2019年度仁科記念講演会@東大理学部, 2019年12月6日

量子ビットの幾何学から重力へ

高柳　匡

京都大学基礎物理学研究所

It from Qubit
Simons Collaboration

YITP
YUKAWA INSTITUTE FOR THEORETICAL PHYSICS

① はじめに

物理学の研究において、最も基礎となる操作は
マクロなものを拡大してミクロな構造を調べること。

つまり**顕微鏡**（素粒子物理では加速器）を覗く！

では重力の物理学における`最高精度’の顕微鏡は？

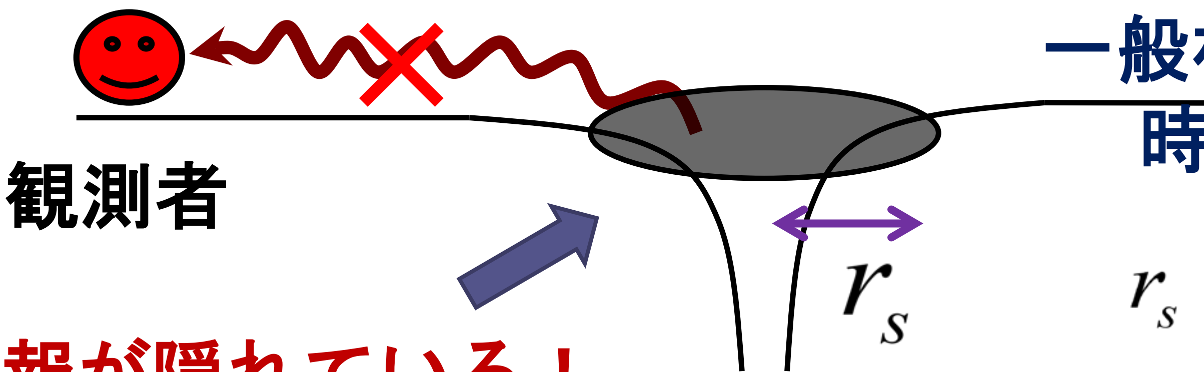
⇒　ホログラフィー原理（ゲージ重力対応）！

ホログラフィー原理は実際の実験ではないが、
重力理論の思考実験の顕微鏡としての役割を果たす。

⇒重力理論の時空を拡大すると何かが見えるか？？

重力理論特有の現象の中で最も重要なものとして、**ブラックホール**がある(思考実験のターゲット)。

ブラックホールは重い星の重力崩壊などで形成されるが、**極めて強い万有引力のために光すら抜けせず、ブラックホールの中は外から見えない！**



一般相対論に従い時空が曲がる！

情報が隠れている！(エントロピー)

ブラックホール(質量m)

$$r_s = 2G_N m / c^2$$

G_N : 重力定数(ニュートン定数)

ブラックホールのエントロピー (Bekenstein-Hawking公式)

[1972-1976]

$$\boxed{S_{BH} = \frac{k_B \cdot c^3}{4G_N \cdot \hbar} \cdot A_{BH}}$$

⇒ブラックホールの熱力学

ABH=ブラックホールの面積　⇒ 幾何学
GN=重力定数　⇒ 重力
ℏ＝プランク定数　⇒ 量子力学
kB=ボルツマン定数 ⇒統計物理・量子情報

量子重力の理論が必要！

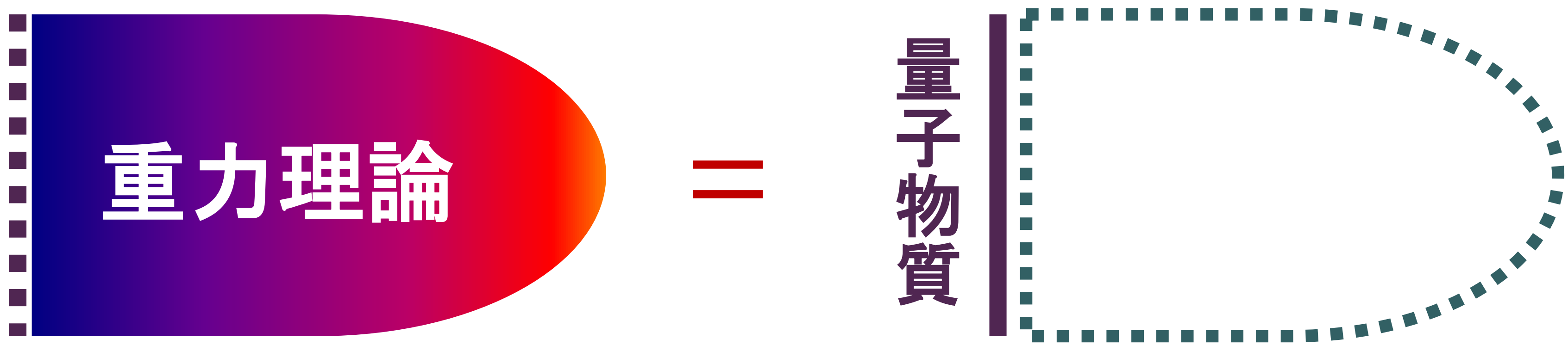
BHエントロピーは体積ではなく面積に比例する！

➡ 重力理論の自由度は面積に比例する！

重力理論の自由度∝面積 ➡ ホログラフィー原理
[‘t Hooft 1993, Susskind 1994]

ホログラフィー原理

ある時空の重力理論 ＝ 境界の量子多体系（物質）



BHエントロピー（∝面積） = 物質のエントロピー（∝体積）

[超弦理論からのBHエントロピー導出：Strominger-Vafa 1996]

目次

②ゲージ重力対応とは？

ホログラフィー原理で最もよく知られた例：

<u>ゲージ重力対応(AdS/CFT対応)</u> [Maldacena 1997]

AdS/CFT

D+1次元反ドジッター時空(AdS空間)における重力理論（超弦理論） ＝ Ｄ次元空間におけるゲージ理論(CFT)

↓ 一般相対論近似

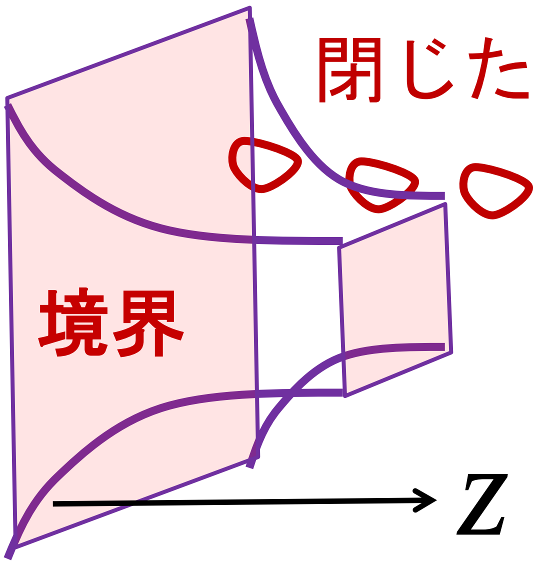
↓ CFT=共形場理論（量子臨界点の理論）

負の宇宙項を持つ一般相対論 ＝ 強結合多自由度(ラージN)のゲージ理論

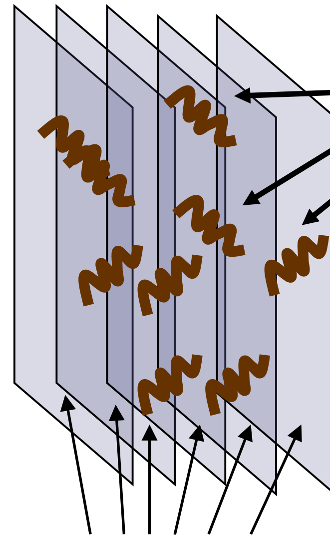
反ドジッター(AdS)時空の重力理論

ゲージ理論(CFT)

閉じた弦＝重力



等価



開いた弦
= ゲージ理論
[SU(N)ゲージ群]

N枚のDブレイン
(超弦の凝縮したもの)

$$\boxed{ds^2 = R^2 \cdot \frac{dz^2 - dt^2 + \sum_{i=1}^{d} dx_i^2}{z^2}}$$

ブラックブレインの熱力学　⟺　ゲージ理論の熱力学

等価

　ゲージ重力対応[Maldacena 1997]が発見されてから20年以上経過し、非常に多くの検証がなされており、疑いのない等価性として広く受け入れられている。

しかし、その証明自体は未だに存在せず、ゲージ重力対応の基礎的メカニズムは完全には解明されていない。

例えばドジッター宇宙やビックバン宇宙のように現実の宇宙に関係する量子重力を解明するには、**ホログラフィー原理を一般化する必要があり**、ゲージ重力対応の基礎的メカニズムの理解は不可欠である。

その後、ゲージ重力対応のエンタングルメント・エントロピーの公式[笠-高柳 2006]が見出され、ゲージ重力対応が量子情報理論と結びつく発端となった。

その後の世界中の研究者による様々な研究で、

重力理論の時空 ＝ 量子エンタングルメントの集まり

（英語で, “It from Qubit” と呼ばれたりもする）

という新しい考え方が生まれてきた。

この話題と最近の発展を以下では紹介したい。

hep-th論文(超弦理論・場の理論）の最近1年間被引用数ランキング

AdS/CFTの原著論文⇒
[Maldacena 1997]

AdS/CFTの対応原理⇒
[Witten 1998]

AdS/CFTの対応原理⇒
[Gubser-Klebanov-Polyakov 1998]

エンタングルメント・エントロピー ⇒
[笠-高柳 2006]

Top Cited Articles during 2018 in hep-th

The 100 most highly cited papers during 2018 in the hep-th archive

1. 1075 citations in 2018
   The Large N limit of superconformal field theories and supergravity
   Juan Martin Maldacena (Harvard U.). Nov 1997. 21 pp.
   Published in **Int.J.Theor.Phys. 38 (1999) 1113-1133, Adv.Theor.Math.Phys. 2 (1998) 231-252**
   HUTP-97-A097, HUTP-98-A097
   DOI: 10.1023/A:1026654312961, 10.4310/ATMP.1998.v2.n2.a1
   e-Print: **hep-th/9711200** | **PDF**
   References | BibTeX | LaTeX(US) | LaTeX(EU) | Harvmac | EndNote
   ADS Abstract Service; AMS MathSciNet; OSTI.gov Server

2. 634 citations in 2018
   Anti-de Sitter space and holography
   Edward Witten (Princeton, Inst. Advanced Study). Feb 1998. 39 pp.
   Published in **Adv.Theor.Math.Phys. 2 (1998) 253-291**
   IASSNS-HEP-98-15
   DOI: 10.4310/ATMP.1998.v2.n2.a2
   e-Print: **hep-th/9802150** | **PDF**
   References | BibTeX | LaTeX(US) | LaTeX(EU) | Harvmac | EndNote
   ADS Abstract Service; AMS MathSciNet; ATMP Server

http://inspirehep.net/info/hep/stats/topcites/2018/eprints/to_hep-th_annual.html

3. 501 citations in 2018
   Gauge theory correlators from noncritical string theory
   S.S. Gubser, Igor R. Klebanov, Alexander M. Polyakov (Princeton U.). Feb 1998. 14 pp.
   Published in **Phys.Lett. B428 (1998) 105-114**
   PUPT-1767
   DOI: 10.1016/S0370-2693(98)00377-3
   e-Print: **hep-th/9802109** | **PDF**
   References | BibTeX | LaTeX(US) | LaTeX(EU) | Harvmac | EndNote
   ADS Abstract Service; AMS MathSciNet

4. 423 citations in 2018
   Holographic derivation of entanglement entropy from AdS/CFT
   Shinsei Ryu, Tadashi Takayanagi (Santa Barbara, KITP). Mar 2006. 5 pp.
   Published in **Phys.Rev.Lett. 96 (2006) 181602**
   NSF-KITP-06-11
   DOI: 10.1103/PhysRevLett.96.181602
   e-Print: **hep-th/0603001** | **PDF**

③ 量子エンタングルメントとゲージ重力対応

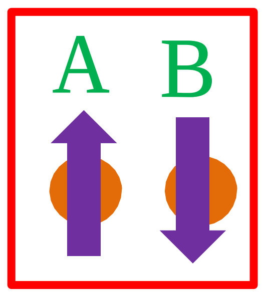
(3-1) 量子エンタングルメント

量子エンタングルメント(量子もつれ)＝2体の量子相関

簡単な例：スピン二つの系 (2 Qubit)

(1) 直積状態

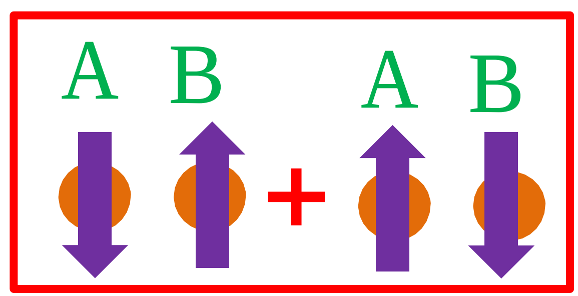
$$|\Psi_c\rangle = |\uparrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B$$



エンタングルメントなし！

(2) ベル対(EPR状態)

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle_A \otimes |\downarrow\rangle_B \pm |\downarrow\rangle_A \otimes |\uparrow\rangle_B\right)$$



あり！

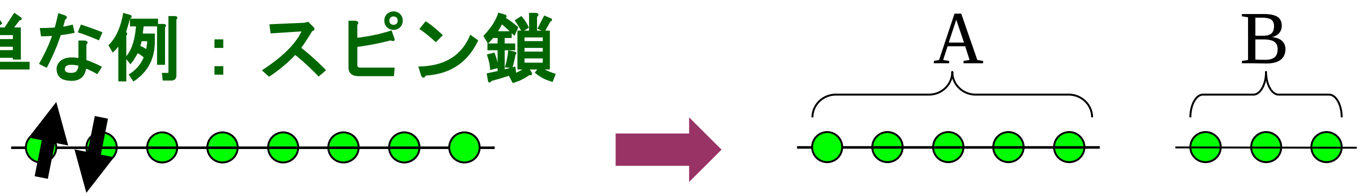
ベル対

エンタングルメント・エントロピー(EE)

エンタングルメントの度合＝ベル対の数＝ＥＥ

まず量子系を部分系ＡとＢに分割する: $H_{tot} = H_A \otimes H_B$.

簡単な例：スピン鎖



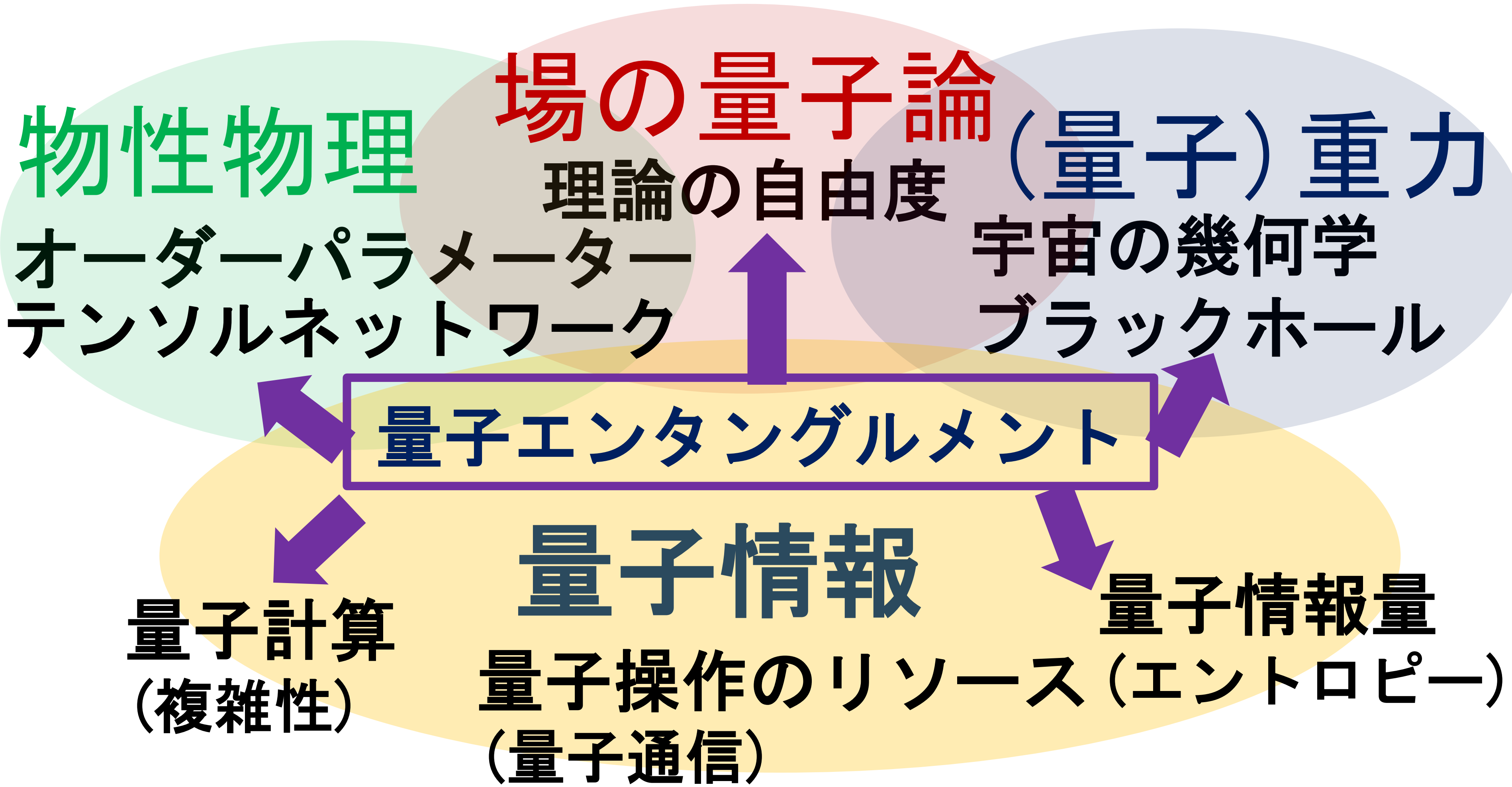
Ａの密度行列 ρ_A （Ｂにアクセスできない観測者）

を導入することで $\rho_A = \mathrm{Tr}_B\left[|\Psi_{tot}\rangle\langle\Psi_{tot}|\right].$

エンタングルメント・エントロピー SA が定義される:

$\boxed{S_A = -\mathrm{Tr}[\rho_A \log \rho_A]}$ ≈ **ＡＢ間のベル対の数**

量子エンタングルメントの概念図



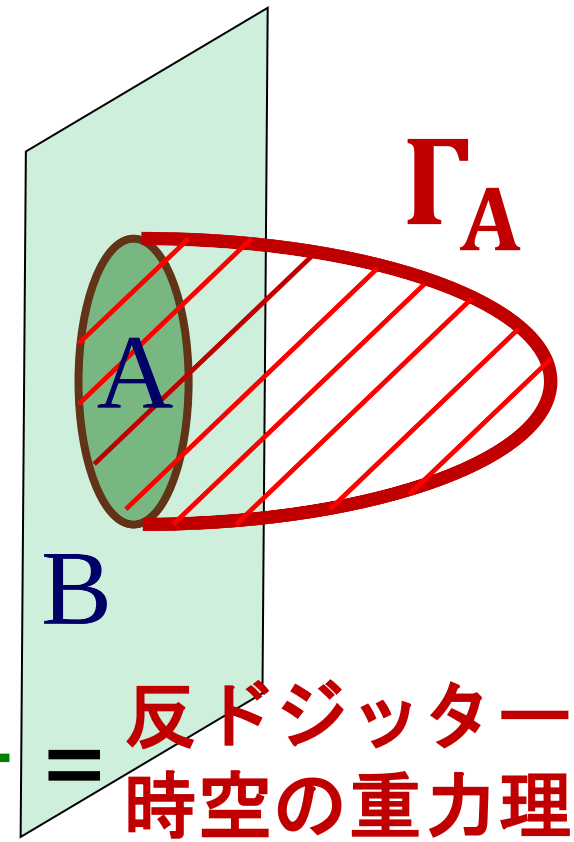
(3-2) エンタングルメント・エントロピーのホログラフィー公式 [笠-高柳 2006]

ゲージ重力対応において、ゲージ理論(CFT)のエンタングルメント・エントロピーは次の公式で計算できる！

$$\boxed{S_A = \frac{\Gamma_A\text{の面積}}{4G_N}}$$

・Γ_A はＡを覆う曲面の中で最小の面積を持つ曲面（極小曲面）。

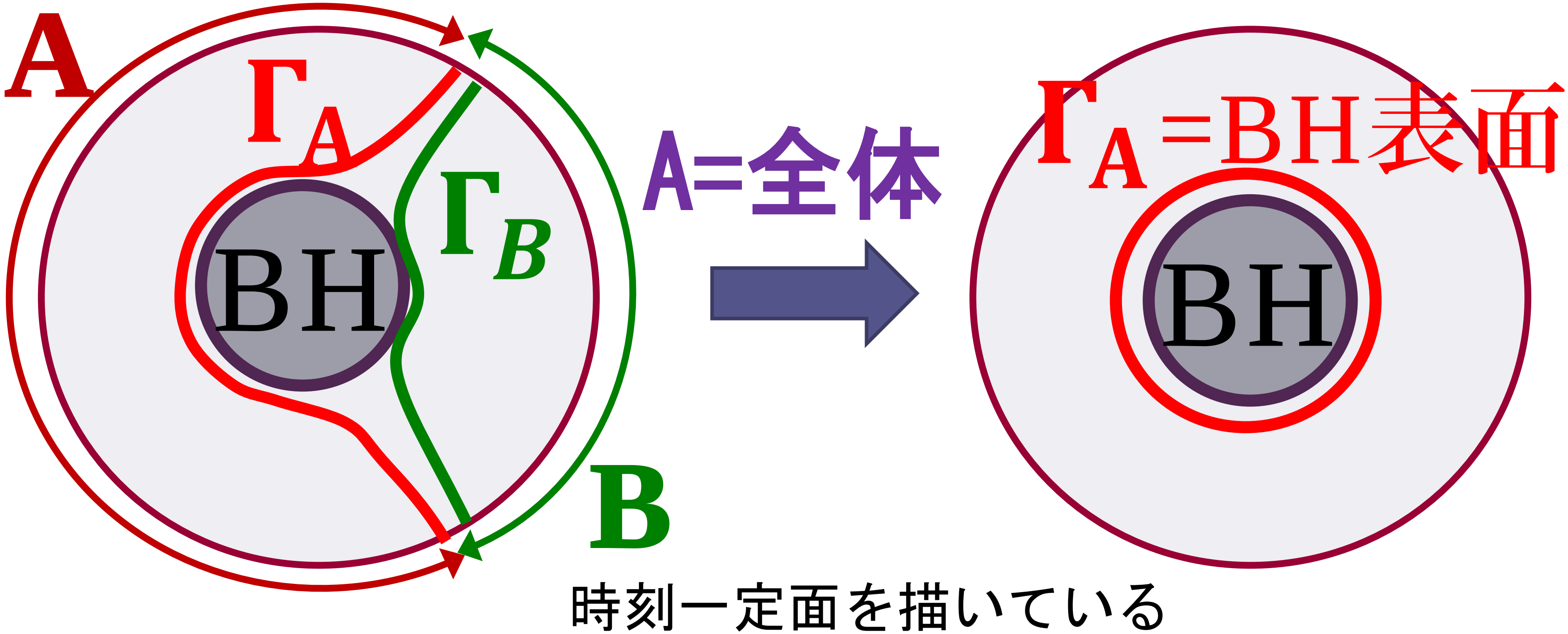
・Aと Γ_A はホモロジー同値。



境界のＣＦＴ ＝ 反ドジッター時空の重力理論

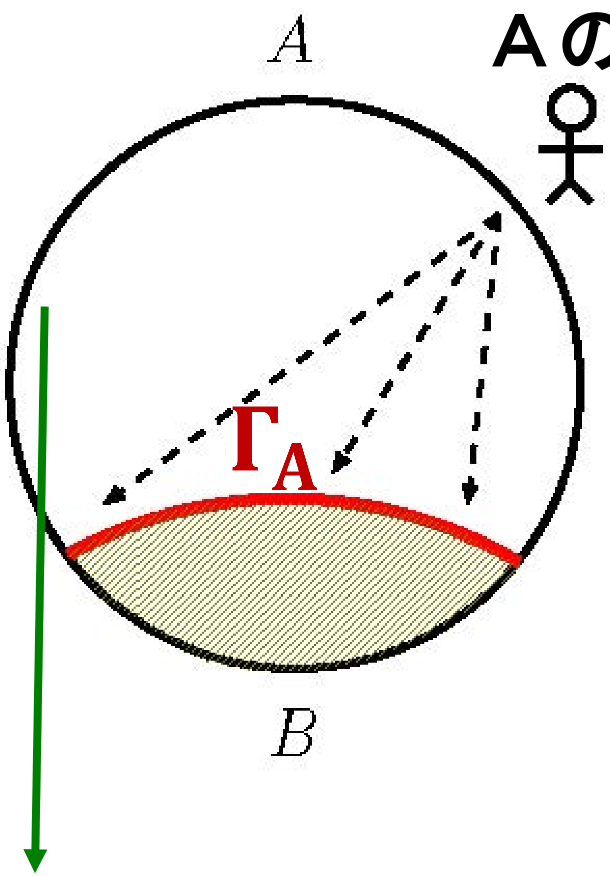
補足

この公式はブラックホールのエントロピーの一般化と思える。(A=系全体でBHエントロピーと一致)



AdS BH = CFTの有限温度状態 ⇒混合状態：$S_A \neq S_B$ ！

どのようにこの公式を見出したか？



Ｂにアクセスできない観測者は Γ_A にブラックホールがあるように見え、斜線の領域が隠される。

⇒そのBHのエントロピーがEE！

実際に、具体例で計算すると、場の理論の計算とうまく一致することが分かった。

後にLewkowyczとMaldacena（2013年）によりゲージ重力対応の原理から証明された。

Ａがアクセスできるのはこの白い部分

⇒**エンタングルメント・ウェッジ**と呼ばれる

@米国, セコイア国立公園

(3-3) アインシュタイン方程式とエンタングルメント

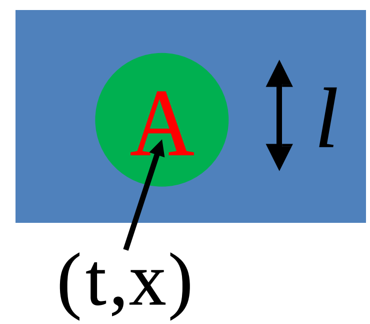
$$\Delta S_A \cong \Delta H_A$$

エンタングルメント・エントロピーの第一法則

$H_A = -\log\rho_A$: モジュラーハミルトニアン

[Blanco-Casini-Hung-Myers 2013,
Prudenziati-沼澤-野崎-高柳 2013]

$$\left(\partial_l^2 - \partial_l - \partial_{\vec{x}}^2 - \frac{3}{l^2}\right)\Delta S_A(t,\vec{x},l) = \langle O\rangle\langle O\rangle$$



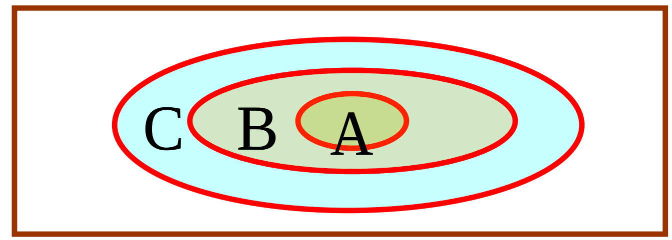
$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$$

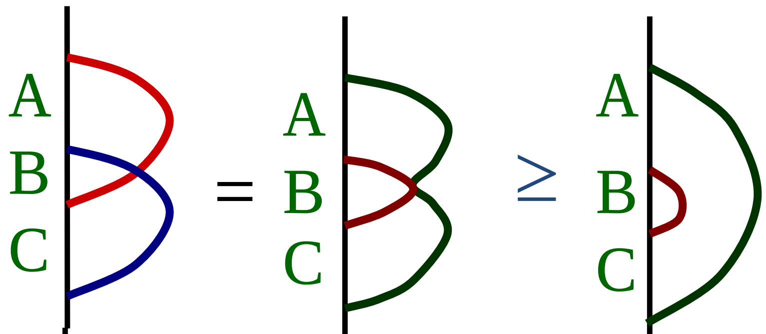
➡ 第一法則はアインシュタイン方程式の一次摂動と一致！

[Lashkari-McDermott-Raamsdonk 2013,…]

(3-4) 強劣加法性の証明

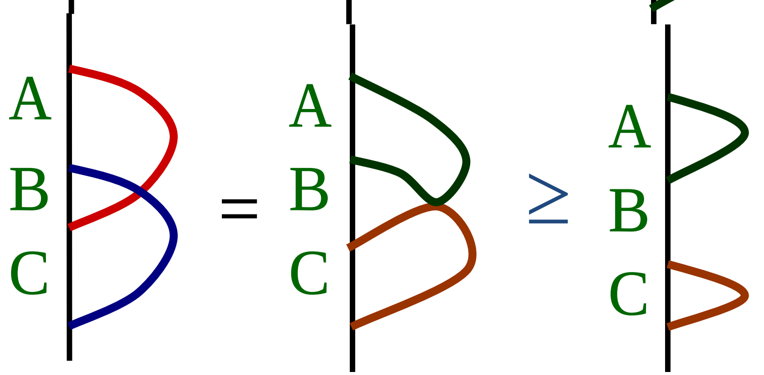
量子情報の基本となる不等式の強劣加法性 [Lieb-Ruskai 73]
が幾何学的に証明できる！





$$\Rightarrow S_{A\cup B}+S_{B\cup C}\geq S_{A\cup B\cup C}+S_{B}$$

[Headrick-高柳 2007]



$$\Rightarrow S_{A\cup B}+S_{B\cup C}\geq S_{A}+S_{C}$$

「量子情報の不等式＝幾何学の三角不等式」となる！

部分領域数は任意⇒エントロピー円錐 [Bao-Nezami-大栗-Stoica -Sully-Walter 2015]

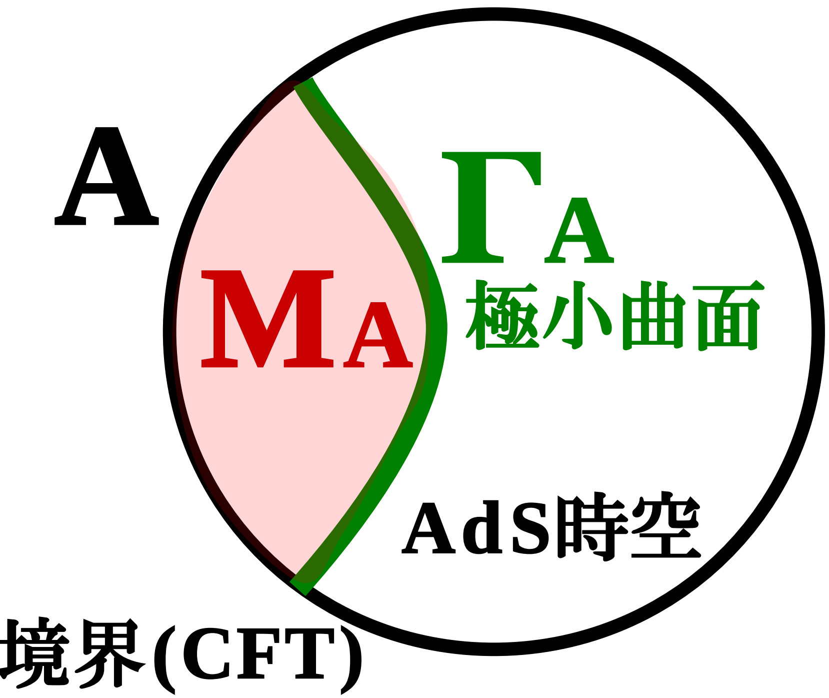
④エンタングルメント・ウェッジ

(4-1) エンタングルメント・ウェッジ(EW) とは？

ゲージ理論(CFT)の領域Aに対応するAdS時空の領域は？

⇒エンタングルメント・ウェッジ MA　と呼び、

MA = Aと「Aに囲まれる領域　で与えられる。

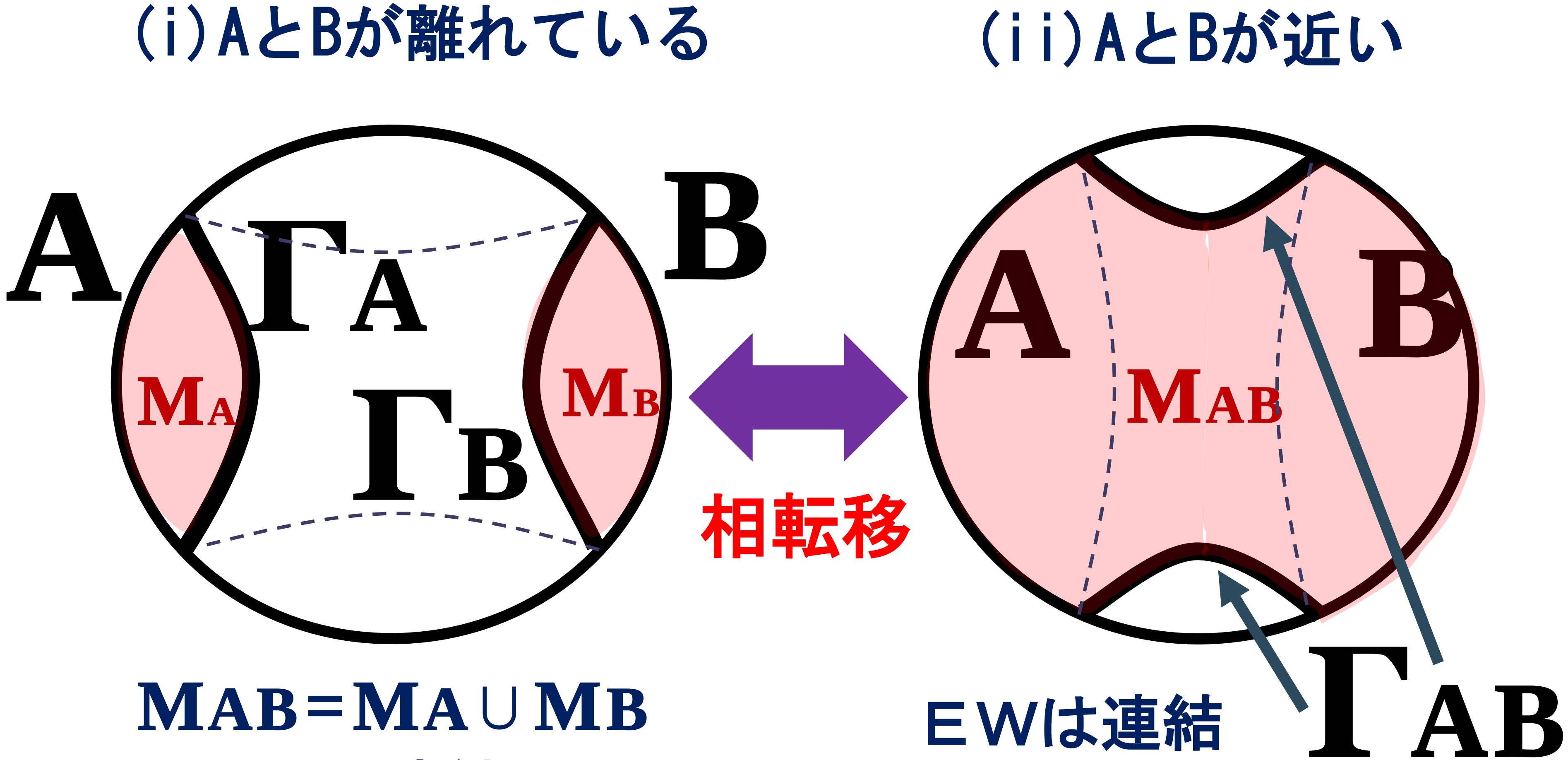


ρ_A in CFT

$\Leftrightarrow$ ρ_{MA} in AdS 時空

[Hamilton-Kabat-Lifschytz-Lowe 2006, Czech-Karczmarek-Nogueira-Raamsdonk 2012, Wall 2012, Headrick-Hubeny-Lawrence-Rangamani 2014, Jafferis-Lewkowycz-Maldacena-Suh 2015, Dong-Harlow-Wall 2016,…]

領域A∪Bのエンタングルメントウェッジと相転移

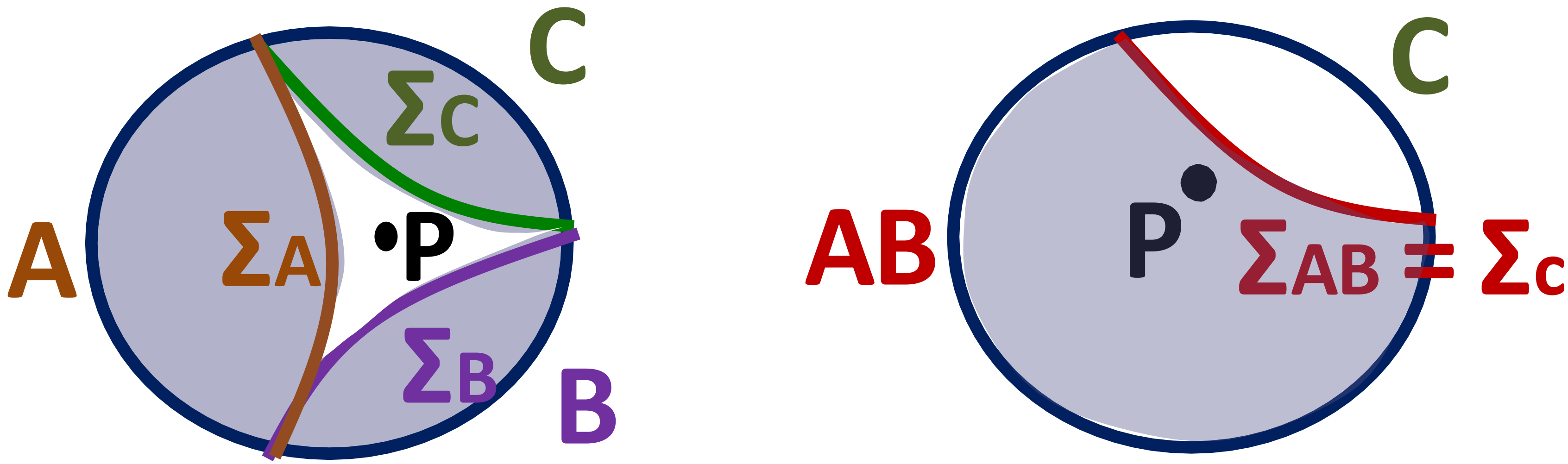


$M_{AB} = M_A \cup M_B$

EWは非連結

EWは連結

(4-2) 量子誤り訂正符号との関係



P点の情報はρ_{AB}から再現できるが、ρ_A, ρ_B, ρ_C からは再現できない！ ➡ **量子誤り訂正符号の性質**

[Almheiri-Dong-Harlow 2014]

物理空間 = 全てのCFT状態 = 量子重力

∪

符号空間 = 低エネルギーCFT状態 = 一般相対論

量子誤り訂正符号で保護されている　　古典的な時空が創発

(4-3) エンタングルメント・ウェッジ断面積

ＥＷの断面積を次式で定義する:

$$\boxed{E_W(\rho_{AB}) = \frac{\mathrm{Area}(\Sigma_{AB})}{4G_N}}$$

この量はゲージ理論の**純粋化エンタングルメント(EoP)**と呼ばれる量と等しいと予想される。

↑
純粋状態で表した場合の最小の
エンタングルメント・エントロピー

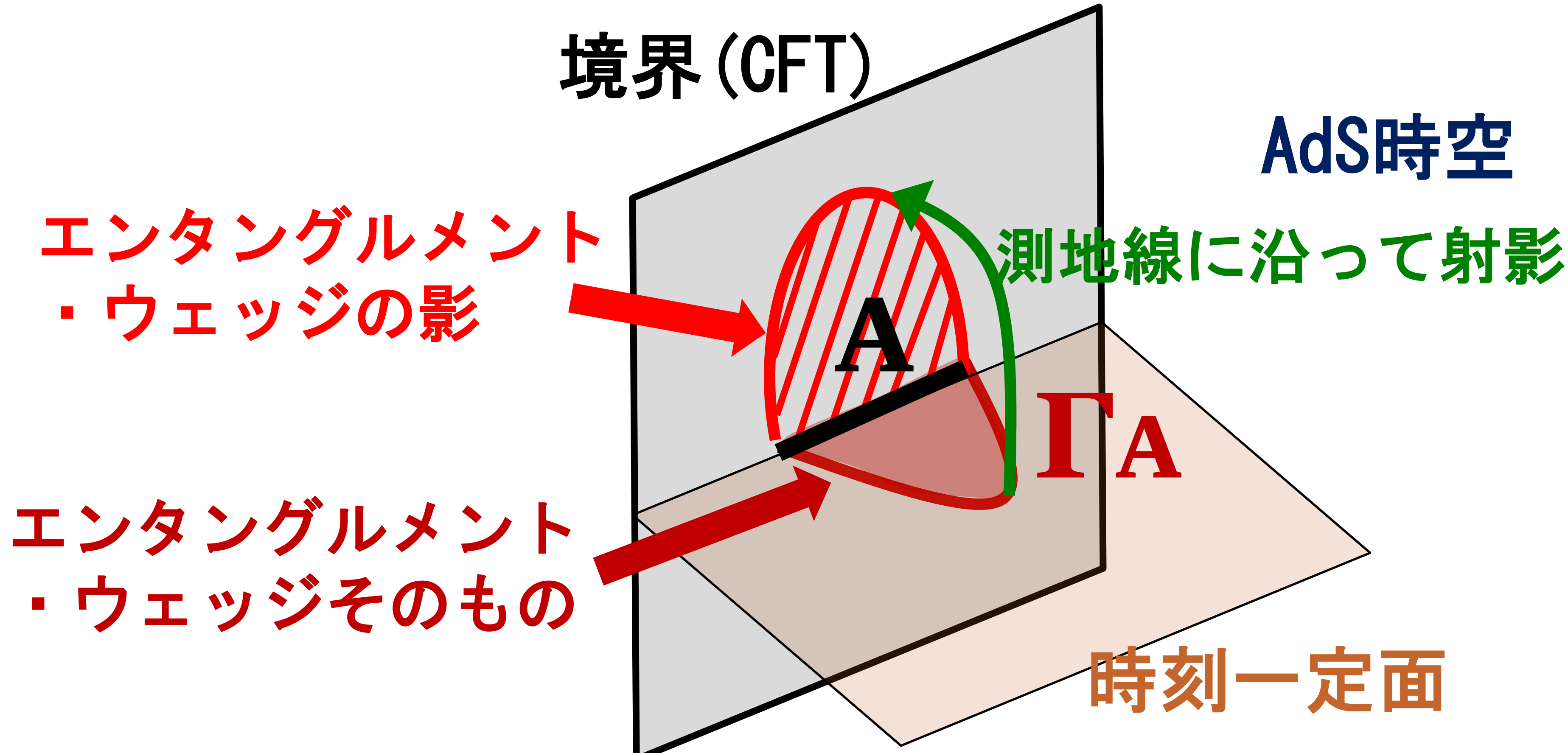
$$\boxed{E_W(\rho_{AB}) = E_P(\rho_{AB})}$$

[梅本-高柳 2017, Nguyen-Devakul-Halbasch-Zaletel-Swingle 2017,
CFTによる検証：Caputa-宮地-梅本-高柳 2018, ODDエントロピー解釈: 玉岡 2018]

(4-4) CFTからのEWの直接導出 [梅本-楠亀-鈴木-高柳 2019]

エンタングルメント・ウェッジはCFTにも存在するのか？

⇒エンタングルメント・ウェッジの影をCFTで検出できる。

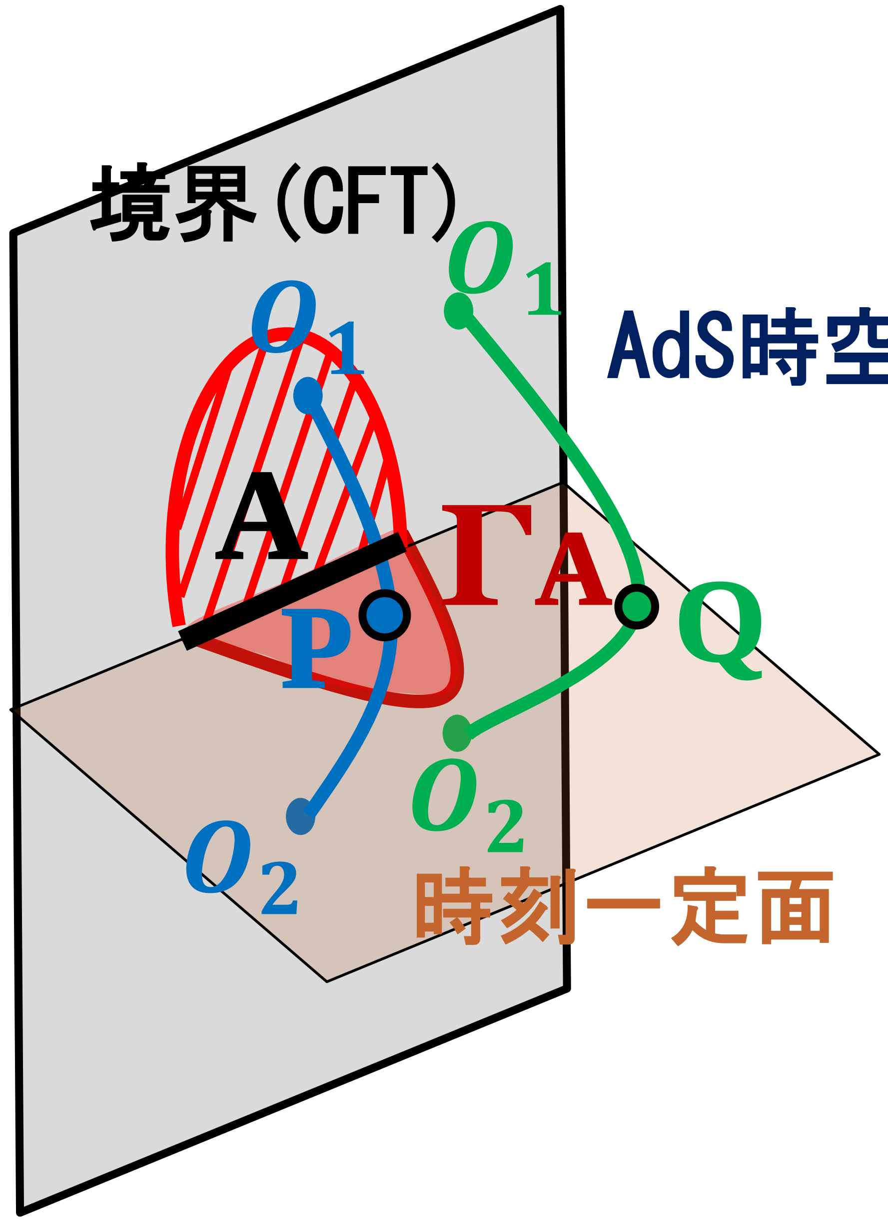


EWの影の検出方法の概略

領域Ａの観測者(ρ_A)は
点Ｐを観測できるが、
点Ｑは観測できない！

二点相関関数$\langle O_1 O_2 \rangle$で
AdS空間の点PやQを
プローブすることができる。

そこで、ρ_AでＰやＱの
位置の変化を検出できるか
調べる！



量子情報の距離・計量

ρ_A が点Pの位置xを検出できる
⇒ x≠x'の時に $\rho_A(x)$ と $\rho_A(x')$ を区別できる。

二つの状態ρとρ' が離れている度合いを測る量に**ブレス距離**がある:

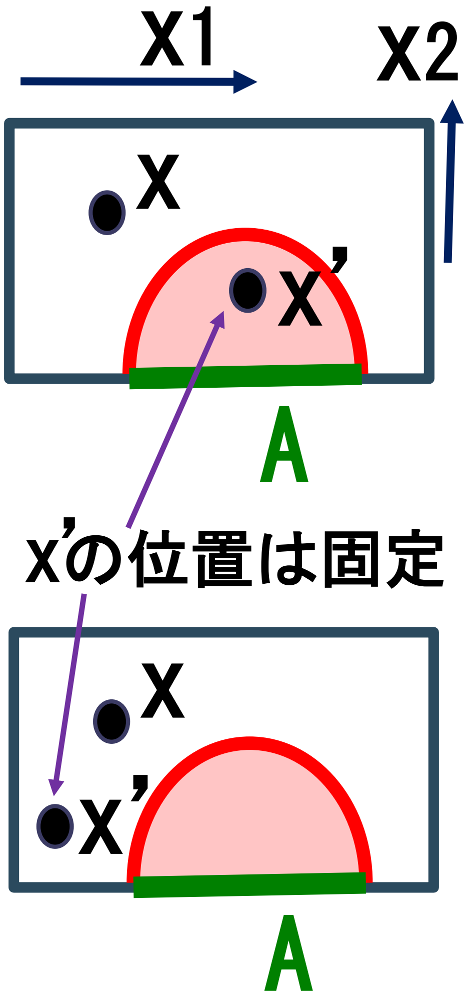
$$D_B(\rho,\rho')^2 = 2 - 2\mathrm{Tr}\underbrace{\left[\sqrt{\sqrt{\rho}\rho'\sqrt{\rho}}\right]}_{}.$$

忠実度(Fidelity)

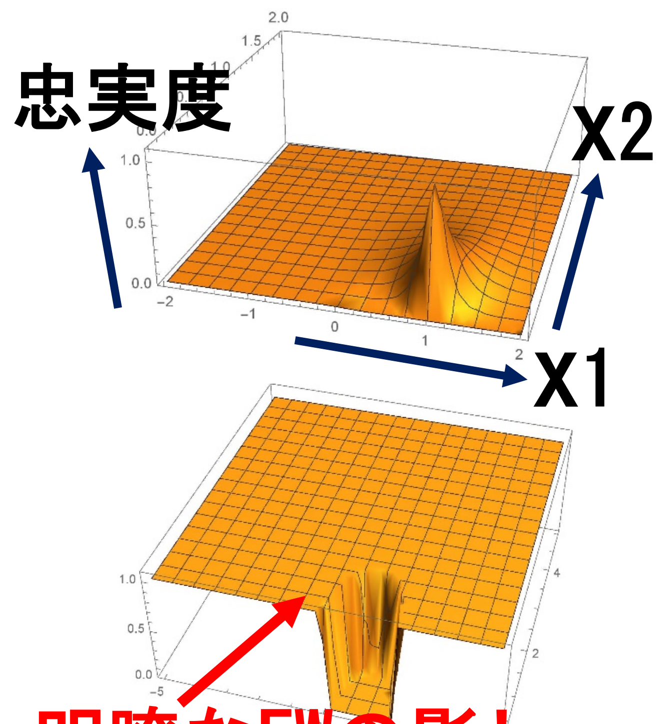
状態ρがパラメーターxに依存する場合 ($\rho(x)$) は、
ブレス計量Gijを次のように定義できる。

$$ds^2 \equiv D_B(\rho(x),\rho(x+dx))^2 \cong G_{ij}dx^i dx^j$$

情報距離(忠実度)のプロット(二次元CFT)

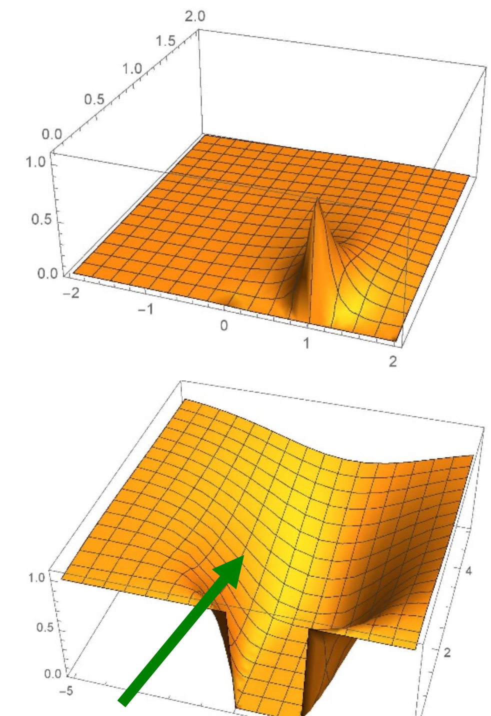


強結合のCFT
(一般相対論と等価)



明瞭なEWの影!
(極小曲面と一致)

相互作用のない
自由スカラー場CFT



不明瞭なEWの影

ゲージ重力対応の予想通り，強結合CFTのみEWの影を持つ！

情報計量

ブレス計量を計算すると点PがEW内にある場合は、

$$\boxed{ds_B^2 = \frac{h}{(x_2)^2}(\mathrm{d}x_1^2 + dx_2^2)}$$

と、反ドジッター時空の時刻一定面の計量に比例することが分かる(hは演算子Oの共形次元)。

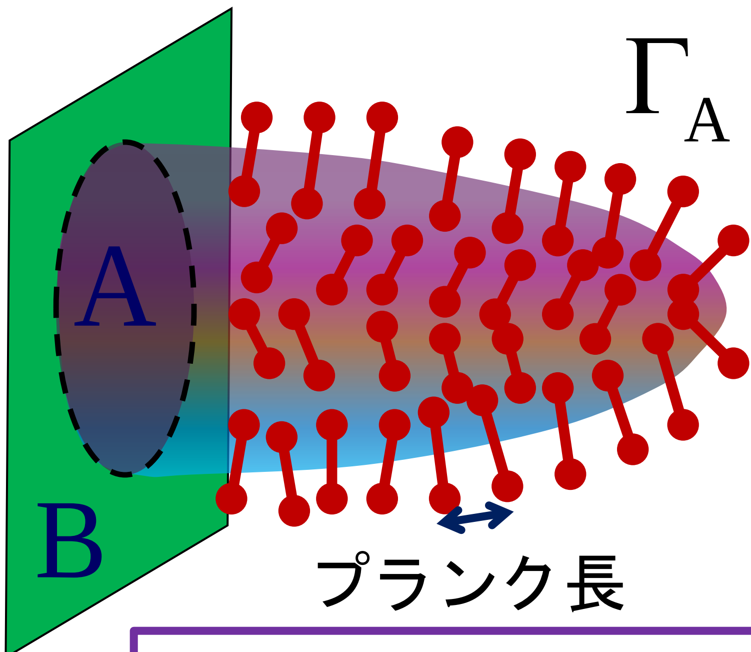
ゲージ重力対応

$\rho_A(x)$の演算子挿入位置xの情報計量 ＝ **重力理論の時空の時間一定面の計量**

量子多体系の計算から曲がった空間の計量が創発する！

⑤量子ビットからの時空の創発

このエントロピー公式は、プランク面積あたり
1量子ビットのエンタングルメントの存在を意味する。



$$S_A = \frac{\Gamma_A \text{の面積}}{4\,l_P^2}$$

プランク長: $l_P = \sqrt{\dfrac{\hbar G}{c^3}} = 1.6\times 10^{-35}\,m$

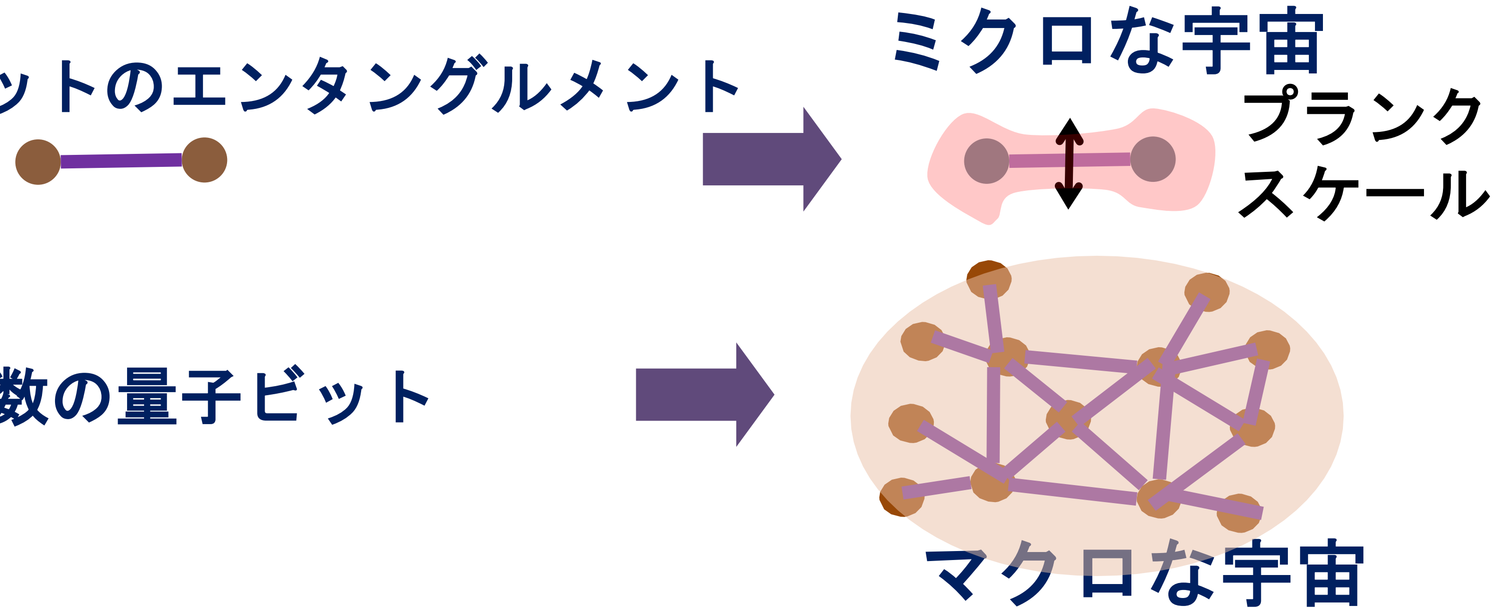
$\Rightarrow 1\,cm^2$の面積で10^{65}量子ビット

領域Ａのサイズや位置を自由に変えられるので、
量子ビットは時空全体に満ちているのでは？

このように、重力理論の時空が、量子ビットの集合体と解釈できることが示唆される。

1量子ビットのエンタングルメント

多数の量子ビット



➡ これを実現する模型が**テンソルネットワーク！**

[Swingle 2009]

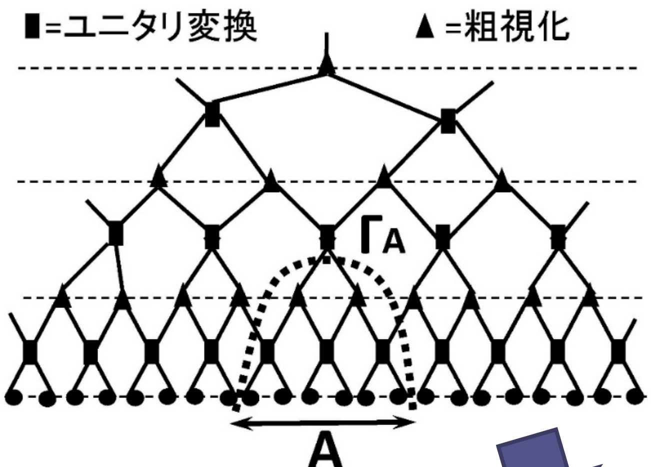
テンソルネットワークは量子状態を幾何学的に記述する手法。

量子多体系の数値計算で、変分法のansatzとして提案。

テンソルネットワークの例

例1：MERA [Vidal 2005]

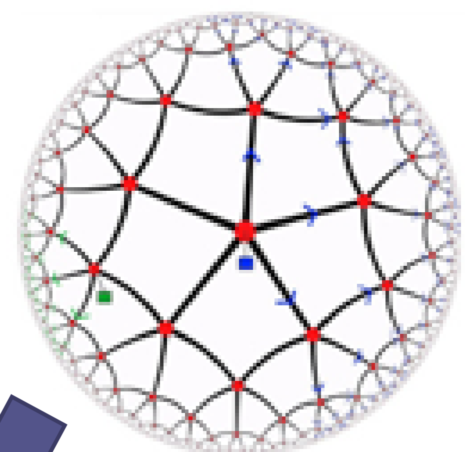
⇒量子臨界点(CFT)の良い変分法の波動関数



例2: HAPPY模型：

[Patawski-吉田-Harlow-Preskill 2015]

⇒量子誤り訂正符号を多数組み合わせた模型



量子ビットの幾何学構造 ＝ 反ドジッター空間

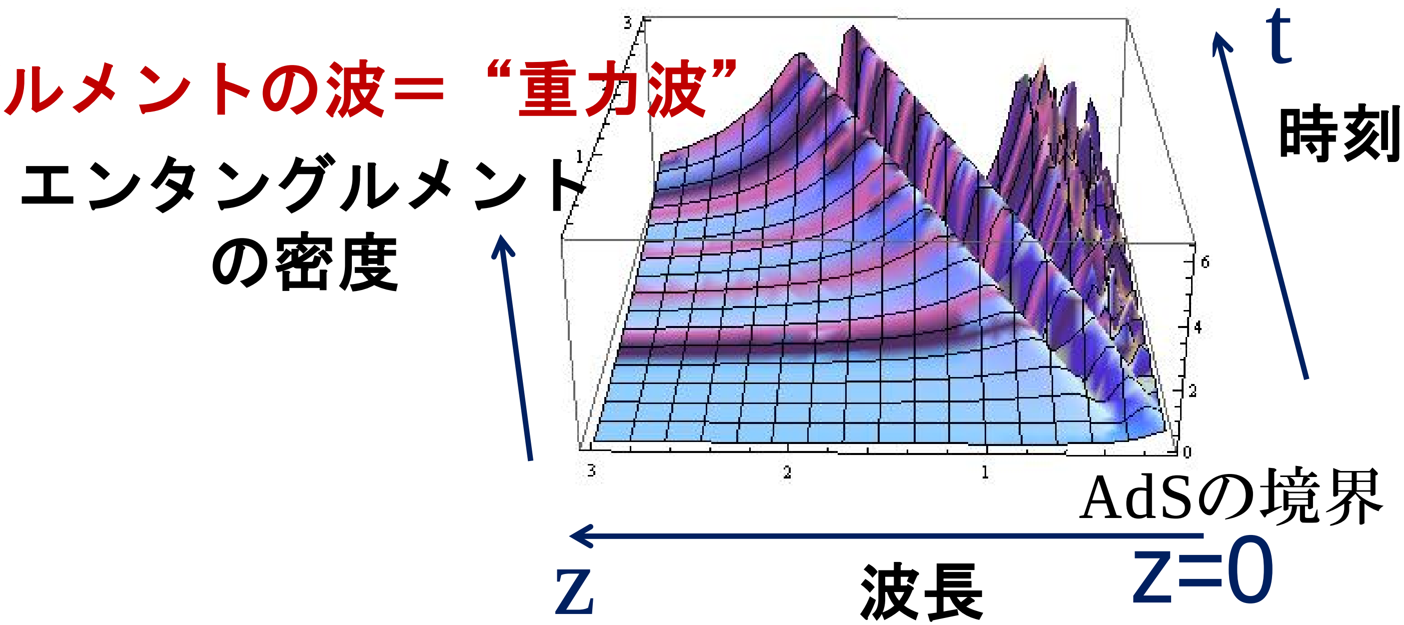
テンソルネットワークの連続極限（場の理論）？

手法1：cMERA (MERAの連続極限)

[Haegeman-Osborne-Verschelde -Verstraete 2011]

cMERAの応用例：質量を急にゼロに変化させた後の時間発展（量子クエンチ）を解析。エンタングルメントの密度を「時間t」と「波長z」の関数として求めた。

エンタングルメントの波＝“重力波”

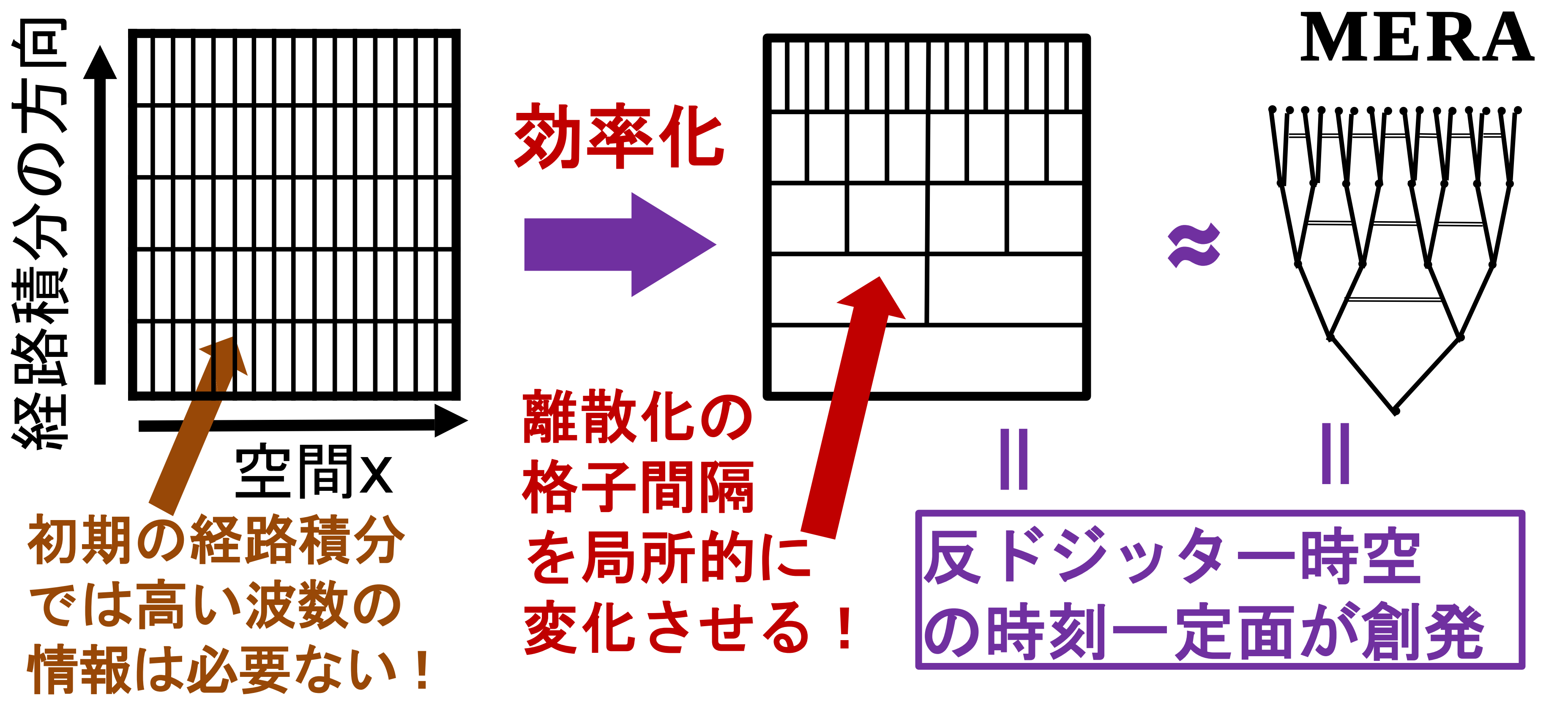


[Mollabashi-野崎-笠-高柳 2013]

テンソルネットワークを場の理論で扱う手法として次もある：

手法2：CFTの経路積分の効率化 [Caputa-Kundu-宮地-渡邊-高柳 2017]

同じ量子状態を表す経路積分の中で計算コストが最小なものを選ぶ！



経路積分の効率化を具体的にどうやるか？ [専門家向け]

離散化の格子間隔の局所的な変化を計量で表す：

$$ds^2 = e^{2\omega(x,z)}(dx^2 + dz^2).$$

CFTの性質より波動関数は次の性質を持つ：

$$\Psi[\phi, \omega] = e^{N[\omega]} \cdot \Psi[\phi, \omega = 0]$$

N[ω]を最小とする計量が最も効率的な経路積分。

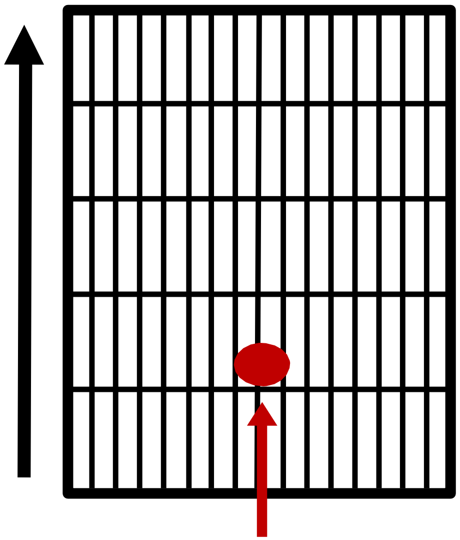
（N=「量子計算の複雑性」の一種　[Cf. Susskind 2014-]　）

2次元CFTでは、N[ω]はリュービル作用と等しい。

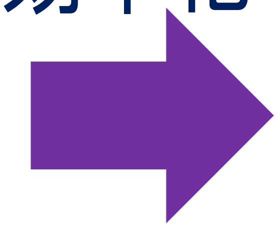
$$N_{2D}[\omega] = \frac{c}{24\pi}\int dxdz\left[(\partial_x\omega)^2 + (\partial_z\omega)^2 + e^{2\omega}\right].$$

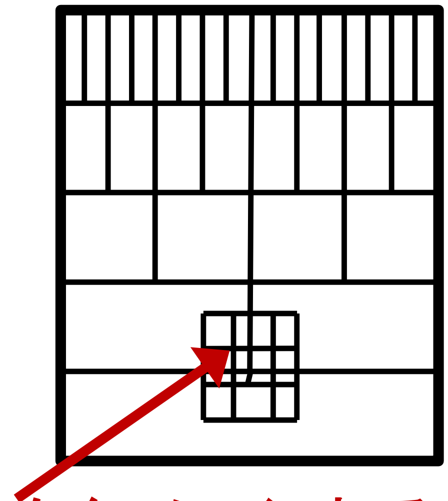
励起状態に対する経路積分の効率化

経路積分



効率化

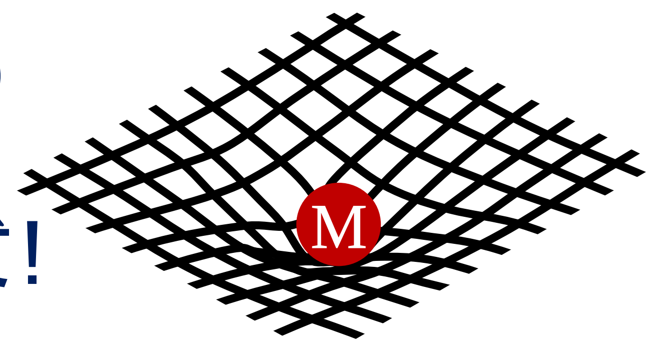




局所的励起
（エネルギー源）

離散化を細かくする必要がある⇒計量が大きくなる

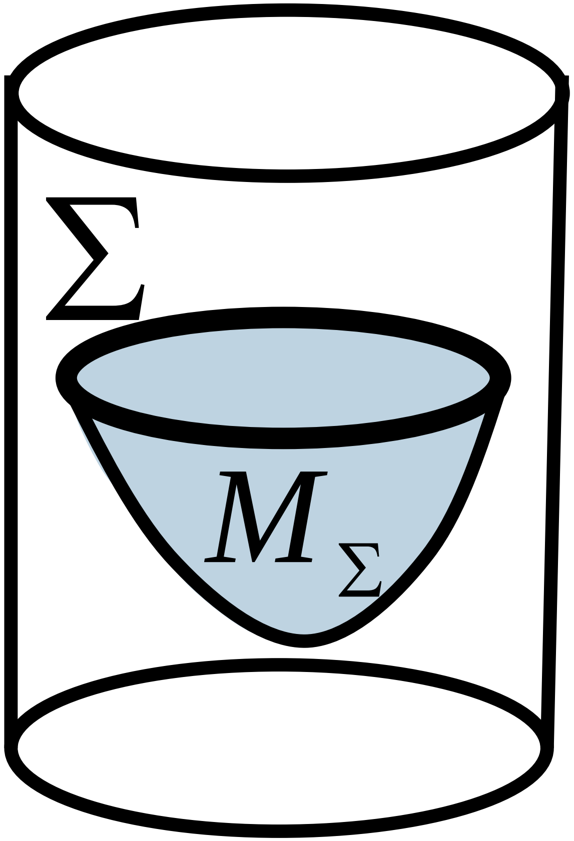
エネルギー源(=情報源)が背景の時空を曲げる
⇒一般相対論の本質！



この定式化から得られる対応関係

余次元１曲面 M_{Σ}＝ ネットワーク（量子回路）

余次元２曲面 Σ ＝ 量子状態



時空の幾何構造＝量子エンタングルメントの構造

重力ダイナミクス＝エンタングルメントの時間発展

⑥おわりに

本講演では、ブラックホール・エントロピーや
ゲージ重力対応から始まり、最近の話題である
量子情報と重力理論の深い関わり合いを紹介した。

重力理論は(最速の)量子コンピューター？

ゲージ重力
対応

重力理論の計算 ‘宇宙’の解析	=	場の理論の計算 ‘物質’の解析

重力理論の時空は量子ビットの集合体？

ごく最近の話題：BH情報問題へのEWの応用 [Pennington, Almheiri et.al. 2019]

しかし、現在のところ‘宇宙’が宇宙定数が負である反ドジッター時空の場合しか扱えない。

より現実の宇宙ではむしろ宇宙定数は非負であると期待されることから、**従来のゲージ重力対応を、例えばドジッター宇宙やビックバン宇宙などへ大きく拡張することが求められる。**

その際に「重力理論を量子ビットの幾何学とみなす」という本講演で紹介させて頂いた新しいアプローチが重要な鍵となると期待される。

我々の研究グループの紹介

京大基礎物理学研究所(基研)

基研素粒子論グループ
(元気な大学院生を毎年募集)

当研究所開催の国際会議
It from Qubit School(今年6月)

高柳のグループの勉強会

ご清聴ありがとうございました！