DIE BEWEGUNG STARRER KÖRPER IN FLÜSSIGKEITEN UND DIE MECHANIK VON HERTZ

PAUL EHRENFEST

WIEN 1904

Einleitung.

Hertz [1.)] erwähnt in der „Einleitung" seiner Mechanik die Verwandtschaft seiner Ideenbildungen mit der Idee der „Wirbelatome". Er gibt aber nicht an, wie sich die Formeln seiner Mechanik ändern, wenn man zu einem Continuum übergeht und an die Stelle der von ihm angegebenen Bedingungs-Gleichungen etwa die Incompressibilitäts-Bedingung tritt. (vergl. № 7) [2.)]

Brill [3.)] befürwortete die Übertragung der Methoden der Hertz'schen Mechanik auf den Fall der incompressibeln Flüssigkeiten. Er zeigte auch, dass die sogenannte Lagrange-Form der Incompressibilitäts-Bedingung allen Anforderungen entspricht, die Hertz an die von ihm berücksichtigten Bedingungs-Gleichungen stellt.

1.) pag 44 unten

2.) Dieses Citat und die analogen beziehen sich immer auf die Paragraphen der Hertz'schen Mechanik.

3.) A. Brill. Mittheilungen des mathem. naturw. Vereins in Württemberg 1899, Berichte der deutschen Mathem. Verein. 1899.

Reiff[4)] suchte, unabhängig davon, zu zeigen, dass eine Darstellung des hydrodynamischen Druckes auf Grund der Hertz'schen Mechanik auf Schwierigkeiten stosse.

In einer Erwiderung hierauf geht Boltzmann[5.)] vom D'Alembertschen Princip aus und zeigt, dass die Verwendung der Incompressibilitäts-Bedingung in der Eulerschen Form als Bedingungs-Gleichung für die virtuellen Verrückungen den Druck als Multiplicator dieser Bedingungsgleichung liefert.

Herr Hofrath Boltzmann empfahl im Seminar über Hertz'sche Mechanik gerade den Vorschlag von Brill durchzuführen. Das heisst:

Es sollen die Bewegungsgleichungen einer incompressibeln (reibungslosen) Flüssigkeit – auf die natürlich keine Fernkräfte wirken – auf Grund des Princips der geradesten Bahn von Hertz dargestellt werden; und dabei ist die Incompressibil-Bedingung in der Lagrange-Form als kinematische Bedingungsgleichung zu verwenden.

Es ist klar, dass nur die Lagrange-Form und

4.) R. Reiff: Die Druckkräfte der Hydrodynamik und die Hertz'sche Mechanik. Ann. d. Physik 1900 I. 226

5.) L. Boltzmann: ebendort pag. 673.

nicht die Eulersche einen consequenten Anschluss an die Hertz'sche Mechanik liefern kann: denn nur die Betrachtungsweise von Lagrange verfolgt das individuelle Theilchen, wie es allemal die Mechanik der discreten Systeme thut.

Im Folgenden wird die Durchführung der diesbezüglichen Rechnungen gegeben. Ebenso die Ausdehnung auf den Fall der Bewegung starrer Körper in Flüssigkeiten.

Fasst man im letzteren Fall die starren Körper als „geleitetes System" auf, so ergeben sich die Druckwirkungen ~~als~~ der Flüssigkeit auf die starren Körper als „Koppelungsreactionen".

Es lag nahe, diese letztere Untersuchung hinterher auf den Fall zu specialisieren, dass die Flüssigkeit einfach zusammenhängend und zu irgend einem Zeitpunkt (also dauernd) wirbelfrei sei. Denn in diesem Fall ist bekanntlich die Bewegung der Flüssigkeit schon allein durch die Lage und Bewegung der starren Körper eindeutig determiniert, also auch die Reactionsdrucke. Mit der Durchführung dieses Specialfalles verlässt man ein wenig die Analogie zur Hertz'schen Mechanik insofern diese nicht entsprechende Fälle der Mechanik discreter Systeme behandelt, dies wird an der betreffenden Stelle weiter ausgeführt.

Die übliche Behandlungsweise dieses Problems geht von einem Variationsprincip $\Delta\int_{t_0}^{t_1}(T+U)dt=0$, das die Autoren kurzweg als Hamiltonsches Princip ansprechen. Sie gelangt dann für die Bewegung der festen Körper zu Gleichungen die völlig die Gestalt der Lagrange-Gleichungen besitzen. Es sei gestattet, sie abkürzend als <u>Kelvin-Gleichungen</u> zu bezeichnen.

Merkwürdigerweise führt die hier angedeutete Ableitung aus dem Princip der geradesten Bahn, wie weiter unten gezeigt wird, zunächst noch auf Zusatzglieder zu den Kelvinschen Gleichungen.

Die Ursache liegt in Folgendem: Durch Einführung des Geschwindigkeitspotentiales gelingt es, die Bewegung eines Flüssigkeitstheilchens linear-homogen durch die Geschwindigkeiten jener allgemeinen Coordinaten darzustellen, die die Lagen der festen Körper bestimmen. Man hat so Beziehungen von der Form

$$\dot{x}=\sum_1^z{}_s\,\alpha_s\dot{p}_s \qquad \dot{y}=\sum_1^z{}_s\,\beta_s\dot{p}_s \qquad \dot{z}=\sum_1^z{}_s\,\gamma_s\dot{p}_s$$

Diese haben ganz die Bauart der Beziehungen
$$\dot{x}_\nu = \sum_1^n{}_\varrho \, \alpha_{\nu\varrho} \, \dot{p}_\varrho$$
der Hertzschen Mechanik (N° 57 b); aber ein wichtiger Unterschied besteht jedesfalls: während für die $\alpha_{\nu\varrho}$ bei Hertz die Beziehung vorausgesetzt wird:
$$\frac{\partial \alpha_{\nu\varrho}}{\partial p_\sigma} = \frac{\partial \alpha_{\nu\sigma}}{\partial p_\varrho}$$
können wir eine ähnliche Beziehung für die $\alpha_\varrho, \beta_\varrho, \gamma_\varrho$ nicht mehr allgemein voraussetzen. Das kann man unter Benützung einer jetzt üblichen Bezeichnungsweise aussprechen wie folgt:

Bewegen sich starre Körper in einer einfach zusammenhängenden, wirbelfreien Flüssigkeit so gelingt es, die Geschwindigkeit jedes Flüssigkeitstheilchens linear homogen durch die Geschwindigkeiten der allgemeinen Coordinaten auszudrücken, die zur Beschreibung der Lagen der starren Körper verwendet werden; dieses System der Coordinaten p_ϱ figuriert aber hiebei als „nichtholonomes Coordinaten-System".

Es ist aber durch neuere Untersuchungen [1)] bekannt, dass die Lagrange-Gleichungen für allgemeine Coordinaten gewisse Zusatzglieder

---

1.) Literaturangaben in § 3.

erhalten müssen, wenn man sie auf solche „nichtholonome Coordinaten anwenden will. Und in der That erhalten ~~zunächst~~ auch die Kelvinschen Gleichungen infolgedessen zunächst noch Zusatzglieder von der entsprechenden Bauart.

Dass diese Zusatzglieder bei der üblichen Herleitung aus dem Princip $\Delta\int_0^1 (T+U)\,dt = 0$ gar nicht erst auftauchen rührt daher, dass die ~~die~~ dabei verwendete Variationsart eine andere ist, als die dem Princip der virtuellen Verrückungen oder irgendeinem differentiellen Princip entsprechende. Verwendet man Hölder folgend auch für das Hamiltonsche Princip die dem Princip der virtuellen Verrückung entsprechende Variationsart, ~~so~~ treten auch bei dieser Ableitung die Zusatzglieder auf.

Eine nähere Discussion dieser Punkte wird am Schluss der Arbeit gegeben, wo auch der Nachweis erbracht wird, dass jene Zusatzglieder trotz der Nichtholonomie der Coordinaten wegen der speciellen Eigenschaften des Systems verschwinden.

Um die Besprechung dieser Beziehungen nicht durch die Ableitung aller Hülfsmittel wiederholt unterbrechen zu müssen, sei es gestattet, diese Hülfsmittel in den ersten §§ in continuo vorzubereiten.

§ 1.

Die cartesischen Coordinaten eines n-punktigen materiellen Systems mögen bezeichnet werden mit

$$x_\nu \qquad \nu = 1 \dots 3n \qquad 1.)$$

„Anstatt durch diese rechtwinkligen Coordinaten können wir die Lage des Systems auch bestimmen durch irgendwelche r Grössen $p_1 \dots p_\varrho \dots p_r$ sobald durch eine Übereinkunft bestimmte Wertesysteme dieser Grössen bestimmten Lagen stetig zugeordnet sind und umgekehrt." „Die rechtwinkligen Coordinaten sind dadurch Functionen dieser Grössen und umgekehrt" 1.)

Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{\partial x_\nu}{\partial p_\varrho} = \alpha_{\nu\varrho} \qquad 2.)$$

so bestehen $3n$ Gleichungen von der Form

1.) (N° 13). Inwiefern diese Aussage eine gelegentlich bedeutsame Einschränkung darstellt wird im nächsten § erläutert.

$$dx_\nu = \sum_1^{3n}{}^\varrho\, \alpha_{\nu\varrho}\, dp_\varrho \qquad 3.)$$

in denen die $\alpha_{\nu\varrho}$ Functionen der Lage sind also als Functionen der p_ϱ aufgefasst werden können (N° 57.)

Mit Rücksicht auf 2.) gilt für alle Werte von ν, σ, τ:

$$\frac{\partial \alpha_{\nu\sigma}}{\partial p_\tau} = \frac{\partial \alpha_{\nu\tau}}{\partial p_\sigma} \qquad 4.)$$

Die „Krümmung der Bahn des Systems" – c – werde definiert durch:

$$mc^2 = \sum_1^{3n}{}^\nu\, m_\nu \left(\frac{d^2 x_\nu}{dt^2}\right)^2 = \sum_1^{3n}{}^\nu\, m_\nu\, \ddot{x}_\nu^2 \qquad 5.)$$

m ist die Gesammtmasse des Systems, m_ν die eines Punktes. 2.)

Es ist (N° 108)

$$\dot{x}_\nu = \sum_1^{r}{}^\varrho\, \alpha_{\nu\varrho}\, \dot{p}_\varrho \qquad 6.)$$

$$\ddot{x}_\nu = \sum_1^{r}{}^\varrho \left(\alpha_{\nu\varrho}\, \ddot{p}_\varrho + \dot{\alpha}_{\nu\varrho}\, \dot{p}_\varrho\right) \qquad 7.)$$

Also:

$$\ddot{x}_\nu^2 = \sum_1^{r}{}^\varrho \sum_1^{r}{}^\sigma \left(\alpha_{\nu\varrho}\alpha_{\nu\sigma}\, \ddot{p}_\varrho \ddot{p}_\sigma + 2\,\dot{\alpha}_{\nu\varrho}\alpha_{\nu\sigma}\, \dot{p}_\varrho \ddot{p}_\sigma + \dot{\alpha}_{\nu\varrho}\dot{\alpha}_{\nu\sigma}\, \dot{p}_\varrho \dot{p}_\sigma\right) \qquad 8.)$$

Das $\dot{\alpha}_{\nu\varrho}$ im zweiten Glied dieses Ausdruckes entwickeln wir:

$$\dot{\alpha}_{\nu\varrho} = \sum_1^{r}{}^\tau \frac{\partial \alpha_{\nu\varrho}}{\partial p_\tau}\, \dot{p}_\tau \qquad 9.)$$

Somit:

2.) An diesem Punkt muss eine beträchtliche Abweichung von Hertz entschuldigt werden: Hertz legt als unabhängige Variable zunächst nicht die Zeit sondern die „Bahnlänge" zugrunde. Da wir aber bald zu Systemen mit so vielen Freiheitsgraden übergehen werden, so würde das zu unnöthigen Complicationen führen. Was hier als „Krümmung" und „Princip der geradesten Bahn" angeführt wird müsste richtiger ~~als~~ „Princip des kleinsten Zwanges" heissen. Für die hier behandelten kräftefreien Fälle bewirkt diese Ungenauigkeit keine Differenz in den Resultaten. (Hertz N° 344, 385.)

$$mc^2 = \sum_1^n{}_\varrho \sum_1^n{}_\sigma \ddot{p}_\varrho \ddot{p}_\sigma \sum_1^{3n}{}_\nu m_\nu \alpha_{\nu\varrho}\alpha_{\nu\sigma} + \\ + 2\sum_1^n{}_\varrho \sum_1^n{}_\sigma \dot{p}_\varrho \ddot{p}_\sigma \sum_1^n{}_\tau \dot{p}_\tau \sum_1^{3n}{}_\nu m_\nu \alpha_{\nu\sigma} \frac{\partial \alpha_{\nu\varrho}}{\partial p_\tau} + \\ + \sum_1^n{}_\varrho \sum_1^n{}_\varrho \dot{p}_\varrho \dot{p}_\sigma \sum_1^{3n}{}_\nu m_\nu \dot{\alpha}_{\nu\varrho}\dot{\alpha}_{\nu\sigma} \qquad 10.)$$

Nun machen wir die Annahme, dass das hier betrachtete n-punktige System ein „freies System" im Sinn der Hertz'schen Mechanik ist (N° 122.)

Dann fordert das Princip der geradesten Bahn: [1.)]

$$\delta\left(\frac{mc^2}{2}\right) = 0 \qquad 11.)$$

Hiebei ist δ so zu verstehen, dass alle p_ϱ und $\dot{p}_\sigma$ – also Configuration und Geschwindigkeiten – unvariiert bleiben – hingegen die $\ddot{p}_\sigma$ variiert werden, soweit es die eventuell zwischen den p noch bestehenden Bedingungsgleichungen gestatten.

Diese Variation, an dem durch 2 dividierten Ausdruck 10.) ausgeführt, liefert:

$$\delta\left(\frac{mc^2}{2}\right) = \sum_1^n{}_\varrho \sum_1^n{}_\sigma \delta\ddot{p}_\sigma \ddot{p}_\varrho \sum_1^{}{}_\nu m_\nu \alpha_{\nu\varrho}\alpha_{\nu\sigma} + \\ + \sum_1^n{}_\sigma \delta\ddot{p}_\sigma \sum_1^n{}_\varrho \dot{p}_\varrho \sum_1^n{}_\tau \dot{p}_\tau \sum_1^{3n}{}_\nu m_\nu \alpha_{\nu\sigma} \frac{\partial \alpha_{\nu\varrho}}{\partial p_\tau} \\ = 0 \qquad 12.)$$

Diese Gleichung kann man durch Einführung des Ausdruckes für die kinetische Energie transformieren.

$$T = \frac{1}{2} \sum_1^{3n}{}_\nu m_\nu \dot{x}_\nu^2 = \frac{1}{2} \sum_1^n{}_\varrho \sum_1^n{}_\tau \dot{p}_\varrho \dot{p}_\tau \sum_1^{3n}{}_\nu m_\nu \alpha_{\nu\varrho}\alpha_{\nu\tau} \qquad 13.)$$

1.) vergl. Anm 2 auf der vorhergeh. Seite.

Somit:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_\sigma} = \sum_1^r{}_\varrho\, \dot{p}_\varrho \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu \alpha_{\nu\varrho}\alpha_{\nu\sigma} \qquad 14.)$$

und

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_\sigma}\right) = &\sum_1^r{}_\varrho\, \ddot{p}_\varrho \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu \alpha_{\nu\varrho}\alpha_{\nu\sigma} + \\ &+ \sum_1^r{}_\varrho\, \dot{p}_\varrho \sum_1^r{}_\tau\, \dot{p}_\tau \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu \alpha_{\nu\sigma}\frac{\partial \alpha_{\nu\varrho}}{\partial p_\tau} + \\ &+ \sum_1^r{}_\varrho\, \dot{p}_\varrho \sum_1^r{}_\tau\, \dot{p}_\tau \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu \alpha_{\nu\varrho}\frac{\partial \alpha_{\nu\sigma}}{\partial p_\tau}\end{aligned}\right\} \qquad 15.)$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial p_\sigma} &= \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu \dot{x}_\nu \frac{\partial \dot{x}_\nu}{\partial p_\sigma} = \\ &= \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\tau\, \dot{p}_\varrho \dot{p}_\tau \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu \alpha_{\nu\varrho}\frac{\partial \alpha_{\nu\tau}}{\partial p_\sigma}\end{aligned} \qquad 16.)$$

Aus 15–16:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_\sigma}\right) - \frac{\partial T}{\partial p_\sigma} = &\sum_1^r{}_\varrho\, \ddot{p}_\varrho \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu \alpha_{\nu\varrho}\alpha_{\nu\sigma} + \\ &+ \sum_1^r{}_\varrho\, \dot{p}_\varrho \sum_1^r{}_\tau\, \dot{p}_\tau \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu \alpha_{\nu\sigma}\frac{\partial \alpha_{\nu\varrho}}{\partial p_\tau} + \\ &+ \sum_1^r{}_\varrho\, \dot{p}_\varrho \sum_1^r{}_\tau\, \dot{p}_\tau \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu \alpha_{\nu\varrho}\left(\frac{\partial \alpha_{\nu\sigma}}{\partial p_\tau} - \frac{\partial \alpha_{\nu\tau}}{\partial p_\sigma}\right)\end{aligned}\right\} \qquad 20.)$$

Die Vergleich von 20.) und 12.) gibt:

$$\begin{aligned}\delta\left(\frac{mc^2}{2}\right) = &\sum_1^r{}_\sigma\, \delta\ddot{p}_\sigma \left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_\sigma}\right) - \frac{\partial T}{\partial p_\sigma}\right\} + \\ &+ \sum_1^r{}_\sigma\, \delta\ddot{p}_\sigma \sum_1^r{}_\varrho\, \dot{p}_\varrho \sum_1^r{}_\tau\, \dot{p}_\tau \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu \alpha_{\nu\varrho}\left(\frac{\partial \alpha_{\nu\tau}}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial \alpha_{\nu\sigma}}{\partial p_\tau}\right) = \\ &= 0\end{aligned} \qquad 21.)$$

[Dabei wurden, um das Vorzeichen + für das letzte Glied zu erhalten die Glieder in der runden Klammer miteinander vertauscht.]

Um nun zu den Lagrange-Gleichungen zu gelangen, nehmen wir an, dass die p_σ bereits unabhängig voneinander sind. Dann folgt aus 21.):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_\sigma}\right)+\frac{\partial T}{\partial p_\sigma}+\sum_1^r{}^{\varrho}\,\dot{p}_\varrho\sum_1^r{}^{\tau}\,\dot{p}_\tau\sum_1^{3n}{}^{\nu}\,m_\nu\,\alpha_{\nu\varrho}\left(\frac{\partial\alpha_{\nu\tau}}{\partial p_\sigma}-\frac{\partial\alpha_{\nu\sigma}}{\partial p_\tau}\right)=0 \qquad 22.)$$

Wir wollen mit Rücksicht auf den folgenden § daran erinnern, dass in den bisherigen Transformationen in keiner Weise die Beziehungen 4.)

$$\frac{\partial\alpha_{\nu\tau}}{\partial p_\sigma}-\frac{\partial\alpha_{\nu\sigma}}{\partial p_\tau}=0$$

benutzt wurden.

Benutzen wir sie zuletzt doch noch so reduciert sich Gl. 22. auf:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_\sigma}\right)-\frac{\partial T}{\partial p_\sigma}=0 \qquad 23.)$$

und damit sind wir am Ziel angelangt; denn dies sind die Lagrange-Gleichungen da ja für die „freien Systeme“ der Hertz'schen Mechanik kinet. Energie und Lagrange-Function zusammenfallen.

§ 2.

Einer der Hauptvortheile, den die Einführung allgemeiner Coordinaten bietet, besteht darin, dass man mit ihrer Hülfe Bedingungsgleichungen von der Form

$$\varphi_j(x_1 \dots x_{3n}) = 0 \qquad j = 1 \dots i \qquad 24.)$$

identisch durch Ansätze:

$$x_\nu = x_\nu(p_1 \dots p_r) \qquad \nu = 1 \dots 3n \qquad 25.)$$

befriedigen kann, wobei

$$r = 3n - i \qquad 26.)$$

Handelt es sich aber um Systeme mit nicht-holonomen Bedingungsgleichungen, so sind diese nur in der differentiellen Gestalt

$$\sum_1^{3n} {}^\nu \, x_{j\nu} \, dx_\nu = 0 \qquad 27.)$$

gegeben, ohne ~~dass diese Beziehungen~~ durch aequivalente endliche Gleichungen zwischen den x_ν ersetzbar zu sein.

Ansätze von der Form 25. führen dann offenbar nicht mehr zum Ziel. Denn existierten sie, so könnte man zwischen ihnen die p_ϱ eliminieren und hätte dann die Bedingungs-Gleichungen zwischen den x_ν entgegen der Voraussetzung in endlicher Gestalt dargestellt.

Aber noch immer gelingt es durch Einführung allgemeiner Coordinaten die Gleichungen (27) identisch zu befriedigen. Und zwar durch differentielle Ansätze:

$$dx_\nu = \sum_1^r{}_\varrho \, \alpha_{\nu\varrho} \, dp_\varrho \qquad 28.)$$

die an die Stelle von 25.) treten.

Solche Substitutionen kann man auf unendlich viele Weisen gewinnen. Z.B. dadurch, dass man als dp_ϱ die ersten r unter den dx_ν verwendet, den Rest aber mit Hülfe der linear-homogenen Gleichungen 27.) linear homogen durch jene ersten r dx_ν ausdrückt.

Auf den ersten Blick scheinen die so gewonnenen Ansätze (28.) gleichartig mit den Ansätzen (3) des vorigen §. Es besteht aber in zwei Punkten ein wesentlicher Unterschied zwischen ihnen.

Erstens sind die $\alpha_{\nu\varrho}$ wohl auch nur Functionen der augenblicklichen Lage; aber im Allgemeinen lassen sie sich nicht mehr als Functionen allein der p_ϱ ansehen: sie enthalten im Allgemeinen nebeneinander die p_ϱ und x_ν. Bei der oben exemplificierten Herleitung sieht man das sofort. Und bei den praktisch vorkommenden Fällen ist es, wie wir im Verlauf der folgenden Entwicklungen sehen werden fast immer so. Das also ist die erste Differenz gegen die Voraussetzungen des vorigen §. (Vergl. die auf Gl. 3 folgende Aussage.)

Danach besitzt das Symbol

$$\frac{\partial \alpha_{\nu\varrho}}{\partial p_\sigma} \qquad 29.)$$

zunächst noch einen doppelten Sinn. Wir wollen über das Symbol durch die der Gl. 9.) entsprechende Aussage verfügen:

$$\dot{\alpha}_{\nu\varrho} = \sum_{1}^{n}{}_{\tau} \frac{\partial \alpha_{\nu\varrho}}{\partial p_\tau}\, \dot{p}_\tau \qquad 30.)$$

Danach ist ~~natürlich~~

$$\frac{\partial \alpha_{\nu\varrho}}{\partial p_\tau} = \left[\frac{\partial \alpha_{\nu\varrho}}{\partial p_\tau}\right] + \sum_{1}^{3n}{}_{\nu} \frac{\partial \alpha_{\nu\varrho}}{\partial x_\nu} \cdot \alpha_{\nu\tau} \qquad 31.)$$

wo sich die Differentialquotienten in den eckigen Klammern auf das explicite Vorkommen der p_ϱ beziehen.

Im Allgemeinen ist jetzt

$$\frac{\partial \alpha_{\nu\tau}}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial \alpha_{\nu\sigma}}{\partial p_\tau} \neq 0 \qquad 32.)$$

und das ist die zweite, wie wir sehen werden bedeutsame Differenz gegen die Voraussetzungen des vorigen Paragraphen.

Wir wollen nun, ohne Rücksicht auf ihre Entstehungsweise, solche Coordinaten p_ϱ, die bei der Darstellung der dx_ν, Coefficienten $\alpha_{\nu\varrho}$ erfordern, für die die Ausdrücke 32 nicht mehr insgesammt verschwinden „nichtholonome Coordinatensysteme“ nennen.[1)]

1.) Literatur siehe § 3.

Dieses rein rechnerische Kriterium würde für alles Folgende ausreichen. Es ist aber doch wohl wünschenswert diese Aussage mit anderen in Beziehung zu setzen, das heisst nicht völlig die Entstehungsweise der jeweiligen Ansätze 28 zu ignorieren.

Wir betrachteten hier die Entstehung aus der Verwendung nichtholonomer Bedingungsgleichungen zur Elimination von Variabeln. Jedesfalls waren die p_g dabei schon völlig unabhängig voneinander. Diesen Zug wollen wir auch für die anderen Fälle als Voraussetz. festhalten.

Solche nichtholonome Coordinaten können auch auftreten, wenn man etwa linear-homogene erste Integrale der Beweggleichungen (z. B. die Flächensätze) zur Elimination von Variabeln verwenden will.

Es kommen aber auch bei der identischen Befriedung holonomer Bedingungs-Gleichungen durch Ansätze 28.) nichtholonome Coordinaten auftreten.

Ein Exempel für den ersten Fall liefert eine Frictionskuppelung zwischen zwei rotierenden Maschinen, wofern diese Kuppelung continuierlich variabel ist.[1.)] Nimmt man als Coordinaten der

1.) Siehe L. Boltzmann: Über die Form der Lagrangeschen Gleichungen für nichtholonome generalisierte Coordinaten. Wien. Akad. CXI 1902 ganzen Maschine: Die Winkelstellung der ersten Maschine ω_1, der zweiten Maschine ω_2 und außerdem die Einstellung der Kuppelung (also das Übersetz-Verhältnis) a so besteht zwischen ihnen die nichtholonome Gleichung:

$$d\omega_1 - a\,d\omega_2 + 0.da = 0$$

Verwendet man aber allein $d\omega_1$ und da so hat man:

$$d\omega_1 = d\omega_1 + 0.da$$
$$da = 0.d\omega_1 + da$$
$$d\omega_2 = a\,d\omega_1 + 0.da$$

Die Berechnung der Ausdrücke 32.) zeigt dann, dass ω_1, a als nichtholonomes Coordinatensystem zu bezeichnen sind.

Ein Exempel für den dritten Fall liefert die Darstellung der Drehungen eines in einem Punkt festgehaltenen Körpers. Die Bedingungs-Gleichungen sind hier in der endlichen Form auszusprechen: Die Distanz von je zwei Punkten des Körpers bleibt constant. Die Eulerschen Winkel erweisen sich dann auch als holonom. Die Drehungen um die im Raum festen Axen und auch die Drehungen um die mit dem Körper wandernden Axen sind hingegen nichtholonom.

Nichtholonome Coordinaten können also bei der Elimination von Coordinaten mit Hülfe sowohl holonomer als nichtholonomer ~~Beding.~~ Gleichungen auftreten.

Bei der Elimination von Coordinaten mit Hülfe nichtholonomer Bedingungsgleichungen entstehen aber vermuthlich nothwendig nichtholonome Coordinatensysteme.

Die Beschreibung der Bewegung eines Systems durch nichtholonome Coordinaten unterscheidet sich in vielen wesentlichen Zügen von der durch holonome Coordinaten. Hier soll besonders eine für das Folgende in Betracht kommende Differenz ausgeführt werden[1.)]:

Die Angabe der $3n$ cartesischen Coordinaten determiniert eineindeutig die Configuration des Systems. Lassen sich die x_ν durch die neueingeführten p_ς in der Form der Gl. 25. dieses § ausdrücken, so genügt, wegen eventueller Mehrdeutigkeit der Functionen $x_\nu(p_1 \ldots p_z)$ die Angabe aller p_ς noch nicht, um die Configuration eindeutig zu determinieren. Man muss in diesem Fall durch willkürliche Verfügung der Configuration eines bestimmten Zeitpunktes t_0 ein bestimmtes Wertesystem der p_ς zuordnen; diese Werte ändern sich dann continuierlich mit der Zeit.

1.) Einer Erläuterung folgend, die Herr Hofrath Boltzmann in der Vorlesung Sommer 1903 gab.

„Da sich auch die Werte der rechtwinkligen Coordinaten continuierlich mit der Zeit ändern, so ist dadurch jede Mehrdeutigkeit ausgeschlossen, solange man nicht an eine Stelle kommt, wo sich mehrere Functionswerte verzweigen. An solchen Verzweigungsstellen oder anderen singulären Stellen, wo die Functionen discontinuierlich unbestimmt oder unendlich werden, sind immer besondere Betrachtungen und Festsetzungen nöthig."
Diese Stellen ~~tragen~~ besitzen aber auch meist einen anschaulich singulären Charakter.

Wir sehen so, dass bei holonomen Coordinaten wenigstens in der oben angegebenen Einschränkung zur eindeutigen Bestimmung der augenblicklichen Configuration die Angabe der augenblicklichen p_ϱ-Werte genügt.

Durchaus anders verhalten sich die nichtholonomen Coordinaten. An die Stelle von 25.) tritt 28.). Die Angabe der Configuration (und damit der $\alpha_{\nu\varrho}$) und der dp_ϱ genügt allerdings um die dx_ν zu determinieren. Aber eine Determination der x_ν selber durch die p_ϱ – also eine Determination der Lage des Systems durch die Angabe der p_ϱ gelingt auch nicht mehr in dem oben angegebenen beschränkten Umfang.

Man kann sich das an dem oben erwähnten Beispiel der Frictionskuppelung klar machen: Die Angabe von a und $d\omega_1$ liefert wohl $d\omega_2$ – die Angabe von a und ω_1 lässt aber noch alle Werte von ω_2 zu.[1.)]

Das Verhalten der nichtholonomen Coordinaten kann man in einer Form charakterisieren, die an die Frage nach der Existenz eines Geschwindigkeits-Potentials oder Potentials überhaupt einigermaßen erinnert. Betrachten wir nämlich die r p_ς als cartesische Coordinaten eines r dimensionalen Raumes und ordnen irgend einem bestimmten Punkt dieses Raumes z. B. dem Punkt $p_1 = \dots = p_r = 0$ eine bestimmte Configuration des Systemes zu, also ein bestimmtes Wertesystem der x_ν, so können wir fragen welches Wertesystem der x_ν danach irgend einem andern Punkt dieses r-Raumes entspricht. Zu diesem Zweck verbinden wir den Anfangspunkt mit diesem Punkt durch eine willkürliche Curve und summieren längs dieser Curve die Ausdrücke (28)

$$dx_\nu = \sum_1^r{}_\varsigma\, \alpha_{\nu\varsigma}\, dp_\varsigma$$

man sieht dann sofort, dass wegen des Nicht-Verschwinden der „Wirbel"-Glieder

$$\frac{\partial \alpha_{\nu\sigma}}{\partial p_\tau} - \frac{\partial \alpha_{\nu\tau}}{\partial p_\sigma}$$

1.) Ein hydrodynamisches Exempel behandelt der § 8.

für jede Wahl der Curve das Resultat anders ausfällt. Und auch für infinitesimal benachbarte Curven ist das Resultat noch in den Gliedern erster Ordnung verschieden.

Die „Wirbel" Glieder lassen eine anschauliche Deutung zu,[1] die wir angeben weil wir sie später zweimal benöthigen. Wir gehen von der Configuration x_ν aus. Eine Änderung allein des Parameters p_σ ändere x_ν um

$$(dx_\nu)_\sigma = \alpha_{\nu\sigma} dp_\sigma \qquad 33.)$$

eine darauffolgende Aenderung allein des Parameters p_τ bewirkt, dass sich x_ν schliesslich geändert hat um

$$(dx_\nu)_{\sigma\tau} = \alpha_{\nu\sigma} dp_\sigma + \alpha_{\nu\tau} dp_\tau + \frac{\partial \alpha_{\nu\tau}}{\partial p_\sigma} dp_\sigma dp_\tau + \qquad 34.)$$

$$(dx_\nu)_{\sigma\tau} = \alpha_{\nu\sigma} dp_\sigma + \alpha_{\nu\tau} dp_\tau + \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha_{\nu\sigma}}{\partial p_\sigma} dp_\sigma^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha_{\nu\tau}}{\partial p_\tau} dp_\tau^2 + \frac{\partial \alpha_{\nu\tau}}{\partial p_\sigma} dp_\sigma dp_\tau + \cdots$$

Ganz dieselben Aenderungen $dp_\sigma\, dp_\tau$ nur in der umgekehrten Reihenfolge bewirken:

$$(dx_\nu)_{\tau\sigma} = \alpha_{\nu\tau} dp_\tau + \alpha_{\nu\sigma} dp_\sigma + \frac{\partial \alpha_{\nu\sigma}}{\partial p_\tau} dp_\tau dp_\sigma + \qquad 35.)$$

$$(dx_\nu)_{\tau\sigma} = \alpha_{\nu\tau} dp_\tau + \alpha_{\nu\sigma} dp_\sigma + \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha_{\nu\tau}}{\partial p_\tau} dp_\tau^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha_{\nu\sigma}}{\partial p_\sigma} dp_\sigma^2 + \frac{\partial \alpha_{\nu\sigma}}{\partial p_\tau} dp_\tau dp_\sigma + \cdots$$

Die Subtraction des Ausdruckes 35) von 34.) liefert die gewünschte Deutung:

$$\frac{\partial \alpha_{\nu\tau}}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial \alpha_{\nu\sigma}}{\partial p_\tau} = \lim \frac{(dx_\nu)_{\sigma\tau} - (dx_\nu)_{\tau\sigma}}{dp_\sigma dp_\tau} \qquad 36.)$$

Gegenüber dem hier charakterisierten Verhalten

1.) L. Boltzmann l.c.

der nichtholonomen Coordinaten erweist sich jetzt die im Beginn des §1. citierte Voraussetzung, die Hertz über die von ihm benutzten p_ϱ macht, als eine sehr wesentliche Einschränkung: sie schliesst die nichtholonomen Coordinaten aus der Betrachtung aus.

Danach ist es klar, dass viele Sätze der Hertzschen Mechanik Modificationen erfahren müssen, sobald auch nicht-holonome Coordinaten zugelassen werden. Die Ausdehnung der Methoden der Hertz-Mechanik auf gewisse Probleme der Hydrodynamik erzwingt aber, wie wir später sehen werden, die Verwendung auch solcher Coordinaten. – Von jenen Modificationen wollen wir hier nur die eine besprechen die für das Folgende in Betracht kommt:

Wie modificiert sich die im § 1 gegebene Herleitung der Lagrangeschen Gleichungen aus dem Princip der geradesten Bahn, wenn es sich um nichtholonome Coordinaten handelt?

Wenn man nun Punkt für Punkt die Entwicklungen des §1 daraufhin durchsieht so hat man als unterscheidend zu beachten:

I. dass $\alpha_{\nu\varrho} = \alpha_{\nu\varrho}(p_1 \cdots p_r, x_1 \cdots\cdots x_r)$ 1.)

II. dass $\frac{\partial \alpha_{\nu\sigma}}{\partial p_\tau} \neq \frac{\partial \alpha_{\nu\tau}}{\partial p_\sigma}$

I.) bedingt an keiner Stelle eine Aenderung; denn die Verfügung (30) über das Symbol $\frac{\partial \alpha_{\nu\varrho}}{\partial p_\tau}$:

$$\dot{\alpha}_{\nu\varrho} = \sum_{\tau=1}^{r} \frac{\partial \alpha_{\nu\varrho}}{\partial p_\tau} \dot{p}_\tau$$

bewirkt – vergl. Gl. 9. – dass alle Entwicklungen für $\dot{\alpha}_{\nu\varrho}$ etc. in ihrer Schreibweise unverändert bleiben.

(II.) aber kommt nur ein einziges mal in Betracht, nämlich beim Übergang von Gl (22) zu Gl (23).

Dieser Übergang ist im Fall nichtholonomer Coordinaten nicht mehr möglich und wir erhalten also als Lagrange-Gleichungen für nichtholonome Coordinaten die Gleichungen:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_\sigma}\right) - \frac{\partial T}{\partial p_\sigma} + \sum_{\varrho=1}^{r} \dot{p}_\varrho \sum_{\tau=1}^{r} \dot{p}_\tau \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu \alpha_{\nu\varrho}\left(\frac{\partial \alpha_{\nu\tau}}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial \alpha_{\nu\sigma}}{\partial p_\tau}\right) = 0 \qquad 37.)$$

Macht man jetzt noch die Summation über ϱ rückgängig so hat man in:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_\sigma}\right) - \frac{\partial T}{\partial p_\sigma} + \sum_{\tau=1}^{r} \dot{p}_\tau \sum_{\nu=1}^{3n} m_\nu \dot{x}_\nu \left(\frac{\partial \alpha_{\nu\tau}}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial \alpha_{\nu\sigma}}{\partial p_\tau}\right) = 0 \qquad 38.)$$

die Gleichungen in jener Gestalt in der sie zuerst von <u>Boltzmann</u> angegeben wurden.

§ 3. [1.)]

Ebenfalls als Vorbereitung geben wir hier noch die Ableitung der Lagrange-Gleichungen für nichtholonome Coordinaten aus dem Hamiltonschen Princip.

Durch die Untersuchungen von Voss, Neumann, Hölder und Hertz ist klargestellt worden, dass das Hamiltonsche Princip auch im Fall nichtholonomer Bedingungsgleichungen gilt, was bekanntlich zuletzt noch Hertz in Zweifel gezogen hatte.

Es sei gestattet, kurz daran zu erinnern, wie Hölder den von Hertz erhobenen Einwand beseitigt. Es galt

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(T+U)\,dt \qquad 39.)$$

etwa für vorgegebene Variation der Anfangs und End-configuration auf Grund des D'Alembertschen Princips zu berechnen. Das Hamiltonsche Princip

1.) Eine ausführliche Besprechung der Arbeiten über nichtholonome Coordinaten findet sich in der kürzlich erschienenen Arbeit des Herrn G. Hamel (Karlsruhe): „die Lagrange-Eulerschen Gleichungen der Mechanik“. Auch dort wird die Ableitung der Gleichungen auf Grund des Hamiltonschen Princips gegeben; doch verwendet Hamel – in unserer Bezeichnung – als Bestimmungs-Stücke die holonomen x_ν und die p_ς nebeneinander, weshalb seine Gleichungen eine andere Gestalt besagt, dass:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(T+U)\,dt = \sum_1^{3n}{}_{\nu}\Big|m_\nu\dot{x}_\nu\,\delta x_\nu\Big|_0^1 \qquad 40.)$$

Hertz berechnet diese Variation, indem er neben der wirklichen Bewegung eine variierte Bewegung betrachtet, die ebenso wie die wirkliche den nicht-holonomen Bedingungs-Gleichungen genügt. – Die „Hertz'sche"-Variationsart Δ verfügt demnach über $\Delta\dot{x}_\nu$ gemäss der Forderung:

$$\sum_1^{3n}{}_{\nu}\, x_{j\nu}\dot{x}_\nu = 0 \qquad j = 1 \dots i \qquad 41.)$$

$$\Delta\sum_1^{3n}{}_{\nu}\, x_{j\nu}\dot{x}_\nu = 0 \qquad 42.)$$

Δx_ν ergibt sich erst hinterher aus:

$$\Delta x_\nu = \int_0^1 \Delta\dot{x}_\nu\,.dt \qquad 43.)$$

Hölder hingegen construiert die variierte Bewegung indem er aus jeder Lage der wirklichen Bewegung durch Verrückungen, die den Bedingungs-Gleichungen genügen

---

haben, als die von Boltzmann gegebenen, die als Bestimmungsstücke p_s und $\dot{p}_s$ verwenden. Für gewisse Probleme z.B. das Kreiselproblem eignen sich die Hamelschen Gleichungsformen ausserordentlich gut und auch speciell für die in jener Arbeit gegebenen gruppentheoretischen Untersuchungen. Das im folgenden behandelte hydrodynamische Problem verlangt dagegen gerade die Boltzmannsche Form, wie hier nicht weiter erörtert werden kann.

zu variierten Lagen übergeht. Werden die variierten Lagen noch gleichzeitig wie die unvariierten „durchlaufen" so hat die variierte Bewegung vor sich. Die „Hölderische" Variation δ verfügt demnach über δx_ν gemäss der Forderung:

$$\sum_1^{3n} {}_\nu\, x_{j\nu}\, \dot{x}_\nu = 0 \qquad 44.)$$

$$\sum_1^{3n} {}_\nu\, x_{j\nu}\, \delta x_\nu = 0 \qquad 45.)$$

$\delta \dot{x}_\nu$ ergibt sich erst hinterher aus:

$$\delta \dot{x}_\nu = \frac{d}{dt}(\delta x_\nu) \qquad 46.)$$

Nur wenn die Gleichungen 44.) holonom sind sind

$$\delta x_\nu = \Delta x_\nu \qquad 47)$$

und

$$\delta \dot{x} = \Delta \dot{x}_\nu \qquad 48.)$$

möglich.

Da aber die virtuellen Verrückungen des D'Alembertschen Principes gerade den Gleichungen 45.) unterworfen sind, so glückt der Beweis der Gl. 40.) durch Rückschluss auf das D'Alembertsche Princip im Fall nichtholonomer Bedingungsgleichungen nur dann, wenn in 40.) unter δ eine <u>Hölderische</u> Variation verstanden wird. Diese aber führt immer zum Ziel; sowohl für holonome, als für nichtholonome Systeme.

Wir gehen nun daran aus der Gleich 40.) die Lagr.-Gleichungen für von einander unabhängige nichtholonome Coordinaten abzuleiten.

Diese nichtholonomen Coordinaten mögen gerade zur identischen Befriedigung der nichtholonomen Bedingungs-Gleichungen eingeführt worden sein; dann befriedigen also die Ansätze [1.)]

$$\dot{x}_\nu = \sum_1^n{}^\sigma \alpha_{\nu\sigma} \dot{p}_\sigma \qquad 49.)$$

die Gleichungen 44.) und demnach ebenso die Ansätze

$$\delta x_\nu = \sum_1^n{}^\sigma \alpha_{\nu\sigma} \delta p_\sigma \qquad 50.)$$

die Gleichungen 45.) - Entsprechend der Gl 46. hat man noch:

$$\delta \dot{x}_\nu = \sum_1^n{}^\sigma \dot{\alpha}_{\nu\sigma} \delta p_\sigma + \sum_1^n{}^\sigma \alpha_{\nu\sigma} \frac{d}{dt}(\delta p_\sigma) \qquad 51.)$$

oder weiter:

$$\delta \dot{x}_\nu = \sum_1^n{}^\sigma \delta p_\sigma \sum_1^n{}^\tau \frac{\partial \alpha_{\nu\sigma}}{\partial p_\tau} \dot{p}_\tau + \sum_1^n{}^\sigma \alpha_{\nu\sigma} \frac{d}{dt}(\delta p_\sigma) \quad [2.)] \qquad 52.)$$

Wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit der p_σ folgt aus 49.)

$$\frac{\partial \dot{x}_\nu}{\partial p_\sigma} = \sum_1^n{}^\tau \frac{\partial \alpha_{\nu\tau}}{\partial p_\sigma} \dot{p}_\tau \qquad 53.)$$

$$\frac{\partial \dot{x}_\nu}{\partial \dot{p}_\sigma} = \alpha_{\nu\sigma} \qquad 54.)$$

1.) Ansätze: $\dot{x}_\nu = \sum_1^{\tilde{n}}{}^\sigma \alpha_{\nu\sigma} \dot{p}_\sigma$

$$\Delta \dot{x}_\nu = \sum_1^{\tilde{n}}{}^\sigma \tilde{\alpha}_{\nu\sigma} \Delta \dot{p}_\sigma + \sum_1^{\tilde{n}}{}^\sigma \Delta \alpha_{\nu\sigma} \dot{p}_\sigma$$

würden die Gleichungen 41 und 42 befriedigen.

2.) Wir verwenden überall nur $\frac{d}{dt}(\delta p_\rho)$ und nicht auch $\delta \dot{p}_\rho$; die Frage ob immer $\frac{d}{dt}(\delta p_\rho) = \delta \dot{p}_\rho$ sei, wird also nirgends berührt.

Anderseits ist, wenn man T, die kinetische Energie einmal als Function der $\dot{x}_\nu$ dann der $p_\varsigma, \dot{p}_\varsigma$ betrachtet:

$$\frac{\partial T}{\partial p_\sigma} = \sum_1^{3n}{}^{\nu} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_\nu}\cdot\frac{\partial \dot{x}_\nu}{\partial p_\sigma} = \sum_1^{3n}{}^{\nu} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_\nu} \sum_1^{n}{}^{\tau} \frac{\partial \alpha_{\nu\tau}}{\partial p_\sigma} \qquad 55.)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_\sigma} = \sum_1^{3n}{}^{\nu} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_\nu}\cdot\frac{\partial \dot{x}_\nu}{\partial \dot{p}_\gamma} = \sum_1^{3n}{}^{\nu} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_\nu}\cdot \alpha_{\nu\sigma} \qquad 56.)$$

und weiter

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_\nu} = m_\nu \dot{x}_\nu \qquad 57.)$$

somit:

$$\frac{\partial T}{\partial p_\sigma} = \sum_1^{n}{}^{\tau} \dot{p}_\tau \sum_1^{3n}{}^{\nu} m_\nu \dot{x}_\nu \frac{\partial \alpha_{\nu\tau}}{\partial p_\sigma} \qquad 58.)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_\sigma} = \sum_1^{3n}{}^{\nu} m_\nu \dot{x}_\nu \alpha_{\nu\sigma} \qquad 59.)$$

(vergl. Gl. 14. und 16.)

Wenn man nun von der Gleichung

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T+U)\,dt = \sum_1^{3n}{}^{\nu} \Big| m_\nu \dot{x}_\nu \delta x_\nu \Big|_0^1$$

zu den Lagrange-Gleichungen für die p_ς gelangen will, muss man δT und δU in den δp_ς und $\frac{d}{dt}(\delta p_\varsigma)$ [1.)] ausdrücken. Jedesfalls ist:

$$\delta T = \sum_1^{3n}{}^{\nu} m_\nu \dot{x}_\nu \delta \dot{x}_\nu \qquad 60.)$$

unter Benützung der Gl. 52 wird daraus:

$$\delta T = \sum_1^{n}{}^{\sigma} \delta p_\sigma \sum_1^{n}{}^{\tau} \dot{p}_\tau \sum_1^{3n}{}^{\nu} m_\nu \dot{x}_\nu \frac{\partial \alpha_{\nu\sigma}}{\partial p_\tau} +$$

$$+ \sum_1^{n}{}^{\sigma} \frac{d}{dt}(\delta p_\sigma) \sum_1^{3n}{}^{\nu} m_\nu \dot{x}_\nu \alpha_{\nu\sigma} \qquad 61.)$$

1.) Wir verwenden überall nur $\frac{d}{dt}(\delta p_\varsigma)$ und nicht auch $\delta \dot{p}_\varsigma$; die Frage ob immer $\frac{d}{dt}(\delta p_\varsigma) = \delta \dot{p}_\varsigma$ sei, wird also nirgends berührt.

Die Vergleichung von 61. mit 58–59. zeigt, dass:

$$\delta T = \sum_1^n \sigma \left\{ \delta p_\sigma \frac{\partial T}{\partial p_\sigma} + \frac{d}{dt}(\delta p_\sigma) \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_\sigma} \right\} +$$

$$+ \sum_1^n \sigma \, \delta p_\sigma \sum_1^n \tau \, \dot{p}_\tau \sum_1^{3n} \nu \, m_\nu \dot{x}_\nu \left(\frac{\partial \alpha_{\nu\sigma}}{\partial p_\tau} - \frac{\partial \alpha_{\nu\tau}}{\partial p_\sigma} \right) \qquad 62.)$$

denn der Coefficient von $\frac{d}{dt}(\delta p_\sigma)$ in 61.) fällt wohl mit 59.) zusammen; der Coefficient von δp_σ aber enthält das Glied $\frac{\partial \alpha_{\nu\sigma}}{\partial p_\tau}$ 58.) hingegen das Glied $\frac{\partial \alpha_{\nu\tau}}{\partial p_\sigma}$.

Weiter ist:

$$\delta U = \sum_1^{3n} \nu \frac{\partial U}{\partial x_\nu} \delta x_\nu = \sum_1^n \sigma \, \delta p_\sigma \sum_1^{3n} \nu \frac{\partial U}{\partial x_\nu} \alpha_{\nu\sigma} =$$

$$= \sum_1^n \sigma \, \delta p_\sigma \frac{\partial U}{\partial p_\sigma} \qquad 63.)$$

Aus 62 und 63 folgt also:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T+U)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_1^n \sigma \left\{ \delta p_\sigma \frac{\partial (T+U)}{\partial p_\sigma} + \frac{d}{dt}(\delta p_\sigma) \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_\sigma} \right\} +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_1^n \sigma \, \delta p_\sigma \sum_1^n \tau \, \dot{p}_\tau \sum_1^{3n} \nu \, m_\nu \dot{x}_\nu \left(\frac{\partial \alpha_{\nu\sigma}}{\partial p_\tau} - \frac{\partial \alpha_{\nu\tau}}{\partial p_\sigma} \right) \qquad 64.)$$

und durch partielle Integration:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T+U)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_1^n \sigma \, \delta p_\sigma \left\{ \frac{\partial (T+U)}{\partial p_\sigma} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_\sigma} \right) \right\} +$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_1^n \sigma \, \delta p_\sigma \sum_1^n \tau \, \dot{p}_\tau \sum_1^{3n} \nu \, m_\nu \dot{x}_\nu \left(\frac{\partial \alpha_{\nu\sigma}}{\partial p_\tau} - \frac{\partial \alpha_{\nu\tau}}{\partial p_\sigma} \right) +$$

$$+ \left| \sum_1^n \sigma \, \delta p_\sigma \frac{\partial T}{\partial \dot{p}_\sigma} \right|_0^1 \qquad 65.)$$

Multipliciert man Gl. 59 beiderseits mit δp_σ und summiert über σ so sieht man, dass die Gl. 40 auch geschrieben werden kann:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(T+U)\,dt = \left|\sum_1^n{}_\sigma\, \delta p_\sigma \frac{\partial T}{\partial \dot p_\sigma}\right|_0^1 \qquad 66.)$$

Subtrahiert man nun 65 von 66 so erhält man:

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} dt \sum_1^n{}_\sigma\, \delta p_\sigma \left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot p_\sigma}\right) - \frac{\partial (T+U)}{\partial p_\sigma}\right\} + \qquad 67.)$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} dt \sum_1^n{}_\sigma\, \delta p_\sigma \sum_1^n{}_\tau\, \dot p_\tau \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu \dot x_\nu \left(\frac{\partial \alpha_{\nu\tau}}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial \alpha_{\nu\sigma}}{\partial p_\tau}\right)$$

Wegen der Unabhängigkeit der δp_σ und weil

$$\frac{\partial (T+U)}{\partial \dot p_\sigma} = \frac{\partial T}{\partial \dot p_\sigma}$$

folgt daraus:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial (T+U)}{\partial \dot p_\sigma}\right) - \frac{\partial (T+U)}{\partial p_\sigma} + \sum_1^n{}_\tau\, \dot p_\tau \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu \dot x_\nu \left(\frac{\partial \alpha_{\nu\tau}}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial \alpha_{\nu\sigma}}{\partial p_\tau}\right) =$$

$$= 0 \qquad 68.)$$

Das sind nun wieder die Lagrange-Gleichungen mit den von <u>Boltzmann</u> angegebenen Zusatzgliedern. Nur ist im Gegensatz zum vorigen Paragraphen auch das Auftreten von Fernkräften mit Potential mitberücksichtigt.

§ 4.

Die in den vorhergehenden Paragraphen gegebenen Entwicklungen setzten voraus, dass die Anzahl der Systempunkte – n – endlich sei. Wir werden im Folgenden mit Systemen zu thun haben, für die zwar n unendlich gross ist, aber dennoch eine endliche Anzahl allgemeiner Coordinaten zur Determinierung der Bewegung ausreichen. Ein einfaches Exempel sind die 3 Schwerpunkts-coordinaten und 3 Eulerschen Winkel, die zur Bestimmung der Bewegung eines starren Körpers ausreichen trotzdem er aus unendlich vielen materiellen Punkten besteht.

Wir wollen nun kurz einen Theil der Aenderungen zusammenstellen, die dadurch die Bezeichnungen und Entwicklungen der vorhergehenden Paragraphen erfahren.

Zunächst identificieren wir ein bestimmtes materielles Theilchen im Verlauf der Bewegung am bequemsten dadurch, dass wir es ein für allemal durch die rechtwinkligen Coordinaten charakterisieren, die es zu dem willkürlich herausgegriffenen Zeitpunkt t_0 besass. Diese nennen wir a, b, c.

In dem speciellen Fall, dass das Continuum eine Flüssigkeit ist läuft diese Verfügung darauf hinaus, dass wir die Methode von Lagrange und nicht die von Euler anwenden.

Einen durchlaufenden Index ν können wir nicht mehr gebrauchen; statt der x_ν verwenden wir nunmehr x, y, z

statt

$$\sum_{1}^{3n}{}_{\nu} f(x_\nu) \tag{69.)}$$

hat man jetzt:

$$\iiint da\,db\,dc \left\{ f(x) + f(y) + f(z) \right\} \tag{70.)}$$

wo das dreifache Integral über das Gebiet zu erstrecken ist, das zum Zeitpunkt t_0 von den Theilchen des Systems erfüllt wurde [1.)]

Wir merken noch an, dass offenbar (ebenso wie für die $\sum_{1}^{3n}{}_{\nu}$) gilt:

$$\frac{d}{dt}\iiint da\,db\,dc\;\bar{\Phi} = \iiint da\,db\,dc\,\frac{d\bar{\Phi}}{dt} \tag{71.)}$$

Die Gleichung

$$\delta\iiint da\,db\,dc\;\bar{\Phi} = \iiint da\,db\,dc\;\delta\bar{\Phi} \tag{72.)}$$

gilt unbedingt, wenn unter δ die bei Festhaltung

1.) An dieser Stelle erkennt man, zu welchen Complicationen es führt, wenn man als Urvariable die „Bahnlänge" und nicht die Zeit verwenden will. (Vergl. Anmerk. 2. pag. 8.)

der Coordinaten und Geschwindigkeiten allein durch Veränderung der Beschleunigungen bewirkte Variation verstanden wird. – Wenn unter δ die durch Veränderung der Coordinaten bewirkte Variation verstanden ist, so gilt sie noch immer, wenn nur zur Zeit t_0 die Lage der Theilchen unvariiert bleibt.

Für den Integranden des dreifachen Integrals machen wir stillschweigend immer jene Stetigkeits-Voraussetzungen innerhalb des Integrationsgebietes, die für die Gültigkeit der verwendeten Transformationen erforderlich sind.

An die Stelle von m_ν tritt

$$\varrho\, da\, db\, dc \qquad 73.)$$

an die Stelle von $\alpha_{\nu\varrho}$ und

$$\dot{x}_\nu = \sum_1^n{}_\varrho\, \alpha_{\nu\varrho}\, \dot{p}_\varrho$$

kommen jetzt:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_1^n{}_\varrho\, \alpha_\varrho\, \dot{p}_\varrho \\ \dot{y} &= \sum_1^n{}_\varrho\, \beta_\varrho\, \dot{p}_\varrho \\ \dot{z} &= \sum_1^n{}_\varrho\, \gamma_\varrho\, \dot{p}_\varrho \end{aligned}\right\} \qquad 74.)$$

wo die α, β, γ ebenso wie x, y, z auf ein durch a, b, c charakterisiertes Theilchen bezogen sind.

Die übrigen Aenderungen die eintreten, werden wir dort besprechen wo sie jeweils verwendet werden.

§ 5.

Nach diesen mehr vorbereitenden Auseinandersetzungen wenden wir uns der Frage zu, wie sich der hydrodynamische Druck vom Standpunkt der Hertz'schen Mechanik darstellt.

Wir denken uns zunächst einen Ballen einer incompressibeln (reibungsloser) Flüssigkeit durch einen leeren, kräftefreien Raum fliegend. Es mögen auch alle „inneren" Kräfte (Capillarität, Gravitation etc.) fehlen. Wir haben dann offenbar ein „freies materielles System vor uns, das sich von den in der Hertz-Mechanik behandelten Systemen nur darin unterscheidet, dass es ein Continuum ist.

Es erübrigt allerdings noch, zuzusehen, ob die für dieses System geltenden Bedingungsgleichungen nämlich die Incompressibilitäts-Bedingung angewendet auf die infinitesimale Umgebung jedes Punktes im Innern der Flüssigkeit den Anforderungen genügt, die Hertz an die Form der Bedingungsgleichungen stellt; denn erst dann mag es als „freies materielles System" dem Princip der geradesten Bahn unterworfen sein (N° 109-123)

Zunächst müssen danach die Bedingungen Gleichungen und nicht Ungleichungen sein. Die Incompress. Gleichung muss also als Gleichung nicht als Ungleichung verwendet werden. Sie verhindert dann nicht nur ein Zusammendrücken sondern auch ein Zerreissen der Flüssigkeit. Es kommen so auch beliebig grosse negative Drucke vor, wie ja auch die „starren“ Verbindungen der Hertz'schen Mechanik beliebige „Druck“- und „Zug“-Beanspruchungen“ ertragen müssen.

Dass die Incompressibilitätsbedingung in der Lagrange-Form auch allen übrigen Anforderungen der Hertz'schen Mechanik genügt, zeigte A. Brill[1.)] durch folgende Betrachtung:

„Wenn Hertz von den Bedingungs-Gleichungen, die die Zusammenhänge zwischen den Systempunkten definieren, fordert, dass sie nur die Coordinaten dieser Punkte und deren erste Differentiale enthalten, so scheint er damit continuierliche Massen zunächst aus der Behandlung auszuschliessen. Und doch muss man sich die verborgenen Massen, schon wegen ihrer cyklischen Bewegung, als den Raum erfüllende Materie denken. Dabei ist mit Rücksicht auf die Analogie

---

1.) Mittheil. des mathem.-naturw. Vereins in Württemberg 1899.

mit Flüssigkeitswirbeln als Bedingungsgleichung diejenige zuzulassen, die die Incompressibilität, die „starre Verbindung kleinster Theile" (Einleitung S. 49) aussagt.

Lagrange stellt dieselbe dar mit Hilfe der partiellen Differentialquotienten der Coordinaten x, y, z eines Punktes der Flüssigkeit nach den Anfangswerten a, b, c derselben. Nämlich durch die Gleichung

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial c} & \frac{\partial y}{\partial c} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} = 1 \qquad 75$$

Aber man kann dieser Gleichung die Form geben:

$$\frac{1}{da\,db\,dc} \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x + \frac{\partial x}{\partial a} da & \text{---} & \text{---} & 1 \\ x + \frac{\partial x}{\partial b} db & \text{---} & \text{---} & 1 \\ x + \frac{\partial x}{\partial c} dc & \text{---} & \text{---} & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad 76.)$$

wo der Ausdruck links nur noch die Coordinaten der vier (unendlich benachbarten) Punkte enthält, die von denjenigen Massentheilchen eingenommen werden, die ursprünglich die Eckpunkte (a, b, c); $(a+da, b, c)$; $(a, b+db, c)$; $(a, b, c+dc)$ eines Tetraeders bildeten, sowie drei Seitenlängen da, db, dc des Tetraeders, sodass die

Gleichung nunmehr genau die von Hertz angelassene Gestalt hat."

Das Princip der geradesten Bahn auf unseren Fall angewendet verlangt:

$$\delta\left(\frac{mc^2}{2}\right) = \delta\iiint\frac{\rho}{2}\left(\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2\right)da\,db\,dc = 0 \qquad 77.)$$

(siehe Gl. 5. sammt Anmerkung ferner Gl. 11, 70, 73.)
Hiebei ist unter δ der Effect der Variationen $\delta\ddot{x}, \delta\ddot{y}, \delta\ddot{z}$ verstanden, wofern diese Variationen mit der Lagrangeschen Incompressibilitäts-Bedingung

$$\Delta = 1 \qquad 78.)$$

verträglich sind.

Um diese Bedingung nach der Multiplicatoren methode in 77 einzuführen haben wir folgendermassen zu verfahren:

Wir differenzieren die Bedingungs-Gleichung 78.) zunächst ein erstesmal total nach der Zeit.[1.)]

1.) $\frac{d}{dt}$ bedeutet entsprechend der Verwendung dieses Symbols bei den discreten Systemen: man verfolge ein individuelles Theilchen (variiere also die Zeit bei constantem a, b, c.) Danach sind $\frac{d}{dt}$ und $\frac{\partial}{\partial a}, \frac{\partial}{\partial b}, \frac{\partial}{\partial c}$ untereinander vertauschbar – im Gegensatz zu der Eulerschen Darstellungsweise, wo $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ vertauschbar sind – Ein Punkt über der Variabeln bedeute $\frac{d}{dt}$.

$$\frac{d}{dt}(\Delta) = \frac{\partial \dot{x}}{\partial a}\cdot\frac{\partial \Delta}{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)} + \frac{\partial \dot{x}}{\partial b}\cdot\frac{\partial \Delta}{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial b}\right)} + \frac{\partial \dot{x}}{\partial c}\cdot\frac{\partial \Delta}{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial c}\right)} +$$
$$+ \frac{\partial \dot{y}}{\partial a}\cdot\frac{\partial \Delta}{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial b}\cdot\frac{\partial \Delta}{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial b}\right)} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial c}\cdot\frac{\partial \Delta}{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial c}\right)} + \qquad 79.)$$
$$+ \frac{\partial \dot{z}}{\partial a}\cdot\frac{\partial \Delta}{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial b}\,\frac{\partial \Delta}{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial b}\right)} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial c}\cdot\frac{\partial \Delta}{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial c}\right)} = 0$$

Eine neuerliche Differentiation nach der Zeit liefert für $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ die Bedingung:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\Delta) = \frac{\partial \ddot{x}}{\partial a}\cdot\frac{\partial \Delta}{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)} + \frac{\partial \ddot{x}}{\partial b}\cdot\frac{\partial \Delta}{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial b}\right)} + \frac{\partial \ddot{x}}{\partial c}\cdot\frac{\partial \Delta}{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial c}\right)} +$$
$$+ \frac{\partial \ddot{y}}{\partial a}\cdot\frac{\partial \Delta}{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)} + \frac{\partial \ddot{y}}{\partial b}\cdot\frac{\partial \Delta}{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial b}\right)} + \frac{\partial \ddot{y}}{\partial c}\cdot\frac{\partial \Delta}{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial c}\right)} + \qquad 80.)$$
$$+ \frac{\partial \ddot{z}}{\partial a}\cdot\frac{\partial \Delta}{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)} + \frac{\partial \ddot{z}}{\partial b}\cdot\frac{\partial \Delta}{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial b}\right)} + \frac{\partial \ddot{z}}{\partial c}\cdot\frac{\partial \Delta}{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial c}\right)} +$$
$$+ R = 0$$

wo R nicht mehr die $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ enthält.

Man hat sich vorzustellen, dass die Gl. 80) ∞^3 Gleichungen vertritt, insofern sie für jedes Wertetripel a, b, c gilt. Will man diese Gleichungen nach der Multiplicatorenmethode in 77. einführen so können die ∞^3 Multiplicatoren als die ∞^3 Werte einer Function von a, b, c angesehen werden. (Wir setzen voraus, dass diese Function und ihre Ableitungen innerhalb des Integrationsbereiches stetig sind.) Jede dieser ∞^3 Gleichungen 80.) ist, mit ihrem Multiplicator multipliciert zur linken Seite von 77.) zu addieren.

Setzen wir den Multiplicator in der Form

$$-\lambda\, da\, db\, dc \qquad 81.)$$

voraus so gelangen wir zur Gleichung:

$$\delta \iiint \frac{\varrho}{2}\left(\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2\right) da\, db\, dc - \iiint \lambda\, \delta \frac{d^2}{dt^2}(\Delta)\, da\, db\, dc = 0 \qquad 82.)$$

Es ist:

$$\delta R = 0 \qquad 83.)$$

weil R $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ nicht enthält.

Nach der auf Gleichung 72.) folgenden Bemerkung ist:

$$\delta \iiint \frac{\varrho}{2}\left(\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2\right) da\, db\, dc = \iiint \varrho\left(\ddot{x}\delta\ddot{x}+\ddot{y}\delta\ddot{y}+\ddot{z}\delta\ddot{z}\right) da\, db\, dc \qquad 84.)$$

So wird aus 82.):

$$\begin{aligned}
&\iiint da\, db\, dc\, \varrho\left(\ddot{x}\delta\ddot{x}+\ddot{y}\delta\ddot{y}+\ddot{z}\delta\ddot{z}\right) - \\
&- \iiint da\, db\, dc\, \lambda \Bigg\{ \frac{\partial\delta\ddot{x}}{\partial a}\cdot\frac{\partial\Delta}{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)} + \frac{\partial\delta\ddot{x}}{\partial b}\cdot\frac{\partial\Delta}{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial b}\right)} + \frac{\partial\delta\ddot{x}}{\partial c}\cdot\frac{\partial\Delta}{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial c}\right)} + \\
&\qquad + \frac{\partial\delta\ddot{y}}{\partial a}\cdot\frac{\partial\Delta}{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)} + \frac{\partial\delta\ddot{y}}{\partial b}\cdot\frac{\partial\Delta}{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial b}\right)} + \frac{\partial\delta\ddot{y}}{\partial c}\cdot\frac{\partial\Delta}{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial c}\right)} + \\
&\qquad + \frac{\partial\delta\ddot{z}}{\partial a}\,\frac{\partial\Delta}{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)} + \frac{\partial\delta\ddot{z}}{\partial b}\cdot\frac{\partial\Delta}{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial b}\right)} + \frac{\partial\delta\ddot{z}}{\partial c}\cdot\frac{\partial\Delta}{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial c}\right)} \Bigg\} = \\
&= 0 \qquad 85.)
\end{aligned}$$

Durch partielle Integration des zweiten Integrales gewinnt man:

$$\iiint da\,db\,dc\; \varrho(\ddot{x}\delta\ddot{x}+\ddot{y}\delta\ddot{y}+\ddot{z}\delta\ddot{z}) +$$

$$+\iiint da\,db\,dc \Big\{ \delta\ddot{x}\left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\lambda\frac{\partial\Delta}{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)}\right)+\frac{\partial}{\partial b}\left(\lambda\frac{\partial\Delta}{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial b}\right)}\right)+\frac{\partial}{\partial c}\left(\lambda\frac{\partial\Delta}{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial c}\right)}\right)\right]+$$

$$+\delta\ddot{y}\left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\lambda\frac{\partial\Delta}{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)}\right)+\frac{\partial}{\partial b}\left(\lambda\frac{\partial\Delta}{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial b}\right)}\right)+\frac{\partial}{\partial c}\left(\lambda\frac{\partial\Delta}{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial c}\right)}\right)\right]+$$

$$+\delta\ddot{z}\left[\frac{\partial}{\partial a}\left(\lambda\frac{\partial\Delta}{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)}\right)+\frac{\partial}{\partial b}\left(\lambda\frac{\partial\Delta}{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial b}\right)}\right)+\frac{\partial}{\partial c}\left(\lambda\frac{\partial\Delta}{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial c}\right)}\right)\right]\Big\}+$$

$$+\iint d\omega\,\lambda\Big\{\delta\ddot{x}\left[\cos(n,a)\frac{\partial\Delta}{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)}+\cos(n,b)\frac{\partial\Delta}{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial b}\right)}+\cos(n,c)\frac{\partial\Delta}{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial c}\right)}\right]+$$

$$+\delta\ddot{y}\left[\cos(n,a)\frac{\partial\Delta}{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)}+\cos(n,b)\frac{\partial\Delta}{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial b}\right)}+\cos(n,c)\frac{\partial\Delta}{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial c}\right)}\right]+$$

$$+\delta\ddot{z}\left[\cos(n,a)\frac{\partial\Delta}{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)}+\cos(n,b)\frac{\partial\Delta}{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial b}\right)}+\cos(n,c)\frac{\partial\Delta}{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial c}\right)}\right]$$

$$=0 \qquad 86.)$$

Man beachte, dass nach einem Satz über Functionaldeterminanten:

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial\Delta}{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)}\right)+\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial\Delta}{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial b}\right)}\right)+\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{\partial\Delta}{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial c}\right)}\right)=0 \qquad 87.)$$

und ebenso für y und z.

Also bleiben nach Ausführung der Operationen

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\lambda\frac{\partial\Delta}{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)}\right)$$

nur die Glieder:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial a}\cdot\frac{\partial\Delta}{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)}+\frac{\partial\lambda}{\partial b}\cdot\frac{\partial\Delta}{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial b}\right)}+\frac{\partial\lambda}{\partial c}\cdot\frac{\partial\Delta}{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial c}\right)} \qquad 88.)$$

und die analogen für y und z in 86.) übrig.

Die Ausdrücke 88.) lassen sich sehr einfach ausdrücken: Denkt man sich nämlich einmal die Beziehungen zwischen den x, y, z, a, b, c und t nach a, b, c aufgelöst, so gilt für Differentiation bei constanten t die Beziehung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial a}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial a}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial a}&=1\\
\frac{\partial b}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{\partial b}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial b}+\frac{\partial b}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial b}&=1 \qquad 89.)\\
\frac{\partial c}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial c}+\frac{\partial c}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial c}+\frac{\partial c}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial c}&=1
\end{aligned}$$

Die Auflösung nach $\frac{\partial a}{\partial x}$ liefert:

$$\frac{\partial a}{\partial x}=\frac{\frac{\partial\Delta}{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)}}{\Delta}=\frac{\partial\Delta}{\partial\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)} \qquad 90.)$$

analoge Gleichungen gelten für $y, z; b, c$.
Danach wird aus den Ausdrücken 88.)

$$\frac{\partial\lambda}{\partial a}\cdot\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial\lambda}{\partial b}\cdot\frac{\partial b}{\partial x}+\frac{\partial\lambda}{\partial c}\,\frac{\partial c}{\partial x} \qquad 91.)$$

oder

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x} \qquad 92.)$$

die Differentiation bei constantem t verstanden.

So wird schließlich aus den Gl. 86 die folgende:

$$\iiint da\,db\,dc\left\{\delta\ddot{x}\left(\rho\ddot{x}+\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)+\delta\ddot{y}\left(\rho\ddot{y}+\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)+\delta\ddot{z}\left(\rho\ddot{z}+\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)\right\}+$$

$$
+ \iint d\omega . \lambda \left\{ \delta \ddot{x} \begin{vmatrix} \cos(na) & \cos(nb) & \cos(nc) \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} + \right.
$$

$$
+ \delta \ddot{y} \begin{vmatrix} \cos(na) & \cos(nb) & \cos(nc) \\ \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} + \tag{93.}
$$

$$
\left. + \delta \ddot{z} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \cos(na) & \cos(nb) & \cos(nc \end{vmatrix} \right\} = 0
$$

Wie von vornherein zu erwarten ist, hat das Oberflächenintegral trotz seiner complicierten Gestalt eine einfache, anschauliche Bedeutung. Man erschliesst dieselbe leicht auf grund der Bemerkung, dass die Wahl des Zeitpunktes t_0 völlig willkürlich ist.

Also möge gerade der ins Auge gefasste Zeitpunkt $t - t_0$ heissen. Dann sind die eben vorhandenen x, y, z eines Theilchens zugleich seine a, b, c und es ist augenblicklich:

$$
\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial a} = \frac{\partial y}{\partial b} = \frac{\partial z}{\partial c} = 1 \\ \frac{\partial x}{\partial b} = \frac{\partial y}{\partial c} = \dots = 0 \end{aligned} \tag{94.}
$$

Bei dieser durchaus zulässigen Wahl des Anfangspunktes der Zeitmessung reduciert sich also das Oberflächenintegral auf die Form:

$$\iint d\omega\, \lambda \left\{ \delta\ddot{x} \cos(na) + \delta\ddot{y} \cos(nb) + \delta\ddot{z} \cos(nc) \right\} \qquad 95.)$$

also ein Integral über die grade vorhandene Begrenzung und die gerade vorhandenen Werte von $\lambda, \delta\ddot{x}, \delta\ddot{y}, \delta\ddot{z}$ und den Richtungscosinussen.

Diese Grösse ist offenbar ihrer Bedeutung nach invariant gegen die Wahl des Anfangspunktes der Zeitmessung. Für eine andere Wahl des t_0 schreibt sie sich

$$\iint df\, \lambda \left\{ \delta\ddot{x} \cos(nx) + \delta\ddot{y} \cos(ny) + \delta\ddot{z} \cos(nz) \right\} \qquad 96.)$$

wo df und $\cos(nx)$ anzeigen, dass sich die Integration über die zur Zeit t vorhandene Begrenzung bezieht.

So führt also zuletzt das Princip der geradesten Bahn in seiner Anwendung auf den freifliegenden Flüssigkeitsball auf:

$$\iiint da\, db\, dc \left\{ \delta\ddot{x} \left(\rho\ddot{x} + \frac{\partial\lambda}{\partial x} \right) + \delta\ddot{y} \left(\rho\ddot{y} + \frac{\partial\lambda}{\partial y} \right) + \delta\ddot{z} \left(\rho\ddot{z} + \frac{\partial\lambda}{\partial z} \right) \right\} +$$

$$+ \iint df \cdot \lambda \left\{ \delta\ddot{x} \cos(nx) + \delta\ddot{y} \cos(ny) + \delta\ddot{z} \cos(nz) \right\} = 0 \qquad 97.)$$

und zwar nunmehr für jede beliebige Wahl von $\delta\ddot{x}, \delta\ddot{y}, \delta\ddot{z}$. Dann aber muss sein:

$$\ddot{x} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\lambda}{\partial x}$$

$$\ddot{y} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\lambda}{\partial y} \qquad 98.)$$

$$\ddot{z} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\lambda}{\partial z}$$

für das Innere der Flüssigkeit und

$$\lambda = 0 \qquad 99.)$$

für die Oberfläche.

Nennen wir jene Grösse, deren „Gefälle" die Beschleunigung der Flüssigkeitstheilchen determiniert „Druck" (p) so gilt:

$$p = \lambda \qquad 100.)$$

er wird also im Sinn der Hertzschen Mechanik wie alle Kräfte als Multiplicator der Bedingungsgleichung eingeführt. Er genügt für den hier behandelten Fall denselben Gesetzen wie der hydrodynamische Druck.

§ 6.

Um die Analogie mit der Hertz'schen Mechanik weiter zu verfolgen, betrachten wir folgenden Fall:

Das freie System bestehe zum Theil aus einer incompressibeln Flüssigkeit zum Theil aus festen Körpern. Die Begrenzung der Flüssigkeit werde zum Theil von den starren Körpern gebildet, zum Theil aber mag sie eine „freie Oberfläche" sein. [1.)]

Für die Gesammtheit der Systempunkte kommen dann im ganzen drei Reihen von Bedingungs-Gleichungen in Betracht:

1.) Die Aussage, dass die einzelnen Körper starr sind und vielleicht noch andere (holonome) Bedingungen ihre Beweglichkeit beschränken.

2.) dass die Flüssigkeit incompressibel sei

3.) kommen noch Bedingungsgleichungen für jene Theile der Flüssigkeits-Begrenzung in Betracht, die durch die Oberfläche der starren Körper gebildet werden. Sie besagen, dass jene Flüssigkeitstheilchen, die zu irgend einem Zeitpunkt an der Oberfläche eines der starren Körper anlagen, dauernd dieser Oberfläche entlang gleiten. [2.)]

1.) Es wird in diesem § noch nicht vorausgesetzt, dass die Flüssigkeit wirbelfrei oder einfach zusammenhängend sei.

2.) Die hiefür nöthigen Stetigkeitsvoraussetzungen siehe Kirchhoff Mechanik pag.

Die erste Gruppe der Bedingungsgleichungen ist holonom und es ist möglich sie durch Einführung holonomer Coordinaten $p_1 \dots p_r$ identisch zu befriedigen.1.) Seien X, Y, Z die Coordinaten eines Theilchens dieser Körper, so sind also Ansätze von der Form

$$\begin{aligned} dX &= \sum_1^r{}_\varrho\, A_\varrho\, dp_\varrho \\ dY &= \sum_1^r{}_\varrho\, B_\varrho\, dp_\varrho \qquad\qquad 101.) \\ dZ &= \sum_1^r{}_\varrho\, \Gamma_\varrho\, dp_\varrho \end{aligned}$$

möglich, wobei

$$\frac{\partial A_\sigma}{\partial p_\tau} - \frac{\partial A_\tau}{\partial p_\sigma} = 0 \quad \text{etc.} \qquad 102.)$$

Man übersieht nach den Bemerkungen des § 4 leicht, welche Ausdrücke an die Stelle der in § 1 gegebenen treten: Aus dem Ausdruck für mc^2 (10.) wird:

$$\begin{aligned} MC^2 = &\sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma\, \ddot{p}_\varrho \ddot{p}_\sigma \left\{ \iiint d\tau\, P \left(A_\varrho A_\sigma + B_\varrho B_\sigma + \Gamma_\varrho \Gamma_\sigma \right) \right\} + \\ &+ 2 \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma\, \dot{p}_\varrho \ddot{p}_\sigma \sum_1^r{}_\tau\, \dot{p}_\tau \left\{ \iiint d\tau\, P \left(A_\sigma \frac{\partial A_\varrho}{\partial p_\tau} + B_\sigma \frac{\partial B_\varrho}{\partial p_\tau} + \Gamma_\sigma \frac{\partial \Gamma_\varrho}{\partial p_\tau} \right) \right\} + \\ &+ \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma\, \dot{p}_\varrho \dot{p}_\sigma \left\{ \iiint d\tau\, P \left(\dot{A}_\varrho \dot{A}_\sigma + \dot{B}_\varrho \dot{B}_\sigma + \dot{\Gamma}_\varrho \dot{\Gamma}_\sigma \right) \right\} \qquad 103.) \end{aligned}$$

1.) z.B. sind die Schwerpunktscoordinaten und die Eulerschen Winkel solche holonome Coordinaten. Dagegen sind die Drehungen um die Raum oder im Körper festen Axen nichtholonome Coordinaten. Diese Bemerkung ist umso nothwendiger, als gerade bei der üblichen Behandlungsweise des Problems der Bewegung starrer Körper in Flüssigkeiten diese nichtholon. Coordinaten verwendet werden.

Anderseits hat man (vergl. 13.)

$$T = \frac{1}{2}\iiint d\tau P\left(\dot{X}^2+\dot{Y}^2+\dot{Z}^2\right) = \qquad 104.)$$

$$= \frac{1}{2}\iiint \sum_1^n{}_\varsigma \sum_1^n{}_\tau \dot{p}_\varsigma \dot{p}_\tau \left\{ d\tau P\left(A_\varsigma A_\sigma + B_\varsigma B_\sigma + \Gamma_\varsigma \Gamma_\sigma\right)\right\}$$

Nun lassen sich alle Transformationen parallel denen des §1 durchführen und es ergibt sich (vergl. 21.)

$$\delta\left(\frac{MC^2}{2}\right) = \sum_1^n{}_\sigma \delta\ddot{p}_\sigma \left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_\sigma}\right) - \frac{\partial T}{\partial p_\sigma}\right\} + \qquad 105.)$$

$$+ \sum_1^n{}_\sigma \delta\ddot{p}_\sigma \sum_1^n{}_\varsigma \dot{p}_\varsigma \sum_1^n{}_\tau \dot{p}_\tau \left\{\iiint d\tau P\left[A_\varsigma\left(\frac{\partial A_\tau}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial A_\sigma}{\partial p_\tau}\right) + B_\varsigma\left(\frac{\partial B_\tau}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial B_\sigma}{\partial p_\tau}\right) + \Gamma_\varsigma\left(\frac{\partial \Gamma_\tau}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial \Gamma_\sigma}{\partial p_\tau}\right)\right]\right\}$$

Mit Rücksicht auf (102) verschwindet das letzte Glied.

Der Beitrag den die starren Körper zur Variation der Krümmung des freien Systems liefern ist also determiniert durch die Gleichung:

$$\delta\left(\frac{MC^2}{2}\right) = \sum_1^n{}_\sigma \delta\ddot{p}_\sigma \left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_\sigma}\right) - \frac{\partial T}{\partial p_\sigma}\right\} \qquad 106.)$$

damit ist die erste Gruppe der Bedingungs-Gleich erledigt.

Die zweite Gruppe – die Incompressibilitäts-Bedingung werden wir genau wie im vorhergehenden § behandeln.

Die dritte Gruppe werde im Sinne der Hertz'schen Mechanik als „Koppelungsgleichungen" verwendet. Und zwar wollen wir dabei die starren Körper als das „geleitete System" ansehen. (№

Die Begrenzung der starren Körper zu irgend einem Zeitpunkt wird durch die Angabe der $p_1 \dots p_r$ – da wir sie holonom voraussetzten – vollkommen determiniert. Sie möge gegeben sein durch:

$$f(x, y, z, p_1 \dots p_r) = 0 \qquad 106.)$$

Die Gleichungen der dritten Gruppe besagen dann, dass die Flüssigkeitstheilchen, die zu irgend einem Zeitpunkt in der Fläche 106.) lagen dauernd darin verbleiben[1.)]: befriedigen die Coordinaten eines bestimmten Theilchens zu irgend einem Zeitpunkt die Gleichung 106 so befriedigen sie sie dauernd. Also sind für solche Theilchen die sämmtlichen totalen Differentialquotienten der linken Seite von 106 gleich Null.

$$\frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\dot{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\dot{z} + \sum_1^r{}_\sigma \frac{\partial f}{\partial p_\sigma}\dot{p}_\sigma = 0 \qquad 107.)$$

1.) 106 ist ebenso wie die Incompressibilitäts-Bedingung als Gleichung, nicht als Ungleichung zu behandeln; auch sie lässt also beliebige negative Drucke zu!

$$\frac{\partial f}{\partial x}\ddot{x}+\frac{\partial f}{\partial y}\ddot{y}+\frac{\partial f}{\partial z}\ddot{z}+\sum_1^{\sigma}\frac{\partial f}{\partial p_\sigma}\ddot{p}_\sigma+ \qquad 108.)$$

$$+\dot{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\dot{y}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\dot{z}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)+\sum_1^{\tilde{\sigma}}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial p_\sigma}\right)\dot{p}_\sigma=0$$

Die Gleichungen 107. wollen wir nun als „Koppelungs-Gleichungen" zwischen den festen Körpern und der Flüssigkeit ansehen.

Hertz setzt allerdings die Koppelungs-Gleichungen immer in der speciellen Gestalt

$$\dot{y}_\pi-\dot{p}_\varrho=0 \qquad 109.)$$

voraus (N: 454). Der Versuch, die Gl. 107 auf diese Gestalt zu bringen würde jedesfalls erfordern, dass wir die Lage der Grenz-Flüssigkeits-Theilchen durch allgemeine Coordinaten darstellen; dies wollen wir vermeiden.

Überdies muss bezweifelt werden, ob alle starren kinematischen Koppelungen (im Sinn des gewöhnlichen Sprachgebrauches) die z. Th. nichtholonomen Charakter besitzen immer durch passende Coordinatenwahl auf die Form 109. der „directen" Koppelung gebracht werden können. Insbesondere wenn man, wie Hertz, nur holonome Coordinaten zulässt. Danach wären solche kinematische Verbindungen nicht mehr als „Koppelungen" anzusehen, was man wohl als

nicht sachgemäße Einschränkung empfindet.
Aus diesem Grund wird es also erlaubt sein müssen auch die Gleichung 107. schon als „Koppelungs-Gleichung" zu behandeln.

Bezeichnet man wieder mit m die Gesammtmasse der Flüssigkeit mit M die der starren Körper und benützt als Ausdruck für die Krümmungs-Beiträge die Gl. 77 des vorigen und die Gl. 105 dieses Paragraphen so fordert das Princip der geradesten Bahn:

$$\delta\left(\frac{MC^2+mc^2}{2(M+m)}\right) = \frac{1}{m+M}\sum_1^r{}_\sigma\, \delta\ddot{p}_\sigma\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_\sigma}\right)-\frac{\partial T}{\partial p_\sigma}\right\}+ \qquad 110.)$$

$$+\frac{1}{m+M}\iiint da\,db\,dc\,\rho\left\{\ddot{x}\delta\ddot{x}+\ddot{y}\delta\ddot{y}+\ddot{z}\delta\ddot{z}\right\}=0$$

Dabei sind die $\delta\ddot{p}_\sigma$ unabhängig; für die $\delta\ddot{x}, \delta\ddot{y}, \delta\ddot{z}$ aber bestehen noch die Bedingungs-Gleichungen:

$$\delta\,\frac{d^2}{dt^2}\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c}\\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c}\\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c}\end{vmatrix}=0 \qquad 111.)$$

und

$$\delta\,\frac{d^2}{dt^2}f(x,y,z,p_1\ldots\ldots p_r)=0 \qquad 112.)$$

und zwar gilt 111.) für jeden Punkt im Inneren der Flüssigkeit; die Gleichung 112) aber für die Grenze zwischen Flüssigkeit und starren Körpern.

Die Gl. 112. erhält bei rechnerischer Ausführung die Gestalt:

$$\delta\ddot{x}\frac{\partial f}{\partial x} + \delta\ddot{y}\frac{\partial f}{\partial y} + \delta\ddot{z}\frac{\partial f}{\partial z} + \sum_{1}^{n}{}_{\sigma}\frac{\partial f}{\partial p_\sigma}\delta\ddot{p}_\sigma = 0 \qquad 113.)$$

wie man durch Variation der Gl. 108 sieht.

Die Division von 113. durch

$$\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} \qquad 114.)$$

transformiert diese Grenzbedingung für die $\delta\ddot{x}$, $\delta\ddot{y}$, $\delta\ddot{z}$ auf die Form:

$$\delta\ddot{x}\cos(nx) + \delta\ddot{y}\cos(ny) + \delta\ddot{z}\cos(nz) + \sum_{1}^{n}{}_{\sigma} R_\sigma\delta\ddot{p}_\sigma = 0 \qquad 115.)$$

wo zur Abkürzung

$$\frac{\partial f}{\partial p_\sigma}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} = R_\sigma \qquad 116.)$$

gesetzt wurde.

Die Gleichung 115.) repräsentiert ∞^2 Gleichungen, das sie für jedes Flüssigkeitstheilchen gilt, das den starren Körpern anliegt. Will man diese Gleichungen nach der Multiplicatoren-Methode in 110.) einführen, so können die ∞^2 Multiplicatoren als die ∞^2 Werte einer Function von a, b, c angesehen werden, die sie für alle ~~Wert~~ jene Flüssigkeitstheilchen annimmt. Jede dieser ∞^2 Gleichungen ist mit ihrem Multiplicator multipliciert zur linken Seite von 110. zu addieren. Wir setzen den Multiplicator in der Form voraus:

$$-\Pi\, df \qquad 117.)$$

Die Einführung der Bedingung 111.) mag genau wie im vorhergehenden Paragraph geschehen. (Gl. 80, 81, 82).

So wird bei Weglassung des Factors $\frac{1}{M+m}$ aus Gl. 110 die Gleichung:

$$\sum_1^n{}_\sigma\, \delta p_\sigma \left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot p_\sigma}\right) - \frac{\partial T}{\partial p_\sigma}\right\} + \iiint da\,db\,dc\; \varrho \left\{\ddot x \delta x + \ddot y \delta y + \ddot z \delta z\right\} -$$

$$- \iiint da\,db\,dc\; \lambda\, \delta \frac{d^2}{dt^2}(\Delta) - \iint df\, \Pi \left\{\delta x \cos(nx) + \delta y \cos(ny) + \delta z \cos(nz) + \right.$$

$$\left. + \sum_1^n{}_\sigma R_\sigma \delta p_\sigma \right\} = 0 \qquad 118.)$$

Behandelt man die beiden dreifachen Integrale, wie im vorhergehenden Paragraphen (84-87) so erhält man weiter:

$$\sum_1^n{}_\sigma\, \delta p_\sigma \left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot p_\sigma}\right) - \frac{\partial T}{\partial p_\sigma}\right\} +$$

$$+ \iiint da\,db\,dc \left\{\delta x \left(\varrho \ddot x + \frac{\partial \lambda}{\partial x}\right) + \delta y \left(\varrho \ddot y + \frac{\partial \lambda}{\partial y}\right) + \delta z \left(\varrho \ddot z + \frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)\right\} +$$

$$+ \iint df\, \lambda \left\{\delta x \cos(nx) + \delta y \cos(ny) + \delta z \cos(nz)\right\} - \qquad 119.)$$

$$- \iint df\, \Pi \left\{\delta x \cos(nx) + \delta y \cos(ny) + \delta z \cos(nz) + \sum_1^n{}_\sigma R_\sigma \delta p_\sigma\right\} = 0$$

Bezüglich der Doppelintegrale ist noch zu bemerken, dass das zweite nur über die von den starren Körpern gebildete Begrenzung der Flüssigkeit zu erstrecken ist; Das erste aber außerdem auch noch über die eventuell vorhandene „freie Oberfläche".

Die $\delta\ddot{x}, \delta\ddot{y}, \delta\ddot{z}, \delta\ddot{p}_\sigma$ sind nunmehr als von einander unabhängig anzusehen. Das ermöglicht aus 119. die folgenden Gleichungen zu erschließen:

$$\ddot{x} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\lambda}{\partial x}$$

$$\ddot{y} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\lambda}{\partial y} \qquad 120.)$$

$$\ddot{z} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\lambda}{\partial z}$$

im Inneren der Flüssigkeit,

$$\lambda = 0 \qquad 121.)$$

für die Punkte der freien Oberfläche

$$\Pi = \lambda \qquad 122.)$$

für die Punkte wo Flüssigkeit und feste Körper aneinandergrenzen, und endlich

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_\sigma}\right) - \frac{\partial T}{\partial p_\sigma} = \iint df.\Pi.R_\sigma = \iint df.\lambda.R_\sigma \qquad 123.)$$

als die Differentialgleichungen für die Bewegung der starren Körper unter der Wirkung der „von der Flüssigkeit auf sie ausgeübten Kräfte".

§7.

Im vorhergehenden § gaben wir das Analogon zu den № 450-466 der Hertzschen Mechanik: Wir fassten die starren Körper als „geleitetes System" auf. Die Multiplicatoren der Koppelungs-Gleichungen ergaben dann die „Kräfte" die die Flüssigkeit auf die starren Körper ausübt.

Analog zu № 457 der Hertzschen Mechanik sind diese Drucke nur dann wirklich angebbar, wenn neben der Bewegung der starren Körper auch die der Flüssigkeit vorgegeben ist. Die alleinige Angabe der Bewegung der starren Körper genügt noch nicht.

Wenn wir aber unsere Annahme über das System einigermassen specialisieren so gelangen wir zu einem Fall, wo dies Angabe der Bewegung der starren Körper allein schon zur Berechnung der Koppelungs-Reactionen genügt, wo man also etwas mehr aussagen kann als an der entsprechenden Stelle bei Hertz geschieht.

Dazu ist nur nöthig anzunehmen:

1.) Dass der von der Flüssigkeit erfüllte Raum einfach zusammenhängend ist.

2.) Dass er durchaus von den starren Körpern begrenzt ist (also nirgends eine freie Oberfläche besitzt.)

3.) Dass die Flüssigkeit zu irgend einem Zeitpunkt wirbelfrei ist (also, wie man aus der Gl. 120 in der üblichen Weise zu zeigen hätte, dauernd wirbelfrei bleibt.)

Aus der Annahme 3.) folgt, dass die Geschwindigkeit der Flüssigkeitstheilchen ein Potential besitzt.

Mit Hülfe der Annahme 1 und 2 lässt sich dann bekanntlich zeigen, dass dieses Geschwindigkeitspotential eindeutig ist, dass es durch die Bewegung der starren Körper vollständig determiniert ist und dass es sich auf die Form bringen lässt: [1.)]

$$\Phi = \sum_{1}^{r} {}_{\varrho}\, \varphi_\varrho \dot{p}_\varrho \qquad 124.)$$

$$\dot{x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$\dot{y} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \qquad 125.)$$

$$\dot{z} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

Die φ_ϱ sind Functionen von $p_1 \cdots p_r, x, y, z$, die (neben allen Voraussetzungen über Stetigkeit) die Bedingung erfüllen:

$$\frac{\partial^2 \varphi_\varrho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_\varrho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_\varrho}{\partial z^2} = 0 \qquad 126.)$$

innerhalb des Flüssigkeitsraumes ferner

$$\frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial x} \cos(nx) + \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial y} \cos(ny) + \frac{\partial \varphi_\varrho}{\partial z} \cos(nz) + R_\varrho \frac{\partial f}{\partial p_\varrho} = 0 \qquad 127.)$$

1.) Siehe z. B. C. Neumann Hydrodyn. Untersuchungen 1883.

an der Grenze gegen die starren Körper. (vergl. 113, 114, 115, 116.)

Die Beziehung 125. bewirkt, dass die durch sie dargestellte Flüssigkeitsbewegung wirbelfrei ist.

Die Beziehungen 126, dass

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \qquad 128.)$$

also

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = 0 \qquad 129.)$$

und somit die Bewegung der Incompressibilitäts-Bedingung genügt.

Die Bedingungen 3.) endlich garantieren die ~~Gren~~ Befriedigung der Grenzbedingung zwischen festen Körpern und Flüssigkeit. (Vergl. 107 des vorigen §.)

Bringt man die Gl. 125 vermittels 124 auf die Form:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_1^n{}_\varsigma \frac{\partial \varphi_\varsigma}{\partial x} \dot{p}_\varsigma \\ \dot{y} &= \sum_1^n{}_\varsigma \frac{\partial \varphi_\varsigma}{\partial y} \dot{p}_\varsigma \\ \dot{z} &= \sum_1^n{}_\varsigma \frac{\partial \varphi_\varsigma}{\partial z} \dot{p}_\varsigma \end{aligned} \qquad 130.)$$

und setzt abkürzend:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_\varsigma}{\partial x} &= \alpha_\varsigma \\ \frac{\partial \varphi_\varsigma}{\partial y} &= \beta_\varsigma \\ \frac{\partial \varphi_\varsigma}{\partial z} &= \gamma_\varsigma \end{aligned} \qquad 131.)$$

so hat man in:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_1^n{}_\varsigma \alpha_\varsigma \dot{p}_\varsigma \\ \dot{y} &= \sum_1^n{}_\varsigma \beta_\varsigma \dot{p}_\varsigma \\ \dot{z} &= \sum_1^n{}_\varsigma \gamma_\varsigma \dot{p}_\varsigma \end{aligned} \qquad 132.)$$

Ansätze von demselben Charakter, wie die in § 4. Gl 101 gegebenen.[1.)]

Wenn wir wieder mit m die Gesammtmasse der Flüssigkeit mit c ihre „Krümmung", mit Θ ihre kinetische Energie bezeichnen so gelangen wir auf demselben Weg wie im Beginn des § 4 zu einer Gleichung die der Gl 105 jenes § entspricht:

$$\delta\left(\frac{mc^2}{2}\right) = \sum_1^n{}_\sigma\, \delta \ddot{p}_\sigma \left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial \dot{p}_\sigma}\right) - \frac{\partial\Theta}{\partial p_\sigma}\right\} + \qquad 133.)$$

$$+ \sum_1^n{}_\sigma\, \delta\ddot{p}_\sigma \sum_1^n{}_\varrho\, \dot{p}_\varrho \sum_1^n{}_\tau\, \dot{p}_\tau \iiint da\,db\,dc\, \varrho \left\{ \alpha_\varrho\left(\frac{\partial\alpha_\tau}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial\alpha_\sigma}{\partial p_\tau}\right) + \beta_\varrho\left(\frac{\partial\beta_\tau}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial\beta_\sigma}{\partial p_\tau}\right) + \gamma_\varrho\left(\frac{\partial\gamma_\tau}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial\gamma_\sigma}{\partial p_\tau}\right)\right\}$$

An diesem Punkt aber stossen wir auf eine Differenz: während wir von der Gleichung 106 jenes § vermittelst der Beziehungen

$$\frac{\partial A_\sigma}{\partial p_\tau} - \frac{\partial A_\tau}{\partial p_\sigma} = 0 \quad \text{etc.}$$

zu Gl. 107 gelangten, können wir hier das Analoge nicht thun, solange wir nicht wissen ob allgemein etwa die Ausdrücke

$$\frac{\partial\alpha_\tau}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial\alpha_\sigma}{\partial p_\tau} = \frac{\partial}{\partial p_\sigma}\left(\frac{\partial\varphi_\tau}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial p_\tau}\left(\frac{\partial\varphi_\sigma}{\partial x}\right) \qquad 134.)$$

verschwinden.

1.) Und diese Ausdrücke leisten auch Analoges wie jene: sie befriedigen identisch die zwischen den x, y, z bestehenden Bedingungen.

Diesen Punkt wollen wir erst später näher erörtern. Jetzt werden wir noch den ganzen Ausdruck 133. für den Krümmungs-Beitrag der Flüssigkeit zur Aufstellung der Lagrange-Gleichungen verwenden.

Die Totale Krümmung des Systemes: Körper + Flüssigkeit ist:

$$\frac{MC^2+mc^2}{M+m}$$

Das Princip der geradesten Bahn verlangt wieder:

$$\delta\left(\frac{MC^2+mc^2}{2[M+m]}\right)=\frac{1}{M+m}\sum_1^r{}_\sigma\,\delta\dot{p}_\sigma\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial[T+\Theta]}{\partial\dot{p}_\sigma}\right)-\frac{\partial(T+\Theta)}{\partial p_\sigma}\right]+$$

$$+\sum_1^r{}_\sigma\,\delta\dot{p}_\sigma\sum_1^r{}_\varsigma\,\dot{p}_\varsigma\sum_1^r{}_\tau\,\dot{p}_\tau\iiint da\,db\,dc\,\varrho\left\{\alpha_\varsigma\left(\frac{\partial\alpha_\tau}{\partial p_\sigma}-\frac{\partial\alpha_\sigma}{\partial p_\tau}\right)+\beta_\varsigma\left(\frac{\partial\beta_\tau}{\partial p_\sigma}-\frac{\partial\beta_\sigma}{\partial p_\tau}\right)+\gamma_\varsigma\left(\frac{\partial\gamma_\tau}{\partial p_\sigma}-\frac{\partial\gamma_\sigma}{\partial p_\tau}\right)\right\}=0 \qquad 135.)$$

Die $\delta\dot{p}_\sigma$ sind weiter keinen Bedingungen unterworfen, da ja sämmtliche Bedingungs-Gleichungen durch die Ansätze für das Geschwindigkeitspotential identisch erfüllt sind; also muss sein:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{p}_\sigma}\right)-\frac{\partial f}{\partial p_\sigma}+\sum_{1}^{n}{}_{\varrho}\,\dot{p}_\varrho\sum_{1}^{n}{}_{\tau}\,\dot{p}_\tau\iiint da\,db\,dc\,\varrho\left\{\alpha_\varrho\left(\frac{\partial\alpha_\tau}{\partial p_\sigma}-\frac{\partial\alpha_\sigma}{\partial p_\tau}\right)+\right.$$

$$+\beta_\varrho\left(\frac{\partial\beta_\tau}{\partial p_\sigma}-\frac{\partial\beta_\sigma}{\partial p_\tau}\right)+$$

$$\left.+\gamma_\varrho\left(\frac{\partial\gamma_\tau}{\partial p_\sigma}-\frac{\partial\gamma_\sigma}{\partial p_\tau}\right)\right\}$$

$$=0 \qquad 136.)$$

wenn: $$f = T + \Theta \qquad 137.)$$

Fassen wir das Resultat in Worte so besagt es: Das Princip der geradesten Bahn, angewendet auf ein System, das aus einer einfach zusammenhängenden wirbelfreien Flüssigkeit und mehreren starren Körpern besteht (die die Flüssigkeit vollständig begrenzen) ermöglicht, aus der alleinigen Angabe der augenblicklichen Configuration und Geschwindigkeit der starren Körper, die zukünftige Bewegung des ganzen Systems zu berechnen.

Die Gesetze dieser Bewegung werden in den Lehrbüchern immer aus einem Princip von der Form

$$\Delta\int_{t_0}^{t_1}(T+U)\,dt = 0 \qquad 138.)$$

hergeleitet.[1] Die dabei resultierenden Gleichungen – es sei gestattet sie für den Augenblick die Kelvin-Lagrange-Gleichungen zu nennen – haben für den

1.) Thomson u. Tait, Kirchhoff, C. Neumann, Lamb, Weber part. Diff.-gl. II.

Fall eines einfach zusammenhängenden Flüssigkeitsraumes bekanntlich völlig die Gestalt der gewöhnlichen Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_\sigma}\right) - \frac{\partial L}{\partial p_\sigma} = 0$$

und würden sich also für unseren Fall, in dem keine potentielle Energie auftritt auf

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_\sigma}\right) - \frac{\partial T}{\partial p_\sigma} = 0 \qquad 140.)$$

reducieren. Die Gl. 136. enthält also zunächst noch Zusatzglieder.

Es ist auffällig, dass die Herleitung auf Grund des Princips der geradesten Bahn zunächst noch auf Zusatzglieder führt - und zwar auf jene Glieder, die in die Lagrange-Gleichungen eingehen, wenn die verwendeten Coordinaten nichtholonom sind.

Ehe wir diese Zusatzglieder näher untersuchen, wollen wir im folgenden Paragraphen noch eine andere Herleitung der Kelvin-Lagrange-Gleichungen geben, die viele Aehnlichkeit mit der allgemein üblichen aufweist, aber im Gegensatz zu dieser sich an die Variationsvorschrift hält die Hölder angegeben hat. Bei dieser letzteren Herleitung treten dann auch sofort wieder die Zusatzglieder auf.

§8.

Die Behandlung der Bewegung starrer Körper in einer incompressibeln, wirbelfreien (einfach zusammenhängenden) Flüssigkeit geht also aus von einem Princip von der Form:

$$\Delta\int_0^1 (T+U)\,dt = 0 \qquad 141.)$$

Die Autoren bezeichnen diese Gleichung als Hamiltonsches Princip. Die Variation Δ ist dabei so zu verstehen, dass neben der wirklichen (wirbelfreien) Bewegung eine unendlich wenig davon abweichende betrachtet wird die folgenden Bedingungen genügt:

1.) sie führt die starren Körper in derselben Zeit aus der unvariierten Anfangslage in die unvariierte Endlage.

142.) 2.) sie ist ebenfalls wirbelfrei und genügt ebenfalls der Incompressibilitäts-Bedingungen und jenen Bedingungen, die die Bewegung der starren Körper auferlegt.

Wir wollen dieses Variationsverfahren abkürzend als das Δ-Verfahren bezeichnen.

Alle Autoren merken an, dass dabei im allgemeinen die Endlage der Flüssigkeitstheilchen variiert sein wird, trotzdem die Endlage der Körper unvariiert vorausgesetzt wird.

Dieser Umstand bewirkt, dass man zunächst nur behaupten kann:

$$\Delta\int_{t_0}^{t_1}(T+U)\,dt = \iiint \varrho\left[\dot{x}\Delta x + \dot{y}\Delta y + \dot{z}\Delta z\right]_{t_1} da\,db\,dc \tag{143.}$$

das Verschwinden des dreifachen Integrales wird erst auf Grund der Beziehungen

$$\dot{x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \qquad \dot{y} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \qquad \dot{z} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \tag{144.}$$

und

$$\frac{\partial \Delta x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta y}{\partial y} + \frac{\partial \Delta z}{\partial z} = 0 \tag{145.}$$

erwiesen. 1.)

Man hat also die Gl. 141. nicht eigentlich als Hamiltonsches Princip anzusehen.

Dies sieht man noch deutlicher, wenn man gerade jenes Variationsverfahren einschlägt, das dem wirklichen Hamiltonschen Princip entspricht.

Zu diesem Zwecke vergleichen wir mit der wirklichen Bewegung eine variierte die auf folgende Weise entstanden gedacht wird:

Man erteilt in jedem Zeitpunkte den Flüssig-

1.) Und zwar eben nur für einen einfach zusammenhängenden Flüssigkeitsraum. Siehe Boltzmann: Bewegung von Ringen in Flüssigkeiten. Crelle Bd.

keitstheilchen die Verrückung $\delta x, \delta y, \delta z$ aus den augenblicklich vorhandenen Lagen und ebenso den festen Körpern und zwar derart, dass

1.) die Verrückungen der starren Körper zum Zeitpunkt t_0 und t_1 verschwinden.

2.) die durch $\delta x, \delta y, \delta z$ dargestellte Verrückung wirbelfrei ist und sich mit der Incompressibilitäts-Bedingung und der Bewegung der starren Körper verträgt.

Denkt man sich nun die variierten Lagen zu denselben Zeiten, wie die unvariierten durchlaufen, so hat man die variierte Bewegung vor sich.

Dieses Variationsverfahren werde mit dem Symbol δ als δ-Verfahren bezeichnet.

Durch Vergleichung mit den Bemerkungen, die in §3. die Gleichungen 41, 42, 43 respective 44, 45, 46 begleiten erkennt man sofort, dass das Δ-Verfahren mehr der <u>Hertz'schen</u>, das δ-Verfahren mehr der <u>Hölderschen</u> Variationsart entspricht.

Jenes Verfahren operiert mit den Ansätzen [1.)]

$$\dot{x} = \sum_1^n{}_s \alpha_s \dot{p}_s \qquad \dot{y} = \sum_1^n{}_s \beta_s \dot{p}_s \qquad \dot{z} = \sum_1^n{}_s \gamma_s \dot{p}_s \tag{146.)}$$

$$\Delta \dot{x} = \Delta \sum_1^n{}_s \alpha_s \dot{p}_s \quad \text{etc.} \tag{147.)}$$

1.) Siehe z.B. Weber part. Differ Gl. pag.

$$\Delta x = \int_{t_0}^{t_1} \Delta \dot{x}\, dt \qquad \text{etc.} \tag{148.)}$$

und in der That ist dann die durch diese Ansätze dargestellte <u>variierte Bewegung</u> wirbelfrei und genügt der Incompressibilitäts-Bedingung und der Bewegung der starren ~~B~~ Körper, wofern:

$$\alpha_\varsigma = \frac{\partial \varphi_\varsigma}{\partial x} \quad \beta_\varsigma = \frac{\partial \varphi_\varsigma}{\partial y} \quad \gamma_\varsigma = \frac{\partial \varphi_\varsigma}{\partial z} \tag{149.)}$$

$$\nabla^2 \varphi_\varsigma = 0 \tag{150.)}$$

und:

$$\alpha_\varsigma \cos(nx) + \beta_\varsigma \cos(ny) + \gamma_\varsigma \cos(nz) + R_\varsigma \frac{\partial f}{\partial p_\varsigma} = 0 \tag{151.)}$$

(vergl. Gl. 127.)

Das δ-Verfahren hingegen benöthigt folgender Ansätze:

$$\dot{x} = \sum_1^n{}_\varsigma\, \alpha_\varsigma \dot{p}_\varsigma \quad \dot{y} = \sum_1^n{}_\varsigma\, \beta_\varsigma \dot{p}_\varsigma \quad \dot{z} = \sum_1^n{}_\varsigma\, \gamma_\varsigma \dot{p}_\varsigma \tag{152.)}$$

$$\delta x = \sum_1^n{}_\varsigma\, \alpha_\varsigma \delta p_\varsigma \tag{153.)}$$

$$\delta \dot{x} = \frac{d}{dt} \delta x \tag{154.)}$$

Man sieht, dass dann wirklich wegen 149.) die durch $\delta x, \delta y, \delta z$ dargestellte „<u>Quer“-Verrückung</u> wirbelfrei ist, wegen 150.) der Incompressibilitäts-Bedingung und wegen 151.) der durch die δp_ς dargestellten Verrückung der starren Körper genügt.

Gleichung 153.) zeigt übrigens, dass für $t = t_0$ und $t = t_1$ die $\delta x, \delta y, \delta z$ der Flüssigkeitstheilchen zugleich mit den δp_g verschwinden. Im Gegensatz zum Verhalten der $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ beim Δ-Verfahren (vergl. Gl. 148.)

Für die so festgelegte δ-Variation gilt nun sofort das Hamiltonsche Princip:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T+U)\,dt = 0 \qquad 155.)$$

Vergleichen wir jetzt die Gleichungen 152.) 153.) 154.) 155.) mit den Gleichungen 49.) 50.) 151.) 40.), die den Entwicklungen des § 3. zugrunde liegen, so ergeben sich bloss folgende Unterschiede:

a.) Dass es sich hier um ein System mit unendlich vielen Freiheitsgraden handelt. Das liefert die schon besprochenen Aenderungen in der Schreibweise.

b.) Unsere specialisierende Annahme, dass alle Systempunkte zur Zeit t_0 und t_1 unvariiert bleiben. Diese Specialisierung stört offenbar nicht die Anwendbarkeit der Entwicklungen des § 3. Sie sorgt aber dafür, dass

$$\delta \iiint = \iiint \delta \qquad 156.)$$

gesetzt werden kann. (vergl. die in § 4 auf 72.) folgende Bemerkung.

Somit gelangt man denn auch zu einem völlig analogen Endresultat wie in § 3.

Die „Kelvin-Lagrange"-Gleichungen ergeben sich in der Form:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(T+U)}{\partial \dot{p}_\sigma}\right) - \frac{\partial(T+U)}{\partial p_\sigma} + \sum_{1}^{n}{}_{\tau}\, \dot{p}_\tau \iiint \rho\, da\, db\, dc \left\{ \dot{x}\left(\frac{\partial \alpha_\tau}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial \alpha_\sigma}{\partial p_\tau}\right) + \dot{y}\left(\frac{\partial \beta_\tau}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial \beta_\sigma}{\partial p_\tau}\right) + \dot{z}\left(\frac{\partial \gamma_\tau}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial \gamma_\sigma}{\partial p_\tau}\right) \right\} = 0 \qquad 157.)$$

Man überblickt jetzt leicht den Parallelismus der Entwicklungen der Paragraphen 2,3 — 6,7.:

§3 liefert dieselben Zusatzglieder zu den Lagrange-Gleichungen auf Grund des Hamiltonschen Princips, wie §2 auf Grund des Princips der geradesten Bahn.

§6 und §7 leisten das Analoge für die „Kelvinschen" Gleichungen.

Und auch wenn wir vom D'Alembert'schen Princip ausgegangen wären, wären wir auf diese Zusatzglieder gestoßen; und es muss ja auch so sein, weil, wie <u>Hölder</u> gezeigt hat, das Hamiltonsche Princip und das Princip der kleinsten Wirkung sich nie im Gegensatz zum D'Alembert'schen und den anderen differentiellen Principien befinden, wofern man nur jene Variationsart wählt, die diesen differentiellen Principien eigen ist (die „Höldersche"). Und nur durch Nichtbeachtung dieses Umstandes können in gewissen Fällen

Differenzen zwischen den Integral und Differentialprincipien auftreten.

Die übliche Darstellung mit Hülfe des Principes

$$\Delta\int(T+U)\,dt = 0$$

lässt vermöge der ihm eigenthümlichen Variationsart jene Zusatzglieder gar nicht erst auftauchen. Bleibt aber aus demselben Grunde discontinuierlich von den Ableitungen mit Hülfe differentieller Principien getrennt.

Es erübrigt jetzt nur noch zu zeigen, dass diese Zusatzglieder für den von uns betrachteten Fall verschwinden.

§9.

Die Zusatzglieder, die die Ableitungen der Kelvinschen 7 Gleichungen aus dem Princip der geradesten Bahn und aus dem Hamiltonschen Princip ergaben, haben die Form

$$\sum_1^n{}^\tau \dot{p}_\tau \iiint da\,db\,dc\,\varrho \left\{ \dot{x} \left(\frac{\partial \alpha_\tau}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial \alpha_\sigma}{\partial p_\tau} \right) + \dot{y} \left(\frac{\partial \beta_\tau}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial \beta_\sigma}{\partial p_\tau} \right) + \dot{z} \left(\frac{\partial \gamma_\tau}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial \gamma_\sigma}{\partial p_\tau} \right) \right\} \tag{158.}$$

oder:

$$\sum_1^n{}^\tau \dot{p}_\tau \sum_1^n{}^\varsigma \dot{p}_\varsigma \iiint da\,db\,dc\,\varrho \left\{ \alpha_\varsigma \left(\frac{\partial \alpha_\tau}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial \alpha_\sigma}{\partial p_\tau} \right) + \beta_\varsigma \left(\frac{\partial \beta_\tau}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial \beta_\sigma}{\partial p_\tau} \right) + \gamma_\varsigma \left(\frac{\partial \gamma_\tau}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial \gamma_\sigma}{\partial p_\tau} \right) \right\} \tag{159.}$$

Wegen

$$\dot{x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \qquad \dot{y} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \qquad \dot{z} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \tag{160.}$$

und

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial c} & \frac{\partial y}{\partial c} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} = 1 \tag{161.}$$

kann man für 158.) auch schreiben:

$$\sum_1^n{}^\tau \dot{p}_\tau \iiint dx\,dy\,dz\,\varrho \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \left(\frac{\partial \alpha_\tau}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial \alpha_\sigma}{\partial p_\tau} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \left(\frac{\partial \beta_\tau}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial \beta_\sigma}{\partial p_\tau} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_\tau}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial \gamma_\sigma}{\partial p_\tau} \right) \right\} \tag{162.}$$

Ehe wir diesen Ausdruck weiter transformieren, wollen wir an die Interpretation erinnern, die im § 2 für die Ausdrücke

$$\frac{\partial \alpha_{\nu\sigma}}{\partial p_\tau} - \frac{\partial \alpha_{\nu\tau}}{\partial p_\sigma} \tag{163.}$$

gegeben wurde (siehe Gl. 33. und folgende.)

Es ergaben sich danach die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{\partial \alpha_\sigma}{\partial p_\tau} - \frac{\partial \alpha_\tau}{\partial p_\sigma} \right) \delta p_\tau \, \delta p_\sigma \\ &\left(\frac{\partial \beta_\sigma}{\partial p_\tau} - \frac{\partial \beta_\tau}{\partial p_\sigma} \right) \delta p_\tau \, \delta p_\sigma \\ &\left(\frac{\partial \gamma_\sigma}{\partial p_\tau} - \frac{\partial \gamma_\tau}{\partial p_\sigma} \right) \delta p_\tau \, \delta p_\sigma \end{aligned}\right\} \tag{164.}$$

als die Componenten jenes Vectors, der das betreffende Theilchen aus der Lage, die durch die Verrückungen $\delta p_\sigma \delta p_\tau$ erreicht wird hinüberführt zu der Lage, die durch die Verrückungsfolge $\delta p_\tau, \delta p_\sigma$ erreicht wird.

Da jede der beiden Verrückungen für sich der Incompressibilitäts-Bedingung genügt so genügt ihr natürlich auch ihre Differenz; somit ist:

$$\delta p_\sigma \delta p_\tau \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \alpha_\sigma}{\partial p_\tau} - \frac{\partial \alpha_\tau}{\partial p_\sigma}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \beta_\sigma}{\partial p_\tau} - \frac{\partial \beta_\tau}{\partial p_\sigma}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_\sigma}{\partial p_\tau} - \frac{\partial \gamma_\tau}{\partial p_\sigma}\right)\right\} = 0 \qquad 165.)$$

Diese Gleichung lässt sich übrigens auch leicht rechnerisch verificieren, wenn man die Bedeutung des Symbols

$$\frac{\partial \alpha_\tau}{\partial p_\sigma}, \frac{\partial \beta_\tau}{\partial p_\sigma} \text{ etc. (vergl. gl. 31.)}$$

und die Beziehungen

$$\alpha_\sigma = \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x} \quad \text{etc.}$$

und

$$\frac{\partial^2 \varphi_\sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_\sigma}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_\sigma}{\partial z^2} = 0$$

berücksichtigt.

Mit Hülfe der gl. 165.) lässt sich der Ausdruck 162.) durch partielle Integration auf ein Oberflächen-Integral transformieren; das dabei auftretende Raumintegral enthält die Divergenz des Vectors 164.) verschwindet also nach 165.)

So nehmen schliesslich die Zusatzglieder die Form an:

$$-\sum_1^n \dot{p}_\tau \iint df\, \Phi \left\{ \cos(nx)\left(\frac{\partial\alpha_\tau}{\partial p_\sigma}-\frac{\partial\alpha_\sigma}{\partial p_\tau}\right)+\cos(ny)\left(\frac{\partial\beta_\tau}{\partial p_\sigma}-\frac{\partial\beta_\sigma}{\partial p_\tau}\right)+ \right.$$
$$\left. +\cos(nz)\left(\frac{\partial\gamma_\tau}{\partial p_\sigma}-\frac{\partial\gamma_\sigma}{\partial p_\tau}\right)\right\} \qquad 166.)$$

das Vorzeichen minus tritt ein, weil die Normale n ins Innere der Flüssigkeit gerichtet ist.

Das Verschwinden der Ausdrücke in den geschwungenen Klammern lässt sich nun folgendermaßen beweisen.

Für die in der Oberfläche liegenden Flüssigkeitstheilchen gilt:

$$f(x, y, z, p_1 \cdots p_n) = 0 \qquad 167.)$$

und zwar für alle wirklichen Lagen und auch für alle durch virtuelle Verrückungen daraus erreichbaren.

Wir führen einmal hintereinander aus die Verrückungen δp_σ und δp_τ, ein anderesmal aus derselben Anfangsconfiguration dieselben Verrückungen in der umgekehrten Reihenfolge δp_τ, δp_σ. Die Endconfigurationen der Flüssigkeitstheilchen sind wegen der Nichtholonomie der p_ς im Allgemeinen von einander verschieden[1.)] und zwar schon in den Gliedern 2. Ordnung.

Es ist, bei Benützung einer leichtverständlichen Symbolik:

$$(\delta x)_{\sigma\tau} = (\delta x)_\sigma + (\delta x)'_\tau = \left[\alpha_\sigma \delta p_\sigma + \frac{1}{2}\frac{\partial \alpha_\sigma}{\partial p_\sigma}\delta p_\sigma^2\right] + \left[\alpha_\tau + \frac{1}{2}\frac{\partial \alpha_\tau}{\partial p_\tau}\delta p_\tau + \frac{\partial \alpha_\tau}{\partial p_\sigma}\delta p_\sigma\right]\delta p_\tau \tag{168.)}$$

$$(\delta x)_{\tau\sigma} = (\delta x)_\tau + (\delta x)'_\sigma = \left[\alpha_\tau \delta p_\tau + \frac{1}{2}\frac{\partial \alpha_\tau}{\partial p_\tau}\delta p_\tau^2\right] + \left[\alpha_\sigma + \frac{1}{2}\frac{\partial \alpha_\sigma}{\partial p_\sigma}\delta p_\sigma + \frac{\partial \alpha_\sigma}{\partial p_\tau}\delta p_\tau\right]\delta p_\sigma$$

oder umgeordnet:

$$(\delta x)_{\sigma\tau} = \alpha_\sigma \delta p_\sigma + \alpha_\tau \delta p_\tau + \frac{1}{2}\frac{\partial \alpha_\sigma}{\partial p_\sigma}\delta p_\sigma^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial \alpha_\tau}{\partial p_\tau}\delta p_\tau^2 + \frac{\partial \alpha_\tau}{\partial p_\sigma}\delta p_\sigma \delta p_\tau$$

$$(\delta x)_{\tau\sigma} = \alpha_\tau \delta p_\tau + \alpha_\sigma \delta p_\sigma + \frac{1}{2}\frac{\partial \alpha_\tau}{\partial p_\tau}\delta p_\tau^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial \alpha_\sigma}{\partial p_\sigma}\delta p_\sigma^2 + \frac{\partial \alpha_\sigma}{\partial p_\tau}\delta p_\tau \delta p_\sigma \tag{168a.)}$$

Es ist nun nebeneinander für die Flüssigkeitstheilchen die an den starren Körpern entlang gleiten:

$$f = f(x, y, z, p_1 \cdots p_\sigma \cdots p_\tau \cdots p_r) = 0$$

$$f_{\sigma\tau} = f(x + (\delta x)_{\sigma\tau}, \cdots, p_1 \cdots p_\sigma + \delta p_\sigma, p_\tau + \delta p_\tau \cdots p_r) = 0 \tag{169.)}$$

$$f_{\tau\sigma} = f\left(x + (\delta x)_{\tau\sigma}, \cdots p_1 \cdots p_\sigma + \delta p_\sigma, p_\tau + \delta p_\tau \cdots p_r\right) = 0$$

Setzt man in $f_{\sigma\tau}$ und $f_{\tau\sigma}$ die Werte 168a.) ein, entwickelt nach Taylor und behält schliesslich nur jene Glieder bei, die in den δp linear oder quadratisch

---

1.) Man hat zu beachten: Für die Bewegung der starren Körper sind die p_ς ein holonomes System, wie auch Gleichung 167 implicit voraussetzt, indem sie die Lage der Körper-Begrenzung als durch die p_ς bestimmbar ansieht. Für die Bewegung der Flüssigkeitstheilchen aber sind sie nicht holonom. Das eben abzuleitende Resultat kann man sich durch die Bemerkung plausibel machen, dass die Grenz-Flüssigkeits-Theilchen, wenigstens was die Normalcomponente ihrer Bewegung anlangt an der holonomen Darstellung der Bewegung der starren Körper participieren.

sind, so heben sich nach Subtraction des $f_{\tau\sigma}$ von $f_{\sigma\tau}$ alle Glieder von der Form

$$\frac{\partial f}{\partial p_\varsigma}\ \frac{\partial f}{\partial p_\sigma},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial p},\ \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}$$ weg und man erhält als Ergebnis:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial \alpha_\sigma}{\partial p_\tau}-\frac{\partial \alpha_\tau}{\partial p_\sigma}\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial \beta_\sigma}{\partial p_\tau}-\frac{\partial \beta_\tau}{\partial p_\sigma}\right)+\frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_\sigma}{\partial p_\tau}-\frac{\partial \gamma_\tau}{\partial p_\sigma}\right)=0 \qquad 170.)$$

somit verschwindet auch der Ausdruck 166.) w.z.b.w.

So ist also gezeigt, dass wegen der ganz speciellen Eigenschaften des behandelten Systems die Zusatzglieder in den (Kelvin-) Lagrange-Gleichungen verschwinden, trotzdem die Coordinaten nichtholonom sind.

Wir müssen sie wenigstens solange als nichtholonom ansehen, solange nicht der Nachweis erbracht ist, dass allgemein:

$$\frac{\partial}{\partial p_\tau}\left(\frac{\partial y_\sigma}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial p_\sigma}\left(\frac{\partial y_\tau}{\partial x}\right)=0 \qquad 171.)$$

Da die Autoren, die das Problem der Bewegung fester Körper in Flüssigkeiten behandeln, stets von dem Integral-Princip

$$\Delta\int_{t_0}^{t_1}(T+U)\,dt=0$$

ausgehen und nicht von irgend einem differentiellen Princip, das mit Nothwendigkeit auf die „Zusatz“-

glieder geführt hätte, so fanden sie keinen Anlass die Bedingungen näher zu untersuchen unter denen die Gl. 171. gültig bleibt.

Jedesfalls aber merken sie insgesammt an, dass das von ihnen verwendete Variationsverfahren („Δ") – auch bei einfach zusammenhängenden Flüssigkeitsraum – die Endlage der Flüssigkeitstheilchen im allgemeinen variiert, trotzdem die Endlage der Körper unvariiert bleibt. Man überzeugt sich aber leicht, dass das auf das Zugeständnis hinausläuft, dass im allgemeinen die Gl 171 (und die ihr analogen) nicht mehr gültig, also die p_s nichtholonome Coordinaten sind.

Ragusa-Lapad 25. III. 1904 Paul Ehrenfest

Inhalt: