局所と大域の違いについて簡単な例で考えてみよう．

例えば，$\log x$ という関数を考える．これは $x > 0$ のとき連続（さらに解析）関数である．$x \to +0$ のとき $\log x \to -\infty$ で発散するから，実数値連続関数としては原点まで定義域を広げられない．同様に，$xy/(x^2+y^2)$ の原点の回りでの振る舞いのように，方向によって収束先が違う関数も連続関数として原点まで定義域を広げられない．

定義域を広げられない理由には連続性の制限よりもっと自明でないものがある．0 でない任意の複素数 α に対して

$$\log z = \log(\alpha + (z-\alpha)) = \log\alpha + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{z-\alpha}{\alpha}\right)^k$$

のべき級数展開は収束半径が $|\alpha|$ なので，中心の値 $\log\alpha$ が定まれば $z=\alpha$ を中心とした半径 $|\alpha|$ の円の内部で正則関数を与える．実軸上の点から解析接続を続けることにより $\boldsymbol{C}^\times$ 上に延びていく．$\boldsymbol{C}^\times$ の単連結な領域上では正則関数

第 7 章
概型

この章では概型（スキーム）について学ぶ．概型は，局所環付き空間の特別なものとして定義される．すなわち，データとしては，集合・位相・関数環の層の三つからなる．

7.1　Spec A の構造層

$X = \operatorname{Spec} A$ の上に層 $\widetilde{A}$ を構成しよう．

定義　X の任意の開集合 U において，$\widetilde{A}(U)$ を，$s : U \to \coprod_{P \in U} A_P$ $(s(P) \in A_P)$ であって，U の各点 P に対しある開近傍 V が存在して，ある $a, f \in A$ が存在して $s(Q) = a/f$ $(\forall Q \in V,\ f \notin Q)$ と書けるものの全体とする．$\widetilde{A}(U)$ は自然に A 代数になる．制限写像を定義域の制限写像で定めると，$\widetilde{A}$ は環の前層になる．

U からの写像として定めたから，各点の像が 0 ならば切断も 0 になる．また，$s = a/f$ と書けることは局所的条件だから，$\widetilde{A}$ は層である．

注意　あとで示すように，$\widetilde{A}(U)$ を U に含まれる任意の基 $D(f)$ において a/f^n の形に書ける，という強い条件で定義しても同値である．

注意　もし A が整域なら任意の局所化は商体 $Q(A)$ の部分環だから，切断は $Q(A)$ への写像として構成できて議論が易しくなる．

命題 7.1.1　$P \in \operatorname{Spec} A,\ f \in A$ とする．次の自然な環同型がある．
1. $(\widetilde{A})_P = A_P$（左辺は層の茎，右辺は環の局所化）．
2. $\widetilde{A}(D(f)) = A_f$，特に $\widetilde{A}(\operatorname{Spec} A) = A$.

証明　1.　写像 $\varphi : A_P \to (\widetilde{A})_P$ を次のように定める．A_P の任意の元 a/f $(f \in A \setminus P,\ a \in A)$ に対し，$D(f) \ni Q \mapsto a/f \in A_Q$ により $\widetilde{A}(D(f))$ の

第 8 章

連接層

大域切断の次元の有限性で重要な連接層の概念は，多変数正則関数に対する岡潔の研究に始まり，岡の定理をカルタン (Cartan) は層の言葉で「複素多様体の構造層は連接である」と述べ直した．カルタンはさらに，閉部分多様体のイデアル層が連接であることを示した．セール (Serre) は連接層とそのコホモロジーに関する基本的性質を示した．グラウエルト (Grauert) は複素多様体の射による連接層の順像層・高次順像層（後述）が，射が固有ならば再び連接になることを示した．

非特異代数多様体の微分形式の加群や，射影空間の上の同次座標に関する斉次 d 次式のなす加群の層 $\mathscr{O}(d)$，一般に，因子 D に付随する可逆層 $\mathscr{O}(D)$，ベクトル束の対応物としての局所自由層といったものがよく使われる．

8.1　加群の局所化

定義　S を環 A の積閉集合，M を A 加群とするとき，環の局所化と同様に，M の S による**局所化**を

$$S^{-1}M := \{(s,m) \mid s \in S,\ m \in M\}/\sim$$

と定める．ただし，$(s,m) \sim (s',m')$ とは，ある $t \in S$ が存在して $t(sm'-s'm) = 0$ となることとする．(s,m) の同値類を $\frac{m}{s}$ と書く．

注意　$S^{-1}M$ は自然に $S^{-1}A$ 加群になる：$(a/s)(m/t) := (am)/(st)$．well-defined であることは $S^{-1}A$ での積と同様に示される．

A 準同型 $f : M \to N$ に対し，$S^{-1}A$ 準同型 $S^{-1}f : S^{-1}M \to S^{-1}N$ が，$m/s \mapsto f(m)/s$ により定まる．実際，$t(sm' - s'm) = 0$ のとき $t(sf(m') - s'f(m)) = 0$ であるから well-defined である．$S^{-1}A$ 線形であることは明らか．

命題 8.1.1 (局所化の完全性)　1.　$S^{-1}\,\mathrm{id}_M = \mathrm{id}_{S^{-1}M}$, $S^{-1}(g \circ f) = S^{-1}g \circ$

第 9 章

概型の射

概型への射 $f : X \to S$ は，底空間 S をパラメータ空間としてファイバーの族が並んでいる．代数多様体で基礎体 k を考えることは，概型では $\operatorname{Spec} k$ への射を与えることに対応する．概型 X の性質を，ある概型 S への射の性質と考える相対化は，理論の一般化を容易にする．

この章では，ファイバー積の存在を示した後，コンパクト多様体に対応する固有射，多様体の変形族に対応する平坦射などを定義する．

9.1　概型のファイバー積

定義　ここでは概型 S を固定して考える．概型 X に，S への射 $f : X \to S$ を伴って考えたもの (X, f) を $\boldsymbol{S}$ **概型** (S-scheme) と呼ぶ．$S = \operatorname{Spec} A$ のとき A 概型ともいう．f が明らかなときは X を S 概型ともいい，f を X の**構造射** (structure morphism) と呼ぶ．また，f が S 概型であるという言い方もする．

S 概型 (X, f) から (Y, g) への**射**とは，概型の射 $h : X \to Y$ で，$g \circ h = f$ を満たすものをいう．

S 概型の全体は圏をなし，(Sch/S) で表す．

注意　任意の概型 X は $\boldsymbol{Z}$ 概型と思える．また，$A = \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ とすると，定理 7.4.2 より標準的に（A の恒等写像に対応して）X は A 概型でもある．

例　k を体とし，環の埋め込み $k[x] \to k[x, y]$, $k[y] \to k[x, y]$ に付随する射

$$\begin{tikzcd} & \boldsymbol{A}_k^2 \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_2"] & \\ \boldsymbol{A}_k^1 & & \boldsymbol{A}_k^1 \end{tikzcd}$$

を考える．$k[x, y]$ の素イデアル（すなわち $\boldsymbol{A}_k^2$ の点）(0) および $P = (xy - 1)$ の pr_i $(i = 1, 2)$ における像（すなわち $\bullet \cap k[x]$ および $\bullet \cap k[y]$）はいずれも

第 10 章
代数多様体

古典的な代数多様体は，基礎体 k を固定するとき，k^n の代数的集合（多項式系の零点集合）を多項式写像で貼り合わせてできる空間である．古典的な定式化がヴェイユ (Weil) らによりなされたが，ここでは概型として扱う．

この章では，概型理論から代数多様体への橋渡しを行う．また，$\operatorname{Proj} A$ を定義する．

10.1　代数多様体

定義　体 k 上の有限型概型を k 上の**代数的概型** (algebraic scheme) という．さらに整型かつ分離でもあるとき k 上の**代数多様体** (algebraic variety) という．代数多様体は k 上固有なとき**完備** (complete) であるという．

注意　有限型は局所的にあるアフィン空間 $\boldsymbol{A}_k^n$ の閉部分概型となることを表し，分離条件は通常の多様体のハウスドルフ条件に対応する．既約は仮定しないこともある．完備はコンパクト多様体と対応する条件である．

幾何でいう多様体 (manifold) は，いわば，局所的にユークリッド (Euclid) 空間と同相な分離的局所環付き空間であるが，代数多様体の局所構造は一般に特異点を許す．

完備代数多様体は，連接層のコホモロジー群が有限次元 k 線形空間になるなどの扱いやすい性質があり，そのうちで大域的な座標が入ることで特に計算しやすいものに射影代数多様体，すなわち $\operatorname{Spec} k$ への構造射が「射影的」であるものがある．以下でそれを定義しよう．

10.2　射影空間

まずこの節で，再び古典的な代数多様体に触れる．射影空間 $\boldsymbol{P}_k^n$ は，古典的

第 11 章
アーベル圏

加群と群準同型の列

$$V^{\cdot} = (\cdots \to V^{q-1} \xrightarrow{d^{q-1}} V^q \xrightarrow{d^q} V^{q+1} \to \cdots)$$

は，$\forall q\ d^q \circ d^{q-1} = 0$ が成り立つとき（双対鎖）複体であるといい，さらに $\forall q\ \ker d^q = \operatorname{im} d^{q-1}$ が成り立つとき，完全系列というのであった．複体が完全系列とどのくらいずれているかを複体の（q 次）**コホモロジー群** (cohomology group) $H^q(V^\bullet) := \ker d^q / \operatorname{im} d^{q-1}$ で測る．完全系列・コホモロジー群が定義できる圏としてアーベル圏を導入する．もちろんアーベル群の層の圏はアーベル圏である．他の実例として，アーベル群の圏や，ある環 R 上の左 R 加群のなす圏，連接層の圏などがあり，それらを念頭におきつつ進むとよいと思う．

11.1　加法圏

(Ab) で成り立つ圏論的な性質の一部を一般化して述べる．

定義　圏 $\mathscr{C}$ が**加法圏** (additive category) であるとは，

(A1)　$\mathrm{Hom}(X, Y)$ がアーベル群，

(A2)　上の演算を加法，射の合成を乗法として両側の分配法則を満たす，

(A3)　零対象が存在する，

(A4)　二つの対象の直積（または直和）が存在する，

を満たすことをいう．

対応する関手として次の概念がある．

定義　F を加法圏の間の関手とする．

$$F : \mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(F(X), F(Y))$$

がアーベル群の準同型になるとき，F を**加法的関手** (additive functor) という．

第 12 章
層係数コホモロジー

局所的に定まった関数が大域的に延びるかを判定する層係数コホモロジーは，不変量として極めて有用である．

この章からは層はアーベル群に値をとる層に制限して考えて，層のコホモロジー理論を展開しよう．位相空間 X 上のアーベル群の層 $\mathscr{F}$ に対して，p 次コホモロジー群 $H^p(X,\mathscr{F})$ というアーベル群を対応させる．準同型 $\mathscr{F} \to \mathscr{G}$ に対しては準同型 $H^p(X,\mathscr{F}) \to H^p(X,\mathscr{G})$ が対応するので，対応は関手として与えられる．

コホモロジー群，ひいては導来関手が存在することを示すために，入射分解という強い性質をもつ完全系列の存在を用いる．コホモロジー群を実際に計算するときは，まず基本的なものを入射分解よりは弱い非輪状分解やチェック (Čech) コホモロジーを用いて求めておいて，さらに種々の完全系列・スペクトル系列や定理（指数定理・消滅定理・双対定理など）を組み合わせるのが普通である．

12.1　右導来関手

定義

まずコホモロジーの定義を説明なしで述べておく．X 上の加群の層 $\mathscr{F}$ に対してその大域切断の加群 $\Gamma(X,\mathscr{F})$ を与える関手 $\Gamma(X,\bullet)$ は，左完全であるが右完全でないので自明でない右導来関手 $R^p\Gamma(X,\bullet)$ が存在する．$H^p(X,\mathscr{F}) = R^p\Gamma(X,\mathscr{F})$ によってコホモロジー群を定める．

以下，$\mathscr{C}$ を X 上のアーベル群の層の圏，$\mathscr{C}' =$(Ab)，F を大域切断をとる関手 $\Gamma(X,\bullet)$ であると想像しながら進もう．

$\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ をアーベル圏として，$\mathscr{C}$ には入射的対象が十分あるとする．左完全関手 $F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ に対し，その p 次**右導来関手** (right derived functor) $R^pF : \mathscr{C} \to \mathscr{C}'$ を次のように定める．

$\mathscr{C}$ の任意の対象 A に対し，ある入射分解

第 13 章
スペクトル系列

コホモロジー群の比較をするときに使う道具として有用なスペクトル系列について，具体的な例を念頭に置きながら，重要な部分を解説する．

13.1　可微分多様体のコホモロジー

この節では，念頭におくべき典型的な例を可微分多様体の知識を仮定して記述する．詳細は例えば [24] を見よ．

特異点のない複素多様体は，下部構造として可微分多様体とも思える．(以下，パラコンパクトな）可微分多様体 X の（実係数）コホモロジー群には，前の章で定義した層係数コホモロジーによるもの以外にもさまざまな定義方法がある．

ド・ラムコホモロジー

可微分多様体では微分形式から $\boldsymbol{R}$ 係数コホモロジーが定まる．

定義　可微分多様体 X 上の C^∞ 級 p 形式の層 $\mathscr{A}^p$ と外微分 d からなる複体

$$\mathscr{A}^\bullet(X) : 0 \to \mathscr{A}^0(X) \xrightarrow{d} \mathscr{A}^1(X) \xrightarrow{d} \mathscr{A}^2(X) \to \cdots$$

を X の**ド・ラム複体** (de Rham complex) といい，その p 次コホモロジー群 $H^p_{\mathrm{DR}}(X)$ を X の p 次**ド・ラムコホモロジー群** (de Rham cohomology group) という．

ポアンカレ (Poincaré) の補題により，X がユークリッド (Euclid) 空間 $\boldsymbol{R}^n$（とホモトピー同値）のときは，$H^0_{\mathrm{DR}}(X) = \boldsymbol{R}$, $H^p_{\mathrm{DR}}(X) = 0$ $(p > 0)$ である．

特異コホモロジー

一般の位相空間に対して特異（コ）ホモロジー群が定義できる．

ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^{p+1}$ の部分空間

付録 A
基礎的概念

読者の便宜のため，いくつかの基礎的概念について定義を与えておく．詳しくは，他の文献を見られたい．

A.1 集合

素朴には集合はものの集まりであり，厳密にはいくつかの集合の公理を満たすものとして定義される．

X を集合とすると，任意の x に対し，$x \in X$ または $x \notin X$ のいずれか一方が成り立つ．$x \in X$ のとき，x は X の**要素・元** (element) である，x は X に**属する** (belongs to) という．二つの集合が等しいとは要素がすべて等しいことをいう．

集合を，要素（と条件）を並べて，$X = \{$ 要素 $|$ 条件 $\}$ の形に表すことがある．

要素が一つもない集合 $\varnothing = \{\ \}$ を**空集合** (empty set) という．

集合 X, Y に対し，要素の対の集まり $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\}$ も集合であり，X と Y の**直積** (direct product) 集合という．

部分集合

集合 Y が X の**部分集合** (subset) であるとは，$x \in Y$ ならば $x \in X$ を満たすことをいう．$Y \subset X$ と書く．$X \supset Y$, $Y \subseteq X$, $Y \subseteqq X$ 等も同じ意味に用いる．$Y \subset X$ かつ $Y \neq X$ のとき Y は X の**真部分集合** (proper subset) であるといい，$Y \subsetneq X$ で表す．X 自身と $\varnothing$ は X の自明な (trivial) 部分集合であるといわれる．X の部分集合を全部集めた集合を X の**べき集合** (power set) といい，2^X などと書く．

集合 X の部分集合 U, V に対し，**和集合** (union) $U \cup V := \{x \in X\ |x \in U$ または $x \in V\}$，**共通部分** (intersection) $U \cap V := \{x \in X\ |x \in U$ かつ $x \in$

参考文献

[1] A. Grothendieck, Sur quelques points d'algèbre homologique, Tôhoku Math. J. **9** (1957), 119–221.

[2] R. Godement, Topologie algébrique et théorie de faisceaux, Herman, Paris, 1958.

[3] A. Grothendieck, Éléments de Géométrie Algébrique (EGA), I.H.E.S. Publ. Math. **4**, **8**, **11**, **17**, **24**, **28**, **32**, 1960–1967.

[4] A. Grothendieck et al., Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie (SGA).

[5] N. Bourbaki, Algèbre Commutative, Masson, 1961–1998.

[6] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald, Introduction to Commutative Algebra, Addison-Wesley, 1969; 邦訳：アティヤ-マクドナルド可換代数入門（新妻弘訳）, 共立出版，2006.

[7] 中野茂男，代数幾何学入門，共立出版，1969（復刊 1999）.

[8] D. Mumford, The Red Book of Varieties and Schemes, Second, Expanded Edition, SLNM **1358**, Springer-Verlag, 1999；邦訳：代数幾何学講義（前田博信訳）, シュプリンガーフェアラーク東京，2006.

[9] 廣中平祐 [講義]，森重文 [記録]，代数幾何学，京都大学学術出版会，2004.（講義は 1971–72）

[10] 永田雅宜，可換環論，紀伊國屋数学叢書 **1**，紀伊國屋書店，1974.

[11] 飯高茂，代数幾何学 I, II, III，基礎数学，岩波書店，1977；英訳：Algebraic Geometry, GTM **76**, Springer-Verlag, 1982.

[12] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, Graduate Texts in Mathematics **52**, Springer-Verlag, 1977; 邦訳：代数幾何学，1，2，3（高橋宣能・松下大介訳）, シュプリンガーフェアラーク東京，2005.

[13] 松村英之，可換環論，共立出版，1980；英訳：Commutative ring theory (translated by M. Reid), Cambridge studies in advanced mathematics **8**, Cambridge University Press, 1986, 1989 (corrected version).

[14] I. R. Shafarevich, Basic Algebraic Geometry 1, 2, Second Edition (translated by M. Reid), Springer-Verlag, 1994, 1996; 原著：Osnovy algebraicheskoj geometrii, tom 1, 2, Nauka, 1988.

[15] 宮西正宜，代数幾何学，数学選書 **10**，裳華房，1990.

[16] M. Reid, Undergraduate Algebraic Geometry, London Mathematical Society Student Texts **12**, Cambridge University Press, 1988, 1990 (corrected version); 邦訳：初等代数幾何講義（若林功訳）, 岩波書店，1991.

[17] D. Eisenbud and J. Harris, Schemes: The Language of Modern Algebraic Geometry, Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, 1992.

[18] M. Reid, Undergraduate Commutative Algebra, London Mathematical Society Student

Texts **29**, Cambridge University Press, 1995; 邦訳：可換環論入門（伊藤由佳理訳），岩波書店，2000.

[19] 上野健爾，代数幾何 1，2，3，現代数学の基礎 **21**, **22**, **23**，岩波書店，1997; 英訳：Algebraic Geometry 1: From Algebraic Varieties to Schemes, Algebraic Geometry 2: Sheaves and Cohomology, Algebraic Geometry 3: Further Study of Schemes, Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, 1999, 2001, 2003.

[20] 桂利行，代数幾何入門，共立講座 21 世紀の数学 **17**，共立出版，1998.

[21] 石田正典，代数幾何学の基礎，培風館，2000.

[22] 日本数学会編，数学辞典，第 4 版，岩波書店，2007.

[23] G. Fischer, Complex Analytic Geometry, Lecture Notes in Math. **538**, Springer-Verlag, 1976.

[24] Rahul Bott and Loring W. Tu, Differential Forms in Algebraic Topology, Graduate Texts in Mathematics **82**, Springer-Verlag, 1982; 邦訳：微分形式と代数トポロジー（三村護訳），シュプリンガー・フェアラーク東京，1996.

[25] S. I. Gelfand and Yu. I. Manin, Methods of Homological Algebra, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, 1996, 2003.

[26] Michael Spivak, Comprehensive Introduction to Differential Geometry, 3rd. ed., Publish or Perish, Inc., 1999.

[27] Masaki Kashiwara and Pierre Shapira, Categories and Sheaves, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol. **332**, Springer-Verlag, 2005.

索　引

サ

タ

ナ

ハ

著 者 略 歴

小林 正典
こ ばやし　まさ のり

1991 年　東京大学大学院理学系研究科博士課程中退
現　在　首都大学東京 大学院理工学研究科数理情報科学専攻准教授
　　　　博士（数理科学）
　　　　専門　代数幾何学，ミラー対称性・学習理論など代数幾何学に関わる数理科学

主要著書

線形代数と正多面体，現代基礎数学 4（朝倉書店，2012）
線形代数 講義と演習 改訂版（寺尾宏明氏と共著，培風館，2014）

臨時別冊・数理科学 **SGC** ライブラリ- **64**
『代数幾何入門講義』（電子版）

著　者　小林 正典

2016 年 5 月 25 日　初版発行　ISBN 978–4–7819–9911–1
この電子書籍は 2008 年 6 月 25 日初版発行の同タイトルを底本としています.

数 理 科 学 編 集 部　　　発行人　森 平 敏 孝

TEL.(03)5474–8816
FAX.(03)5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp まで.

発行所　©　株式会社　**サイエンス社**　　TEL.(03)5474–8500 (代表)
〒 151–0051　東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25

組版　ビーカム