円の面積をめぐる循環論法からの脱却のために

半径 a の円の面積を S と書く。このとき

$$\begin{aligned} S = \pi a^2 \quad &\Longrightarrow \quad \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \\ &\Longrightarrow \quad (\sin x)' = \cos x \\ &\Longrightarrow \quad \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\ dx = \frac{\pi a^2}{4} \\ &\Longrightarrow \quad S = \pi a^2 \end{aligned}$$

が成り立つことはさまざまな書物で示されているが、これは循環論法であるから、半径 a の円の面積が πa^2 であることを証明したことにはならない。

以下では、高校数学の範囲からの逸脱を可能な限り少なくすることを念頭において得られた方法も含めて、この循環論法から脱却するための方法をいくつか紹介する。

これから述べる方法はいずれも、円 (板) の面積ではなく、円周の長さを理論の基礎として用いる。そこで一般に、§1 で曲線の長さの定義と基本的な性質をまとめることから始める。ここで示された結果のなかでは補題 2 と補題 4 が特に重要である。§2 以降ではそれらの応用について述べる。内容の概略は以下の通りである。

目次

§1. 曲線の長さ

ここでは、曲線の長さを定義して、その基本的な性質をまとめる。

定義 1. $I=[a,b]$ を有界閉区間とする。

(i) 条件 $a=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=b$ を満たす定数 $t_0,\ t_1,\ \cdots,\ t_{n-1},\ t_n \in I$ に対して

$$\Delta=(t_0,t_1,\cdots,t_{n-1},t_n)$$

と書き、これを I の分割という。また

$$|\Delta|=\max\{t_i-t_{i-1}\mid 1\leqq i\leqq n\}$$

を分割 Δ の細かさと呼ぶ。

(ii) 関数 $\mathbf{f}:I\to\mathbb{R}^m$ と I の分割 $\Delta=(t_0,t_1,\cdots,t_{n-1},t_n)$ に対して

$$\ell(\mathbf{f},\Delta)=\sum_{i=1}^{n}\|\mathbf{f}(t_i)-\mathbf{f}(t_{i-1})\|$$

とおく。このとき、集合

$$\{\ell(\mathbf{f},\Delta)\mid \Delta \text{ は } I \text{ の分割 }\}$$

が上に有界であれば、関数 $\mathbf{f}$ は有界変動であるといわれ

$$\ell(\mathbf{f})=\sup\{\ell(\mathbf{f},\Delta)\mid \Delta \text{ は } I \text{ の分割 }\}$$

は $\mathbf{f}$ の全変動と呼ばれる。

(iii) 関数 $\mathbf{f}:I\to\mathbb{R}^m$ が連続かつ有界変動であれば、全変動 $\ell(\mathbf{f})$ を $\mathbf{f}$ の長さという。

注意. (i) 関数 $\mathbf{f}$ の定義域 $I=[a,b]$ を明示したい場合は

$$\ell(\mathbf{f})=\ell(I\ ;\ \mathbf{f})=\ell(b,a\ ;\ \mathbf{f})$$

などと表す。

(ii) 有界変動な関数は、曲線の長さと関連して、ジョルダンが導入した概念である。

例 1. 連続かつ有界変動である任意の関数 $\mathbf{f}:[a,b]\to\mathbb{R}^m$ に対して

$$\|\mathbf{f}(b)-\mathbf{f}(a)\|\ \leqq\ \ell(\mathbf{f})$$

が成り立つ。

補題 1. 関数 $\mathbf{f}:I\to\mathbb{R}^m$ を $\mathbf{f}=(f_1,\cdots,f_m)$ と表すとき

$$\mathbf{f} \text{ は有界変動 } \iff f_1,\cdots,f_m \text{ はすべて有界変動}$$

が成り立つ。

例 2. I を有界閉区間とする。

(i) 関数 $f:I\to\mathbb{R}$ が単調であれば有界変動となる。

(ii) 関数 $\mathbf{f}:I\to\mathbb{R}^m$ がリプシッツ条件を満たせば、$\mathbf{f}$ は連続かつ有界変動となる。

(iii) $I,\ m$ を固定する。このとき、有界変動な関数 $\mathbf{f}:I\to\mathbb{R}^m$ の全体は線形空間となる。

補題 2. I を有界閉区間、$\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^m$ を連続な有界変動関数とする。このとき

(i) ${}^\forall\varepsilon > 0,\ {}^\exists\delta > 0$ such that 区間 I の任意の分割 Δ に対して

$$|\Delta| < \delta \implies \ell(\mathbf{f}) - \varepsilon < \ell(\mathbf{f}, \Delta) \leqq \ell(\mathbf{f})$$

が成り立つ。

(ii) 区間 I の分割の列 $\Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3,\ \cdots$ が条件

$$\lim_{n\to+\infty} |\Delta_n| = 0$$

を満たせば

$$\ell(\mathbf{f}) = \lim_{n\to+\infty} \ell(\mathbf{f}, \Delta_n)$$

が成り立つ。

補題 3. $I,\ J$ を有界閉区間、$\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^m,\ \mathbf{g} : J \to \mathbb{R}^m$ を連続な有界変動関数とする。このとき、関数 $\mathbf{f},\ \mathbf{g}$ がどちらも単射であれば

$$\mathbf{f}(I) = \mathbf{g}(J) \implies \ell(\mathbf{f}) = \ell(\mathbf{g})$$

が成り立つ。

注意. 補題 3 は単射かつ連続な有界変動関数によりパラメータ表示される $\mathbb{R}^m$ の部分集合の長さが定義されることを示している。

補題 4. I を開区間、$\mathbf{f} : I \to \mathbb{R}^m$ を C^1 級関数とする。このとき、任意の定数 $a,\ b \in I\ (a < b)$ に対して

(i) 関数 $\mathbf{f}$ は区間 $[a, b]$ で有界変動となる。

(ii) 長さ $\ell(b, a\ ;\ \mathbf{f})$ を定積分で表すことができる。即ち

$$\ell(b, a\ ;\ \mathbf{f}) = \int_a^b \|\mathbf{f}'(t)\|\, dt$$

が成り立つ。

注意. (i) 高校数学では補題 2, (ii) を曲線の長さの定義と考えてもよい。

(ii) 補題 4, (ii) で示された等式を曲線の長さの積分表示の公式という。定積分の場合の定義にあわせて、定数 $a,\ b \in I$ に対して

$$\ell(a, a\ ;\ \mathbf{f}) = 0, \quad \ell(a, b\ ;\ \mathbf{f}) = -\ell(b, a\ ;\ \mathbf{f})$$

と定めれば、$a,\ b$ の大小にかかわりなく $\ell(b, a\ ;\ \mathbf{f})$ を定義することができて、補題 4, (ii) が成り立つ。このとき $\ell(b, a\ ;\ \mathbf{f})$ を曲線の符号つき長さという。即ち、補題 4, (ii) は曲線の符号つき長さの積分表示となる。

(iii) 補題 4, (ii) で $m = 2$ として

$$\mathbf{f} = (f, g), \quad x = f(t), \quad y = g(t), \quad L = \ell(b, a\ ;\ \mathbf{f})$$

と書けば、高校数学⊠で学ぶ公式

$$L = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\ dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ dt$$

が得られる。

以上の準備のもと、循環論法からの脱却方法をいくつか紹介する。

§2. 曲線の長さの基本的な性質を用いる方法

ここでは、曲線の長さを表す公式としては最も基本的な補題 2, (ii) を用いる方法について述べる。

補題 5. 弧度法により表された任意の角 $\theta \in \mathbb{R}$ に対して

$$|\sin\theta| \leqq |\theta|$$

が成り立つ。

証明. 単位円周上に 2 点 $A = (\cos\theta, \sin\theta)$, $B = (\cos\theta, -\sin\theta)$ をとる。このとき、弦 $AB = 2|\sin\theta|$, 弧 $AB = 2|\theta|$ となることに注意すれば、例 1 より $|\sin\theta| \leqq |\theta|$ が解る。 □

系. (i) 任意の角 $\theta \in \mathbb{R}$ に対して

$$1 - \frac{\theta^2}{2} \leqq \cos\theta \leqq 1$$

が成り立つ。従って

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\cos\theta - 1}{\theta} = 0$$

となることも解る。

(ii) 任意の角 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$|\sin\alpha - \sin\beta| \leqq |\alpha - \beta|, \quad |\cos\alpha - \cos\beta| \leqq |\alpha - \beta|$$

が成り立つ。

(iii) 関数 $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ はどちらも連続かつ有界変動である。

定理 1. 弧度法により表された任意の角 $\theta \in \mathbb{R}$ に対して

$$\theta = \lim_{n\to+\infty} 2^n \sin\frac{\theta}{2^n}$$

が成り立つ。

証明. $\theta = 0$ のときは明らかに成り立つ。また sin は奇関数であるから $\theta > 0$ と仮定してよい。

⊠ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ のとき： 関数

$$\Psi : \begin{array}{ccc} [0,\theta] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \cup & & \cup \\ t & \longmapsto & (\cos t,\ \sin t) \end{array}$$

は単射、連続かつ有界変動となり、円弧のパラメータ表示を与える。従って、区間 $[0,\theta]$ を 2^n 等分して得られる分割を Δ_n と表せば

$$\ell(\Psi, \Delta_n) = 2^{n+1} \sin\frac{\theta}{2^{n+1}}$$

となるから、弧度法による角の定義と補題 2, (ii), 補題 3 より

$$\theta = \ell(\Psi) = \lim_{n\to+\infty} \ell(\Psi, \Delta_n) = \lim_{n\to+\infty} 2^n \sin\frac{\theta}{2^n}$$

であることが解る。

⊠ 一般の場合： 十分大きな自然数 n_0 に対して $0 < \frac{\theta}{2^{n_0}} < \frac{\pi}{2}$ となることに注意すればよい。 □

系． 定理 1 より順次、以下の結果を導くことができる。

(1) $0 < \theta < \frac{\pi}{2} \implies \sin\theta < \theta < \tan\theta$

(2) $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2},\ \theta \neq 0 \implies \cos\theta < \dfrac{\sin\theta}{\theta} < 1$

(3) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$

(4) $(\sin x)' = \cos x \quad (x \in \mathbb{R})$

(5) $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{\pi a^2}{4} \quad (a > 0)$

(6) 半径 a の円の面積を S と書けば、$S = \pi a^2$ となる

証明. 定理 1 ⇒ (1)： 段階をふんで示す。

Step 1. $\theta = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2^n \tan\frac{\theta}{2^n}$ が成り立つ： $\sin\frac{\theta}{2^n} = \tan\frac{\theta}{2^n}\cos\frac{\theta}{2^n}$ より

$$\lim_{n\to+\infty} 2^n \sin\frac{\theta}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} 2^n \tan\frac{\theta}{2^n} \cdot \lim_{n\to+\infty} \cos\frac{\theta}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} 2^n \tan\frac{\theta}{2^n}$$

となるから、定理 1 より

$$\theta = \lim_{n\to+\infty} 2^n \sin\frac{\theta}{2^n} = \lim_{n\to+\infty} 2^n \tan\frac{\theta}{2^n}$$

が解る。

Step 2. 任意の角 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ に対して

$$\sin\theta < 2\sin\frac{\theta}{2}, \qquad \sin\theta < \tan\theta, \qquad 2\tan\frac{\theta}{2} < \tan\theta$$

が成り立つ：三角関数の基本的な性質より容易に導かれる。

Step 3. 任意の角 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ に対して、数列 $(a_n)_{n=0}^{+\infty}$, $(b_n)_{n=0}^{+\infty}$ を

$$a_n = 2^n \sin\frac{\theta}{2^n}, \quad b_n = 2^n \tan\frac{\theta}{2^n} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

とおくことにより定めれば、任意の自然数 n に対して

$$a_{n-1} < a_n < b_n < b_{n-1}$$

が成り立つ： Step 2 より解る。

Step 4. (1) の証明： Step 3 で $a_0 = \sin\theta$, $b_0 = \tan\theta$ であることに注意すれば、定理 1 と Step 1 より $\sin\theta < \theta < \tan\theta$ が解る。

(1) ⇒ (2)： $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ としてよい。このとき、$\sin\theta < \theta$ より $\frac{\sin\theta}{\theta} < 1$ が導かれ、$\theta < \tan\theta$ より $\cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta}$ が導かれる。

(2) ⇒ (3)： $\displaystyle\lim_{h\to 0} \cos h = \cos 0 = 1$ より明らか。

(3) ⇒ (4)： 加法定理と補題 5 の系 (i) より

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x\cos h + \cos x\sin h - \sin x}{h}$$
$$= \sin x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = \cos x$$

となるから、関数 sin は微分可能で $(\sin x)' = \cos x$ となることが解る。

(4) ⇒ (5)： 変数を $x = a\sin\theta$ と変換すれば

$$\theta = 0 \implies x = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2} \implies x = a$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos\theta, \quad \frac{dx}{d\theta} = a\cos\theta$$

となる。従って、置換積分して 2 倍角の公式を用いれば

$$\begin{aligned}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta)\, d\theta \\ &= \frac{a^2}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}\end{aligned}$$

となる。

(5) ⇒ (6)： $S = 4\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ より解る。 □

注意. (i) もちろん (6) ⇒ (1) も成り立つ。また (3) ⇒ 定理 1 も成り立つ。従って、定理 1, (1) ∼ (6) はすべて同値となる。多くの教科書では (6) ⇒ (1) を証明するだけなので、即ち定理 1 にあたる結果がないために、循環論法から脱却することができないのである。

(ii) 定理 1 の系の証明の Step 1 で示した等式

(0) $\quad \theta = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2^n \tan\frac{\theta}{2^n}$

から定理 1 を導くことができる。従って (0) も定理 1, (1) ∼ (6) と同値である。

(iii) (1), (2) の結論部分を等号つきの不等式におきかえても定理 1, (0), (1) ∼ (6) と同値になる。

(iv) $0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\theta \leqq \theta$ は補題 5 からも導くことができる。従って

(1′) $\quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \implies \theta \leqq \tan\theta$

も定理 1, (0), (1) ∼ (6) と同値である。

(v) 定理 1 において、$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ であれば

$$\theta = \sup\left\{2^n \sin\frac{\theta}{2^n} \;\middle|\; n = 0, 1, 2, \cdots\right\} = \inf\left\{2^n \tan\frac{\theta}{2^n} \;\middle|\; n = 0, 1, 2, \cdots\right\}$$

となることも解る。

(vi) 定理 1 より直接 (6) を導くこともできる。問題 6 を参照のこと。

§3. 曲線の長さの積分表示の公式を用いる方法

ここでは、曲線の長さを表す公式としては最も扱いやすい補題 4, (ii) を用いる方法について述べる。その際、定理 1 の証明で用いた関数 Ψ は使えないということに注意しなくてはならない。そこで、単位円の有理関数によるパラメータ表示 Φ を導入する。

補題 6. 座標平面上の単位円 C から点 $(-1,0)$ を取り除いた曲線を C_0 とする。このとき

(i) 曲線 C_0 上の点 (a,b) と $(-1,0)$ を結ぶ直線が y 軸と交わる点を $(0,c)$ とすれば

$$c = \frac{b}{1+a}$$

となる。

(ii) y 軸上の点 $(0,c)$ と $(-1,0)$ を結ぶ直線が曲線 C_0 と交わる点を (a,b) とすれば

$$a = \frac{1-c^2}{1+c^2}, \quad b = \frac{2c}{1+c^2}$$

となる。

(iii) 曲線 C_0 と y 軸とは上記の対応

$$(a,b) \longleftrightarrow (0,c)$$

により一対一に対応する。さらに、ベクトル $(1,0)$, (a,b) のなす符号つき角を $\alpha \in (-\pi,\pi)$ とすれば

$$a = \cos\alpha, \quad b = \sin\alpha, \quad c = \tan\frac{\alpha}{2}$$

と表すこともできる。

注意. (i) ベクトルのなす角 θ は通常 $0 \leqq \theta \leqq \pi$ であると仮定するので、ここでは α を符号つき角と呼び区別する。§1 で曲線の符号つき長さが定義されたので、符号つき角を考えることは自然な流れである。これは一般角のひとつ前の概念である。

(ii) ベクトル $(1,0)$, (a,b) のなす符号つき角 α は複素数 $a+ib$ の偏角でもある。

系. 関数

$$\Phi \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \cup & & \cup \\ t & \longmapsto & \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \end{array}$$

は曲線 C_0 のパラメータ表示となる。従って

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{2t}{1+t^2} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

とおけば、補題 6, (iii) の角 α は

$$\alpha = \int_0^c \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^c \frac{2}{1+t^2}\, dt$$

と表される。

証明. 関数 Φ が曲線 C_0 のパラメータ表示となることは補題 6, (ii), (iii) より解る。また

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$$

となることより

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \frac{2}{1+t^2}$$

も解る。従って、弧度法による角の定義と曲線の長さの積分表示の公式より

$$\alpha = \int_0^c \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_0^c \frac{2}{1+t^2}\, dt$$

と表されることが解る。 □

注意. 補題 6 の系で示された等式を角の積分表示の公式という。即ち、曲線の符号つき長さの積分表示の公式と単位円の有理関数によるパラメータ表示から符号つき角の積分表示の公式が導かれる。

例 3. 角の積分表示の公式より

$$\frac{\pi}{4} = \int_{-\infty}^{-1} \frac{dt}{1+t^2} = \int_{-1}^{0} \frac{dt}{1+t^2} = \int_{0}^{1} \frac{dt}{1+t^2} = \int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\frac{\pi}{2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dt}{1+t^2} = \int_{-1}^{1} \frac{dt}{1+t^2} = \int_{0}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}, \quad \pi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$$

などが示される。これらはすべて円周率 π の積分表示である。

定理 2. 角の積分表示の公式より順次、以下の結果を導くことができる。

(7) $$\tan^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

(8) $$(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

(9) $$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x \quad \left(x \in \mathbb{R} - (\mathbb{Z} + \tfrac{1}{2})\pi\right)$$

(10) $$\lim_{h \to 0} \frac{\tan h}{h} = 1$$

(3) $$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

注意. (i) 定理 1, (0), (1) $\sim$ (10) はすべて同値となる。

(ii) 以上により、順番こそ大きく変わったが、これまでに述べてきた三角関数と逆三角関数の微分積分に関連する結果がすべて角の積分表示の公式より導かれることが解った。定理 2 には逆三角関数が登場するので高校数学の範囲内とはいえないという指摘もあろうが、(7), (8) をとばして (9) を直接証明することもできるから、この指摘は本質的ではない。

角の積分表示の公式より直接次のふたつの定理を証明することもできる。

定理 3. 弧度法により表された任意の角 θ に対して

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \implies \sin\theta < \theta < \tan\theta$$

が成り立つ。即ち、角の積分表示の公式より (1) を導くことができる。

証明. ふたつに分けて示す。

$\boxtimes$ $\alpha = \theta$ とおき、補題 6, (iii) の定数 a, b, c をとれば、$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ より $c > 0$ となるから、角の積分表示の公式より

$$\theta = \alpha = \int_0^c \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ dt\ > \int_0^c \frac{dy}{dt}\ dt$$

$$= \int_0^b dy = [y]_0^b = b = \sin\alpha = \sin\theta$$

となる。即ち

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \implies \sin\theta < \theta$$

が示された。

$\boxtimes$ $\alpha = 2\theta$ とおき、補題 6, (iii) の定数 a, b, c をとれば、$0 < \alpha < \pi$ より $c > 0$ となるから、角の積分表示の公式より

$$\theta = \frac{\alpha}{2} = \int_0^c \frac{1}{1+t^2}\ dt\ < \int_0^c dt = [t]_0^c = c = \tan\frac{\alpha}{2} = \tan\theta$$

となる。即ち

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \implies \theta < \tan\theta$$

が示された。 □

定理 4. 正の定数 a に対して

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\ dx = \frac{\pi a^2}{4}$$

が成り立つ。即ち、角の積分表示の公式より (5) を導くことができる。

証明. $t = \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ とおけば $x = a\frac{1-t^2}{1+t^2}$ となるから

$$t = 1 \implies x = 0, \quad t = 0 \implies x = a$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\frac{2t}{1+t^2}, \quad \frac{dx}{dt} = a\frac{-4t}{(1+t^2)^2}$$

となる。従って、変数を x から t に変換して積分すれば

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\ dx = 8a^2 \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^3}\ dt$$

となる。さらに、部分積分を 2 回すれば

$$8a^2 \int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^3}\ dt = \frac{a^2}{2} \int_0^1 \frac{2}{1+t^2}\ dt$$

となる。右辺の定積分の値が $\frac{\pi}{2}$ となることは例 3 で示されているから

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\ dx = \frac{a^2}{2} \int_0^1 \frac{2}{1+t^2}\ dt = \frac{\pi a^2}{4}$$

が解る。 □

§4. 角と三角関数の定義と性質

ここでは、これまでの結果を用いて、弧度法による角と三角関数を厳密に定義し、基本的な性質をまとめる。微分積分学の一般論と有理関数の微積分までを既知とする。

補題 6 の系より、双有理変換

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & C \\ \cup & & \cup \\ t & \longmapsto & \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \end{array} \qquad \Phi^{-1} : \begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \cup & & \cup \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{y}{1+x} \end{array}$$

が定まり、直線 $\mathbb{R}$ と曲線 C_0 の間の位相同形となることが解る。さらに、点 $(x,y) \in C_0$ に対して

$$\Phi^{-1}(x,y) = \operatorname{sgn}(y)\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{y}{1+\operatorname{sgn}(x)\sqrt{(1+y)(1-y)}}$$

と表すこともできる。ここで $\operatorname{sgn}(x)$ は実数 x の符号を表す。即ち $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & (x > 0) \\ \ \ 0 & (x = 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$$

と定める。また

$$\|\Phi'(t)\| = \frac{2}{1+t^2} \quad (t \in \mathbb{R})$$

が成り立つ。

補題 7. 関数

$$L : \begin{array}{ccc} C_0 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \cup & & \cup \\ (x,y) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{\frac{y}{1+x}} \frac{2}{1+t^2}\, dt \end{array}$$

は次の性質をもつ。

(i) 関数 $L : C_0 \to \mathbb{R}$ は単射、連続かつ有界で、$\pi = \sup L(C_0)$ とおけば $L(C_0) = (-\pi, \pi)$ となる。

(ii) 関数 $L : C_0 \to (-\pi, \pi)$ は位相同形となり、この逆関数 $L^{-1} : (-\pi, \pi) \to C_0$ は $\Psi(-\pi) = \Psi(\pi) = (-1, 0)$ と定めることにより周期 2π をもつ連続関数 $\Psi : \mathbb{R} \to C$ に一意的に拡張される。

注意. (i) 関数 Φ の定義より

$$L(x,y) = \int_{\Phi^{-1}(1,0)}^{\Phi^{-1}(x,y)} \|\Phi'(t)\|\, dt \qquad \big((x,y) \in C_0\big)$$

と書けることも解る。

(ii) 関数 Ψ の定義より、任意の $(x,y) \in C$ に対して

$$\Psi^{-1}(x,y) = \begin{cases} L(x,y) + 2\pi\mathbb{Z} & \big((x,y) \in C_0 \text{ のとき}\big) \\ \pi + 2\pi\mathbb{Z} & \big((x,y) = (-1,0) \text{ のとき}\big) \end{cases}$$

となることも解る。ここで Ψ^{-1} は集合論的逆像を表す。

定義 2.　補題 7 で定められた関数 L に対して

(i)　$\pi = \sup L(C_0)$ を円周率という。

(ii)　点 $(x, y) \in C_0$ に対して、$\theta = L(x, y) \in (-\pi, \pi)$ をベクトル $(1, 0)$, (x, y) のなす符号つき角を弧度法により表した値という。

(iii)　関数 $\Psi : \mathbb{R} \to C$ に対して

$$\Psi(\theta) = (\cos\theta,\ \sin\theta) \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

とおくことにより定まる連続関数 cos, sin : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と

$$\tan = \frac{\sin}{\cos}\ :\ \mathbb{R} - \Big(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\Big)\pi\ \longrightarrow\ \mathbb{R}$$

を三角関数と呼ぶ。

注意. (i)　弧度法による角を定義する前に、まず円周率を定義した。

(ii)　定義 2, (ii) の段階ではまだ角 θ は一般角ではない。

(iii)　定義 2, (iii) の角 θ は一般角である。即ち、関数 L^{-1} を関数 Ψ に拡張することにより、一般角と三角関数 cos, sin, tan が定義される。ここで

$$\cos\theta = 0 \iff \theta \in \Big(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\Big)\pi$$

が成り立つことに注意する。

補題 8.　三角関数 cos, sin : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して

(i)　$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \ \ (\theta \in \mathbb{R})$　が成り立つ。

(ii)　関数 cos, sin : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は周期 2π をもつ。

(iii)　角 $\theta \in \mathbb{R}$ に対して、原点を始点とし $\Psi(\theta) \in C$ を通る半直線上の点 $(x, y) \neq (0, 0)$ を任意にとれば

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

と表される。

(iv)　加法定理が成り立つ。

補題 9.　三角関数 $\tan : \mathbb{R} - (\mathbb{Z} + \frac{1}{2})\pi \to \mathbb{R}$ について考える。

(i)　点 $(x, y) \in C_0$ に対して

$$t = \Phi^{-1}(x, y), \quad \theta = L(x, y)$$

とおけば

$$t = \tan\frac{\theta}{2}$$

が成り立つ。

(ii)　定義域を制限した関数 $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ の逆関数は

$$\tan^{-1}\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ \cup & & \cup \\ t & \longmapsto & \displaystyle\int_0^t \frac{du}{1 + u^2} \end{array}$$

と表される。

(iii) 任意の角 $\theta \in \mathbb{R} - (2\mathbb{Z}+1)\pi$ に対して

$$\Psi(\theta) = \Phi\big(\tan\frac{\theta}{2}\big) \in C_0$$

が成り立つ。また、任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\Phi(t) = \Psi(2\tan^{-1} t) \in C_0$$

も成り立つ。

注意. (i) 補題 7 では、関数 L より前に関数

$$S: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \cup\!\!\!| & & \cup\!\!\!| \\ t & \longmapsto & \displaystyle\int_0^t \frac{2}{1+u^2}\,du \end{array}$$

を定義し、その性質をまとめるという流れも考えられる。実際、次が示される。

☒ $L = S \circ \Phi^{-1},\ S = L \circ \Phi$ と表すことができる。

☒ 関数 S は単調増加、C^∞ 級かつ有界で、$\pi = \sup S(\mathbb{R})$ とおけば $S(\mathbb{R}) = (-\pi, \pi)$ となる。

☒ 関数 $S : \mathbb{R} \to (-\pi, \pi)$ は位相同形であり

$$\theta = S(t) = 2\tan^{-1} t \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と表される。従って、逆関数 $S^{-1} : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ は

$$t = S^{-1}(\theta) = \tan\frac{\theta}{2} \qquad (-\pi < \theta < \pi)$$

と表される。

(ii) 補題 7 と補題 9 は「パラメータ表示 $\Phi : \mathbb{R} \to C_0$ の弧長を用いたパラメータ表示が $\Psi : (-\pi, \pi) \to C_0$ であり、パラメータの変換公式が $t = \tan\frac{\theta}{2}$ である」ことを示している。

(iii) 補題 9, (ii) は定義 2 より (7) を導くことができることを示している。

定理 5. 三角関数 tan, cos, sin に関して次が成り立つ。

(i) 関数 tan は微分可能で

$$(\tan\theta)' = 1 + \tan^2\theta \qquad \Big(\theta \in \mathbb{R} - \big(\mathbb{Z} + \frac{1}{2}\big)\pi\Big)$$

となる。即ち、定義 2 より (9) を導くことができる。

(ii) 関数 cos, sin は微分可能で

$$(\cos\theta)' = -\sin\theta, \quad (\sin\theta)' = \cos\theta \qquad (\theta \in \mathbb{R})$$

となる。即ち、定義 2 より (4) を導くことができる。

§5. 複素関数を用いる方法

ここでは、これまでに定義された関数を複素関数に拡張して得られる結果を用いる方法について述べる。

定理 6. 関数 Φ, Φ^{-1}, L, Ψ を複素関数に拡張した結果から、公式

$$(\cos\theta)' = -\sin\theta, \quad (\sin\theta)' = \cos\theta \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

を導くことができる。即ち、角の積分表示の公式より (4) を導くことができる。

証明. 複素数を導入して $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ と考える。このとき

Step 1. 補題 6 の系で定義された関数 Φ とその逆関数 Φ^{-1} は、$z = t + i0$, $w = x + iy$ とおくことにより、複素関数

$$\Phi(z) = -\frac{z-i}{z+i}, \qquad \Phi^{-1}(w) = -i\frac{w-1}{w+1}$$

に拡張できる。実際、$z = t \in \mathbb{R}$ とすれば

$$\Phi(z) = \Phi(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} + i\frac{2t}{1+t^2} = -\frac{t-i}{t+i} = -\frac{z-i}{z+i}$$

となる。また $w = \Phi(z) = -\frac{z-i}{z+i}$ を z について解けば

$$z = \Phi^{-1}(w) = -i\frac{w-1}{w+1}$$

となる。

Step 2. 実数値関数

$$S(t) = \int_0^t \frac{2}{1+u^2}\,du \quad (t \in \mathbb{R})$$

は複素関数

$$S(z) = -i\log\big(\Phi(z)\big) \quad (z \in U_0)$$

に拡張できる。ここで $U_0 = \mathbb{C} - \{iy \mid y \in \mathbb{R},\ |y| \geqq 1\}$ である。実際、$z = iy$ $(-1 < y < 1)$ とし、変数を u から $v = -iu$ に変換して積分すれば

$$\begin{aligned}
S(z) = S(iy) &= \int_0^{iy} \frac{2}{1+u^2}\,du = \int_0^{y} \frac{2i}{1-v^2}\,dv = -i\int_0^{y} \frac{2}{v^2-1}\,dv \\
&= -i\int_0^{y} \Big(\frac{1}{v-1} - \frac{1}{v+1}\Big)\,dv = -i\,\big[\log|v-1| - \log|v+1|\big]_0^y \\
&= -i\Big[\log\Big|\frac{v-1}{v+1}\Big|\Big]_0^y = -i\log\Big(\frac{1-y}{1+y}\Big) = -i\log\Big(-\frac{iy-i}{iy+i}\Big) \\
&= -i\log\Big(-\frac{z-i}{z+i}\Big) = -i\log\big(\Phi(z)\big)
\end{aligned}$$

となる。

Step 3. 補題 7 で定義された関数 L は複素関数

$$L(w) = -i\log w \quad (w \in R_0)$$

に拡張できる。ここで $R_0 = \mathbb{C} - \{x \mid x \in \mathbb{R},\ x \leqq 0\}$ である。実際、$w \in C_0$ とすれば、Step 2 より

$$L(w) = S\big(\Phi^{-1}(w)\big) = -i\log\big(\Phi(\Phi^{-1}(w))\big) = -i\log w$$

となる。

Step 4. 補題 7, (ii) で定義された関数 Ψ は複素関数

$$\Psi(z) = \exp(iz) \quad (z \in \mathbb{C})$$

に拡張できる。実際、$z \in iD_0$ とし $w = \exp(iz)$ とおけば $z = -i \log w$ となるから、Step 3 より

$$\Psi(z) = \Psi(-i \log w) = L^{-1}(-i \log w) = w = \exp(iz)$$

となる。ここで $D_0 = \{x + iy \mid -\pi < y < \pi\}$ である。

Step 5. 任意の角 $\theta \in \mathbb{R}$ に対して

$$(\cos\theta)' = -\sin\theta, \quad (\sin\theta)' = \cos\theta$$

が成り立つ。実際、Step 4 より

$$\Psi'(z) = i \exp(iz) = i\Psi(z)$$

が解る。従って、$z = \theta \in \mathbb{R}$ と制限すれば、定義 2 より

$$\Psi(\theta) = \cos\theta + i \sin\theta$$

と書けるから、$\Psi'(\theta) = i\Psi(\theta)$ の実部虚部を比較すれば

$$(\cos\theta)' = -\sin\theta, \quad (\sin\theta)' = \cos\theta$$

となることが解る。 $\square$

注意. (i) 定理 6 の証明の本質的な部分はオイラーの公式の導出である。

(ii) 関数 $\Psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$ は群準同形となる。このことを用いて三角関数の加法定理を証明することもできる。

(iii) Step 2 で $S(z) = 2\tan^{-1} z$ であることに注意すれば

$$\tan^{-1} z = -\frac{i}{2} \log\big(\Phi(z)\big) \quad (z \in U_0)$$
$$\log w = 2i \tan^{-1}\big(\Phi^{-1}(w)\big) \quad (w \in R_0)$$

と書けることも解る。

(iv) 複素平面内で図形的にみるならば、補題 6 の対応と補題 6 の系の関数 Φ, Φ^{-1} とは異なることに注意する。定理 6, Step 1 では補題 6 の系の関数 Φ, Φ^{-1} を複素関数に拡張した。もし補題 6 の対応を複素化するのであれば、変数 t は y 軸、即ち虚軸を動くのであったから

$$z = 0 + it, \quad w = x + iy$$

として関数 Φ, Φ^{-1} を複素関数に拡張しなくてはならない。このとき

$$\Phi(z) = -\frac{z+1}{z-1}, \quad \Phi^{-1}(w) = \frac{w-1}{w+1} \quad \big(z, w \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})\big)$$

となる。これに従って

$$S(z) = -i \log\big(\Phi(iz)\big) \quad (z \in U_0)$$

と変わる。関数

$$L(w) = -i \log w \quad (w \in R_0)$$
$$\Psi(z) = \exp(iz) \quad (z \in \mathbb{C})$$

については定理 6 と変わりはない。

§**6**. 演習問題と補足

ここでは、演習問題と補足をまとめておく。

演習問題

問題 1. §3, 補題 6 を証明せよ。

問題 2. 広義積分を定義して、§3, 例 3 を証明せよ。

問題 3. §3, 定理 2 を証明せよ。

問題 4. §3, 定理 4 の証明の行間を埋めよ。

問題 5. §4, 補題 7, 補題 8, 補題 9, 定理 5 を証明せよ。

問題 6. 半径 a の円に内接する正 2^n 角形の面積を $\underline{S}_n$ とし、外接する正 2^n 角形の面積を $\overline{S}_n$ とする $(n \geqq 2)$。このとき、次が成り立つことを示せ。

(1) $\underline{S}_n = 2^{n-1}a^2 \sin \dfrac{\pi}{2^{n-1}}, \quad \overline{S}_n = 2^n a^2 \tan \dfrac{\pi}{2^n}$

(2) $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} \underline{S}_n = \lim_{n\to+\infty} \overline{S}_n = \pi a^2$

(3) 半径 a の円の面積は πa^2 である

問題 7. 公式

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t}\ dt \qquad (x > 0)$$

を対数関数の定義と考えて次を示せ。

(1) $\log(\alpha\beta) = \log\alpha + \log\beta \ \ (\alpha, \beta > 0)$ が成り立つ。

(2) 関数 $\log : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ の逆関数 $\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ が存在して

$$(\exp x)' = \exp x \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$\exp(\alpha + \beta) = \exp\alpha \cdot \exp\beta \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

が成り立つ。

(3) 関数 $\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ に対して

$$e = \exp 1$$

とおけば $2 < e < 3$ かつ

$$e = \lim_{h\to 0} (1 + h)^{\frac{1}{h}}$$

となり

$$x = n\ (n \in \mathbb{N}) \implies \exp x = e^n$$

$$x = -n\ (n \in \mathbb{N}) \implies \exp x = \frac{1}{e^n}$$

$$x = \frac{m}{n}\ (m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}) \implies \exp x = \sqrt[n]{e^m}$$

$$x = \lim_{k\to+\infty} \frac{m_k}{n_k}\ (m_k \in \mathbb{Z}, n_k \in \mathbb{N}) \implies \exp x = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[n_k]{e^{m_k}}$$

が成り立つ。

問題 8. 角 $\alpha \in (-\pi, \pi)$ に対して、§3, 補題 6, (iii) の定数 a, b, c をとる。このとき

(i) $-\frac{\pi}{2} \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$ であれば

$$\alpha = \sin^{-1} b = \int_0^b \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

と書けることを示せ。また、変数を $t = \frac{y}{1+\sqrt{(1+y)(1-y)}}$ に変換して積分すれば

$$\int_0^b \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 2\int_0^c \frac{dt}{1+t^2}$$

となることを具体計算により確かめよ。

(ii) $0 \leqq \alpha < \pi$ であれば

$$\alpha = \cos^{-1} a = \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

と書けることを示せ。また、変数を $t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ に変換して積分すれば

$$\int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\int_0^c \frac{dt}{1+t^2}$$

となることを具体計算により確かめよ。

注意. (i) 関数値 $\sin^{-1}(\pm 1)$, $\cos^{-1} a$ の定義には広義積分が必要である。

(ii) 問題 8, (ii) で $\alpha = \pi$ とすれば、$a = -1$, $c = +\infty$ に対して

$$\alpha = \int_a^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\int_0^c \frac{dt}{1+t^2}$$

が成り立つ。

問題 9. 無理関数の積分により定義された関数

$$f(x) = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \qquad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

$$g(y) = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \qquad (-1 \leqq y \leqq 1)$$

の逆関数としてそれぞれ、関数

$$\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1], \quad \sin : [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$$

を定義する。このとき次を示せ。

(i) 関数 $\cos, \sin$ は微分可能で

$$(\cos\theta)' = -\sqrt{1-\cos^2\theta} \qquad (0 < \theta < \pi)$$

$$(\sin\theta)' = \sqrt{1-\sin^2\theta} \qquad (-\tfrac{\pi}{2} < \theta < \tfrac{\pi}{2})$$

となる。

(ii) $0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ であれば

$$0 \leqq \cos\theta \leqq 1, \quad 0 \leqq \sin\theta \leqq 1, \quad \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

が成り立つ。

(iii) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ であれば

$$(\cos\theta)' = -\sin\theta, \quad (\sin\theta)' = \cos\theta$$

となる。

(iv) 周期 2π をもち、任意の $\theta \in \mathbb{R}$ に対して

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$(\cos\theta)' = -\sin\theta, \quad (\sin\theta)' = \cos\theta$$

が成り立つように、関数 cos, sin の定義域を $\mathbb{R}$ に拡張することができる。

注意. 代数学至上主義の立場から、問題 7 では有理関数の積分を用いて対数関数を定義し、その逆関数として指数関数を定義した。また、§3, 定理 2 では関数

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ \cup & & \cup \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \end{array}$$

の逆関数として正接関数 $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ をとらえて、その性質を調べた。さらに、§4 では有理関数の積分を用いて弧度法による角を定義し、その逆関数として三角関数を定義した。§4 の流れには、関数 $\Psi = (\cos,\ \sin)$ という表示からも解る通り、余弦関数・正弦関数をペアとして扱うという特徴がある。問題 9 では、問題 8 の続きとして、余弦関数、正弦関数を単独で扱う理論展開について述べた。しかし、余弦関数、正弦関数を単独で扱ったため、問題 9, (ii), (iv) の証明が多少面倒になってしまった。ここが §4, 補題 8 と異なる点である。

問題 10. 関数 $\Phi^{-1} : C_0 \to \mathbb{R}$ と点 $(x, y) \in C_0$ に対して次が成り立つことを示せ。

(1) $(x, -y) \in C_0$ かつ $\Phi^{-1}(x, y) + \Phi^{-1}(x, -y) = 0$

(2) $y \neq 0 \Rightarrow (-x, y) \in C_0$ かつ $\Phi^{-1}(x, y) \cdot \Phi^{-1}(-x, y) = 1$

(3) $y \neq -1 \Rightarrow (y, x) \in C_0$ かつ $(\Phi^{-1}(x, y) + 1)(\Phi^{-1}(y, x) + 1) = 2$

問題 11. 関数 $L : C_0 \to (-\pi, \pi)$ と点 $(x, y) \in C_0$ に対して次が成り立つことを証明せよ。

(1) $(x, -y) \in C_0$ かつ $L(x, y) + L(x, -y) = 0$

(2) $y \neq 0 \Rightarrow (-x, y) \in C_0$ かつ $L(x, y) + L(-x, y) = \mathrm{sgn}(y)\pi$

(3) $y \neq -1 \Rightarrow (y, x) \in C_0$ かつ $L(x, y) + L(y, x) = \frac{\pi}{2}$

(4) $L(x, y) = 2\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{1+x}\right) = \mathrm{sgn}(y)\cos^{-1} x$

(5) $L(x, y) = 2\mathrm{sgn}(y)\tan^{-1}\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$

(6) $L(x, y) = 2\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{1+\mathrm{sgn}(x)\sqrt{(1+y)(1-y)}}\right)$

(7) $x \neq 0 \Rightarrow L(x, y) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2}\big(1 - \mathrm{sgn}(x)\big)\mathrm{sgn}(y)\pi$

(8) $L(x, y) = \mathrm{sgn}(x)\sin^{-1} y + \frac{1}{2}\big(1 - \mathrm{sgn}(x)\big)\mathrm{sgn}(y)\pi$

注意．問題 11 の (7), (8) は

$$(7')\quad L(x,y)=\begin{cases}\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) & (x>0\text{ のとき})\\[2ex] \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)+\mathrm{sgn}(y)\pi & (x<0\text{ のとき})\end{cases}$$

$$(8')\quad L(x,y)=\begin{cases}\sin^{-1}y & (x\geqq 0\text{ のとき})\\[2ex] \mathrm{sgn}(y)\pi-\sin^{-1}y & (x\leqq 0\text{ のとき})\end{cases}$$

などと表すほうが解りやすいかも知れない。また

$$L(x,y)=\begin{cases}\cos^{-1}x & (y\geqq 0\text{ のとき})\\[2ex] \sin^{-1}y \;=\; \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) & (x>0\text{ のとき})\\[2ex] -\cos^{-1}x & (y\leqq 0\text{ のとき})\end{cases}$$

と表すこともできる。ここで

$$\tan^{-1}:\mathbb{R}\longrightarrow\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos^{-1}:[-1,1]\longrightarrow[0,\pi],\quad \sin^{-1}:[-1,1]\longrightarrow\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

である。

問題 12. 点 $\mathrm{A},\mathrm{B}\in R_0=\mathbb{R}^2-(-\infty,0]$ に対して、半直線 OA,OB と円 C_0 の交点をそれぞれ A_1, B_1 とする。点 $(-1,0)$ と A_1 を結ぶ直線が y 軸と交わる点を $(0,c)$ とし、点 $(-1,0)$ と B_1 を結ぶ直線が y 軸と交わる点を $(0,d)$ とする。このとき

$$\angle\overrightarrow{\mathrm{AOB}}=\angle\overrightarrow{\mathrm{A_1OB_1}}=2\int_c^d\frac{dt}{1+t^2}\ \in\ (-2\pi,2\pi)$$

とおき、ベクトル $\mathbf{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす符号つき角と呼ぶ。

(i) 点 A, B, $\mathrm{C}\in R_0$ に対して

$$\angle\overrightarrow{\mathrm{AOB}}+\angle\overrightarrow{\mathrm{BOC}}=\angle\overrightarrow{\mathrm{AOC}}$$
$$\angle\overrightarrow{\mathrm{BOA}}=-\angle\overrightarrow{\mathrm{AOB}}$$

となることを示せ。

(ii) 点 A, $\mathrm{B}\in R_0$ に対して

$$\angle\overrightarrow{\mathrm{AOB}}=L(\mathrm{B}_1)-L(\mathrm{A}_1)$$

となることを示せ。これより、A, $\mathrm{B}\in C_0$ であれば

$$\angle\overrightarrow{\mathrm{AOB}}=L(\mathrm{B})-L(\mathrm{A})$$

となることも解る。

(iii) 点 A, $\mathrm{B}\in R_0$ に対して

$$-2\pi<\angle\overrightarrow{\mathrm{AOB}}\leqq-\pi\implies\angle\mathrm{AOB}=2\pi+\angle\overrightarrow{\mathrm{AOB}}$$
$$-\pi\leqq\angle\overrightarrow{\mathrm{AOB}}\leqq\pi\implies\angle\mathrm{AOB}=|\angle\overrightarrow{\mathrm{AOB}}|$$
$$\pi\leqq\angle\overrightarrow{\mathrm{AOB}}<2\pi\implies\angle\mathrm{AOB}=2\pi-\angle\overrightarrow{\mathrm{AOB}}$$

となることを示せ。

(iv) $\mathbf{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく。このとき、$-\pi < \angle\overrightarrow{\mathrm{AOB}} < \pi$ であれば

$$\angle\overrightarrow{\mathrm{AOB}} = \mathrm{sgn}\Big(\det\begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}\Big)\cos^{-1}\Big(\frac{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|}\Big)$$

と表されることを証明せよ。さらに、$-\frac{\pi}{2} \leqq \angle\overrightarrow{\mathrm{AOB}} \leqq \frac{\pi}{2}$ であれば

$$\angle\overrightarrow{\mathrm{AOB}} = \sin^{-1}\Big(\frac{1}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|}\det\begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}\Big)$$

と表されることを証明せよ。

(v) 上記の結果を用いて sin, cos の加法定理を導け。

注意. 問題 12 で $c = \Phi^{-1}(\mathrm{A}_1)$, $d = \Phi^{-1}(\mathrm{B}_1)$ となるから

$$\angle\overrightarrow{\mathrm{A}_1\mathrm{OB}_1} = \int_{\Phi^{-1}(\mathrm{A}_1)}^{\Phi^{-1}(\mathrm{B}_1)} \|\Phi'(t)\|\, dt$$

と書けることも解る。また、ベクトル $\mathbf{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ がつくる平行四辺形の面積 S は

$$S = \sqrt{\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle^2} = \left|\det\begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}\right|$$

と表されることも解る。

問題 13. §5, 定理 6 の証明中に示された結果より、等式

$$\tan^{-1}(ix) = i\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \qquad (-1 < x < 1)$$

$$\tan^{-1} x = -\frac{i}{2}\log\Big(\frac{i-x}{i+x}\Big) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

を導け。また、この下の等式よりオイラーの公式を導出せよ。

補足

補足 1. §3, 補題 6 の系で定義された関数 Φ とその逆関数 Φ^{-1} にはいくつもの意味がある：

1. 直線と円との関係、円のパラメータ表示（図形と方程式）
2. ピタゴラス数の表現、円上の有理点の決定（数論）
3. 立体射影、1 点コンパクト化（位相幾何学）
4. 双有理変換（代数幾何学）
5. 一次分数変換、log と $\tan^{-1}$ の関係の記述（代数学、複素関数論）

補足 2. 「溝畑茂、数学解析 (上下)、朝倉書店」では循環論法に陥らない流れで理論が展開されている。

§7. 関連事項の整理

ここでは、これまでに詳しく書けなかった結果等をまとめておく。

[1] 高校数学☒では、命題

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \implies \sin\theta < \theta < \tan\theta$$

から

$$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2},\ \theta \neq 0 \implies \cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1$$

を経由して

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

を導いているが、関数 cos の $\theta = 0$ における連続性が必要であることには触れていない。本稿ではそれを §2, 補題 5 の系 (iii) で補った。

[2] 一般に、微分係数の定義より

$$\cos' 0 = \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h}, \quad \sin' 0 = \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}$$

が解る。さらに、導関数の定義と加法定理より

$$\cos' x = \cos x \cdot \cos' 0 - \sin x \cdot \sin' 0$$
$$\sin' x = \sin x \cdot \cos' 0 + \cos x \cdot \sin' 0$$

が導かれ、導関数の定義と差を積に直す公式より

$$\cos' x = -\sin x \cdot \sin' 0$$
$$\sin' x = \cos x \cdot \sin' 0$$

が導かれる。これらを比較すれば

$$\cos' 0 = \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$$

となることが示される。従って

$$\sin' 0 = \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

であることを示せば

$$\cos' x = -\sin x, \quad \sin' x = \cos x$$

が証明できる。

注意. このような小細工では $\sin' 0 = 1$ を示すことはできない。

比較 1. 定数 a $(a > 0)$ を固定して、指数関数 $f(x) = a^x$ $(x \in \mathbb{R})$ を考える。このとき

$$f'(x) = f(x) \cdot f'(0)$$

が成り立つ。ここで

$$a = e \iff f'(0) = 1$$

に注意すれば

$$(e^x)' = e^x$$

が解る。

比較 2. 定数 a $(a>0,\, a\neq 1)$ を固定して、対数関数 $g(x)=\log_a x$ $(x>0)$ を考える。このとき

$$g'(x)=\frac{g(e)}{x}=\frac{g'(1)}{x}$$

が成り立つ。ここで

$$a=e \iff g(e)=1 \iff g'(1)=1$$

に注意すれば

$$(\log x)'=\frac{1}{x}$$

が解る。

[3] §2, 定理 1 の系の証明に用いられた数列

$$b_n=2^n\tan\frac{\theta}{2^n}\quad (n=0,1,2,\cdots)$$

にも図形的な意味がある。実際、b_n は角 θ の定める弧の外接多角形の周の長さを表す。また $\theta=\pi$ であれば、問題 6 より、$\overline{S}_n=a^2b_n$ となることも解る。

[4] §3, 定理 3 の証明に $S=\pi a^2$ を用いてしまうことが多い。これが循環論法の始まりである。厳密性を多少犠牲にしてよいなら、次のような証明もあり得る：半径 x $(x>0)$ の円の面積を $S(x)$ と書くと $S'(x)=2\pi x$ となることが解る。従って

$$S(x)=\pi x^2+c\quad (c\text{ は定数})$$

と表される。ここで

$$\lim_{x\to 0}S(x)=0,\qquad \lim_{x\to 0}\pi x^2=0$$

に注意すれば、$c=0$ となるから

$$S(x)=\pi x^2$$

が解る。

[5] §4, 定理 5, (ii) では

$$(9)\implies(4)$$

を直接証明している。また、問題 6 では

$$\text{定理 } 1\implies(6)$$

を直接証明している。さらに、(3) は

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}=\frac{1}{2}$$

と同値である。

[6] §5, 定理 6 について

(i) Step 1 の別証： $w=x+iy\in C_0$ とすれば、$w\bar{w}=1$ より

$$\Phi^{-1}(w)=\Phi^{-1}(x+iy)=\frac{y}{1+x}=\frac{\frac{w-\bar{w}}{2i}}{1+\frac{w+\bar{w}}{2}}$$
$$=-i\frac{w-\bar{w}}{2+w+\bar{w}}=-i\frac{w^2-1}{w^2+2w+1}=-i\frac{w-1}{w+1}$$

となる。

(ii) Step 2 で、形式的変形：

$$
\begin{aligned}
S(z) &= \int_0^z \frac{2}{(u+i)(u-i)}\ du = -i\Big(\int_0^z \frac{du}{u-i} - \int_0^z \frac{du}{u+i}\Big) \\
&= -i\Big(\int_i^{i-z} \frac{dt}{t} - \int_i^{i+z} \frac{dt}{t}\Big) = -i\int_{i+z}^{i-z} \frac{dt}{t} \\
&= -i\Big(\int_1^{i-z} \frac{dt}{t} - \int_1^{i+z} \frac{dt}{t}\Big) = -i\big(\log(i-z) - \log(i+z)\big) \\
&= -i\log\Big(\frac{i-z}{i+z}\Big) = -i\log\Big(-\frac{z-i}{z+i}\Big) = -i\log\big(\Phi(z)\big)
\end{aligned}
$$

は、積分路を線分と仮定しても、すべての $z\in U_0$ に対して正しいわけではない。しかし

$$S(z) \equiv -i\log\big(\Phi(z)\big) \mod 2\pi\mathbb{Z}$$

となることは示される。このことと

$$S(0) = 0 = -i\log\big(\Phi(0)\big)$$

より

$$S(z) = -i\log\big(\Phi(z)\big) \quad (z\in U_0)$$

を導くことができる。

(iii) Step 2, Step 3, Step 4 でそれぞれ

$$
\begin{aligned}
U_0 &= \{z\in\mathbb{C} \mid \Re z = 0 \Rightarrow -1 < \Im z < 1\} \\
R_0 &= \{w\in\mathbb{C} \mid w \notin (-\infty, 0]\} \\
D_0 &= \{z\in\mathbb{C} \mid -\pi < \Im z < \pi\}
\end{aligned}
$$

と表すこともできる。

注意. §5 ではコーシーの積分定理を既知とした。

[7] §4, §5 について

(i) 関数 L を経由しないで、関数 Φ の弧長によるパラメータ表示を Ψ とし、その成分として三角関数を定義するという理論展開もあり得る。ただし、点 $(1,0)$ を始点とし、点 $(a,b)\in C_0$ を終点とする円弧の符号つき長さを §1, §3, §4 の記号を用いて表せば

$$\ell(c, 0\ ;\ \Phi) = \int_0^c \|\Phi'(t)\|\ dt = \int_{\Phi^{-1}(1,0)}^{\Phi^{-1}(a,b)} \|\Phi'(t)\|\ dt = L(a,b)$$

となるから、関数 L を完全に消去するわけにはいかないことが解る。

(ii) 関数 $L: C_0 \to \mathbb{R}$ の拡張について：

§5, 定理 6, Step 3 では、関数 $L: C_0\to\mathbb{R}$ を

$$L(w) = -i\log w \qquad (w\in R_0)$$

として、正則関数 $L: R_0\to\mathbb{C}$ に拡張した。ここではこれとは異なる拡張について考える。

関数 $L_2: R_0\to\mathbb{R}$ を

$$L_2(x,y) = \int_0^{\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}} \frac{2}{1+t^2}\ dt \qquad \big((x,y)\in R_0\big)$$

により定義する。ここで、任意の $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ に対して

$$(x,y)\in R_0 \iff x+\sqrt{x^2+y^2}\neq 0$$

が成り立つことに注意する。関数 $L_2 : R_0\to\mathbb{R}$ を $w=x+iy$ とおいて複素関数に書き直せば

$$L_2(w)=\int_0^{\frac{\Im w}{|w|+\Re w}}\frac{2}{1+t^2}\,dt \qquad (w\in R_0)$$

となる。一般に、複素対数関数 $\log : R_0\to D_0$ は

$$\log w=\log|w|+iL_2(w) \qquad (w\in R_0)$$

により定義されるから、関数 $L_2 : R_0\to\mathbb{R}$ は調和関数となることが解る。さらに、§5, 定理 6, Step 3 で定められた複素関数

$$L=-i\log : R_0 \longrightarrow iD_0$$

に対して

$$L(w)=-i\log w=-i\log|w|+L_2(w)$$

と表されることより、関数 $L_2 : R_0\to\mathbb{R}$ は関数 $L : R_0\to\mathbb{C}$ の実部となることも解る。また

$$L_2(w)=L\Big(\frac{w}{|w|}\Big) \qquad (w\in R_0)$$

が成り立つことも解る。ここで、任意の $w\in R_0$ に対して

$$\frac{w}{|w|}\in C_0$$

となること、および

$$w\in C_0 \iff L(w)=L_2(w)$$

が成り立つことに注意する。

以上により、関数 $L_2 : R_0\to\mathbb{R}$ はいろいろと役にたつと考えられる。例えば L_2 の偏導関数を計算して、§4, 定理 5, (ii) を直接示すという展開を考えよ。

注意. $\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y}$ であるから

$$L_2(x,y)=\int_0^{\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{y}}\frac{2}{1+t^2}\,dt \qquad \big((x,y)\in R_0\big)$$

と表すこともできる。しかし、この形では関数値 $L_2(a,0)$ $(a>0)$ を定めることはできないので、これを関数 L_2 の定義とすることはできない。

[8] §1, §3 の曲線の長さや角を表す公式について

$$L=\int_a^b\sqrt{f'(t)^2+g'(t)^2}\,dt=\int_a^b\sqrt{\big(\tfrac{df}{dt}\big)^2+\big(\tfrac{dg}{dt}\big)^2}\,dt$$

$$L=\int_a^b\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt=\int_a^b\sqrt{\big(\tfrac{dx}{dt}\big)^2+\big(\tfrac{dy}{dt}\big)^2}\,dt$$

$$\sqrt{f'(t)^2+g'(t)^2}=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}=\frac{2}{1+t^2}$$

$$\alpha=\int_0^c\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\,dt=\int_0^c\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

などの記号を用いてもよい。

[9] §2, 定理 1 について

角の積分表示の公式より直接、等式

$$\theta = \lim_{n \to +\infty} 2^n \sin \frac{\theta}{2^n} = \lim_{n \to +\infty} 2^n \tan \frac{\theta}{2^n} \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

を証明することはできないと思われる。

注意. 角の積分表示の公式から上記等式と同値である (3) を導くことができるから、間接的には証明できている。

[10] 循環論法のその他の例

ロピタルの定理を用いて

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1+x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \lim_{x \to 0} \cos x = 1$$

等と計算すると循環論法になる。

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

についても同様である。

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{1} = \lim_{x \to 0} \sin x = 0$$

については微妙である。

高校教育、改造計画、円の面積、cyclic2014 ; 2014 年 8 月 1 日版