数学基礎論サマースクール
- モデル理論 -

坪井明人

筑波大学数理物質科学研究科

Logic Summer School in Kobe
Aug. 29, 2011

Outline

数学的構造と命題

数学的構造 M で命題 φ が成立することを

$$M \models \varphi$$

とかく.

Example

1. $\mathbb{R} \models \forall x(x \neq 0 \to 0 < x^2)$,
2. $\mathbb{C} \models \exists x(x^2 = -1)$.

数学的構造と命題

数学的構造 M で命題 φ が成立することを

$$M \models \varphi$$

とかく.

Example

1. $\mathbb{R} \models \forall x(x \neq 0 \to 0 < x^2)$,
2. $\mathbb{C} \models \exists x(x^2 = -1)$.

モデル理論を展開するためには，言語と構造の概念をより正確に定義する必要がある．

言語のイメージ

Example

- $(\mathbb{R}, 0, +, -)$ 加法群としての $\mathbb{R}$
- $(\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot)$ 体としての $\mathbb{R}$
- $(\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot, <)$ 順序体としての $\mathbb{R}$

言語のイメージ

Example

- $(\mathbb{R}, 0, +, -)$ 加法群としての $\mathbb{R}$
- $(\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot)$ 体としての $\mathbb{R}$
- $(\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot, <)$ 順序体としての $\mathbb{R}$

言語のイメージ

Example

- $(\mathbb{R}, 0, +, -)$ 加法群としての $\mathbb{R}$
- $(\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot)$ 体としての $\mathbb{R}$
- $(\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot, <)$ 順序体としての $\mathbb{R}$

モデル理論では

言語

数学で使う記号のうち，定数記号，関数記号，述語記号に注目する．これらからなる一つの集合を固定して，それを言語とよぶ．

それぞれの記号は定数記号か，関数記号か，述語記号なのかは指定されているとする．

モデル理論では

言語

数学で使う記号のうち，**定数記号**，**関数記号**，**述語記号**に注目する．これらからなる一つの集合を固定して，それを言語とよぶ．

それぞれの記号は定数記号か，関数記号か，述語記号なのかは指定されているとする．

例

Example

- 群の言語とは集合 $\{e, * \cdot *, *^{-1}\}$ のことである．
  ここで，e は単位元を単位元を表現するための定数記号，$* \cdot *$ は群の演算を表現するための２変数の関数記号，$*^{-1}$ は逆元を対応させる操作に対応する関数記号である．($*$ はそこに何かが代入できることを意味しようとしている．)
- 順序体の言語とは集合 $\{0, 1, * + *, -*, *\cdot, * < *\}$ のことである

例

Example

- 群の言語とは集合 $\{e, * \cdot *, *^{-1}\}$ のことである．
  ここで，e は単位元を単位元を表現するための定数記号，$* \cdot *$ は群の演算を表現するための２変数の関数記号，$*^{-1}$ は逆元を対応させる操作に対応する関数記号である．($*$ はそこに何かが代入できることを意味しようとしている．)
- 順序体の言語とは集合 $\{0, 1, * + *, -*, *\cdot, * < *\}$ のことである

注意

Remark

群の言語は $\{c, F(*,*), G(*)\}$ でもよい．
群を表現できる記号の集合ならば何でもよい．

論理式とは

言語と変数を用いて作られる形式的な命題

項

Definition (項)

L を言語とする．L の項は次のように帰納的に定義される．

0. 変数と L に属する定数記号はすべて L の項である．
1. $t_1, ..., t_n$ がすべて L の項で，$F \in L$ が n 変数の関数記号ならば，$F(t_1, ..., t_n)$ は L の項である．
2. 以上の繰り返しで項とわかるものだけが L の項である．

通常上のような帰納的な定義においては，条件３は省略される．

項

Definition (項)

L を言語とする．L の項は次のように帰納的に定義される．

0. 変数と L に属する定数記号はすべて L の項である．
1. $t_1, ..., t_n$ がすべて L の項で，$F \in L$ が n 変数の関数記号ならば，$F(t_1, ..., t_n)$ は L の項である．
2. 以上の繰り返しで項とわかるものだけが L の項である．

通常上のような帰納的な定義においては，条件３は省略される．

例

Example

$L = \{c, F\}$ とする．ただし，c は定数記号，F は２変数関数記号である．このとき，

$$x, c, F(x, c), F(x, F(x, c)), F(F(x, c), F(x, c)), \ldots$$

などは L の項の例である．

Definition (原子論理式)

1. t と s が L の項のとき，記号列 $t = s$ は L の原子論理式である．
2. $t_1, ..., t_n$ がすべて L の項で，$P \in L$ が n 変数の述語記号ならば，$P(t_1, ..., t_n)$ は L の原子論理式である．

Example

$L = \{c, F, * < *\}$ とする．ただし，c は定数記号，F は２変数関数記号，$* < *$ は２変数述語記号である．このとき，

1. $F(x, c) = y$,
2. $F(x, y) < F(F(x, y), c)$

などは原子論理式の例である．

論理記号とよばれる記号 $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \forall, \exists$ を用意する．

Definition (論理式)

L の論理式（L-論理式）は帰納的に定義される．

1. L の原子論理式は L の論理式である．
2. φ, ψ が L の論理式で x が変数ならば，次はすべて L の論理式である．

$$\neg(\varphi),\ (\varphi) \wedge (\psi),\ (\varphi) \vee (\psi),\ (\varphi) \rightarrow (\psi),\ \forall x(\varphi), \exists x(\varphi)$$

括弧は適宜省略する．

論理記号とよばれる記号 $\neg, \wedge, \vee, \to, \forall, \exists$ を用意する．

Definition (論理式)

L の論理式（L-論理式）は帰納的に定義される．

1. L の原子論理式は L の論理式である．
2. φ, ψ が L の論理式で x が変数ならば，次はすべて L の論理式である．

$$\neg(\varphi),\ (\varphi) \wedge (\psi),\ (\varphi) \vee (\psi),\ (\varphi) \to (\psi),\ \forall x(\varphi), \exists x(\varphi)$$

括弧は適宜省略する．

構造の定義

- $L = \{c_0, c_1, ...\} \cup \{F_0, F_1, ...\} \cup \{P_0, P_, ...\}$ を言語とする．ただし，c_i は定数記号，F_i はの関数記号，P_i は述語記号とする．
- 言語は単なる記号の集合である．
- 記号に意味を与えるのが構造である（その記号を今どんな意味で扱おうとしているのか，それを決めるのが構造である）．

構造の定義

- $L = \{c_0, c_1, ...\} \cup \{F_0, F_1, ...\} \cup \{P_0, P_{,}...\}$ を言語とする．ただし，c_i は定数記号，F_i はの関数記号，P_i は述語記号とする．
- 言語は**単なる記号の集合**である．
- 記号に意味を与えるのが構造である（その記号を今どんな意味で扱おうとしているのか，それを決めるのが構造である）．

構造の定義

- $L = \{c_0, c_1, ...\} \cup \{F_0, F_1, ...\} \cup \{P_0, P_{,}...\}$ を言語とする．ただし，c_i は定数記号，F_i はの関数記号，P_i は述語記号とする．
- 言語は**単なる記号の集合**である．
- **記号に意味を与えるのが構造**である（その記号を今どんな意味で扱おうとしているのか，それを決めるのが構造である）．

Definition (構造)

次の条件を満たす対

$$(M;\ c_0^M, c_1^M, \ldots,\ F_0^M, F_1^M, \ldots,\ P_0^M, P_1^M, \ldots)$$

を一つの L-構造とよぶ：

1. $M \neq \emptyset$
2. $c_i^M \in M$
3. $F_i^M : M^{m_i} \to M$ （F_i が m_i 変数関数記号）
4. $P_i^M \subset M^{n_i}$ （P_i が n_i 変数述語記号）

c_i^M を定数記号 c_i の M における解釈とよぶ．同様に F_i^M は関数記号 F_i の解釈，P_i^M を述語記号 P_i の解釈とよぶ．M を上の構造のユニバース（領域）とよぶ．

上の構造を簡単に M とかくことがある．

Definition (構造)

次の条件を満たす対

$$(M;\ c_0^M, c_1^M, \dots,\ F_0^M, F_1^M, \dots,\ P_0^M, P_1^M, \dots)$$

を一つの L-構造とよぶ：

1. $M \neq \emptyset$
2. $c_i^M \in M$
3. $F_i^M : M^{m_i} \to M$ （F_i が m_i 変数関数記号）
4. $P_i^M \subset M^{n_i}$ （P_i が n_i 変数述語記号）

c_i^M を定数記号 c_i の M における解釈とよぶ．同様に F_i^M は関数記号 F_i の解釈，P_i^M を述語記号 P_i の解釈とよぶ．M を上の構造のユニバース（領域）とよぶ．

上の構造を簡単に M とかくことがある．

Definition (構造)

次の条件を満たす対

$$(M;\ c_0^M, c_1^M, \ldots,\ F_0^M, F_1^M, \ldots,\ P_0^M, P_1^M, \ldots)$$

を一つの L-構造とよぶ：

1. $M \neq \emptyset$
2. $c_i^M \in M$
3. $F_i^M : M^{m_i} \to M$ （F_i が m_i 変数関数記号）
4. $P_i^M \subset M^{n_i}$ （P_i が n_i 変数述語記号）

c_i^M を定数記号 c_i の M における解釈とよぶ．同様に F_i^M は関数記号 F_i の解釈，P_i^M を述語記号 P_i の解釈とよぶ．M を上の構造のユニバース（領域）とよぶ．
上の構造を簡単に M とかくことがある．

Definition (項の解釈)

M を L-構造とする．L の項 $t(x_1, ..., x_n)$ と $a_1, ..., a_n \in M$ に対して，「t に $a_1, ..., a_n$ を代入した値」（$t^M(a_1, ..., a_n)$）を帰納的に定義する:

0
- t が変数 x_i のときのとき，

$$t^M(a_1, ..., a_n) := a_i.$$

- t が定数記号 c のとき，

$$t^M(a_1, ..., a_n) := c^M.$$

1 t が $F(t_1(x_1, ..., x_n), ..., t_m(x_1, ..., x_n))$ のとき，

$$t^M(a_1, ..., a_n) := F^M(t_1^M(a_1, ..., a_n), ..., t_m^M(a_1, ..., a_n)).$$

論理式の解釈

Definition (原子論理式の解釈)

$a_1, ..., a_n \in M$ とし，$\varphi = \varphi(x_1, ..., x_n)$ を L-論理式とする.「M で $\varphi(a_1, ..., a_n)$ が成立する」）という関係

$$M \models \varphi(a_1, ..., a_n)$$

を定義する.

- φ が $t(x_1, ..., x_n) = u(x_1, ..., x_n)))$ のとき

$$M \models \varphi(a_1, ..., a_n) \iff t^M(a_1, ..., a_n) = u^M(a_1, ..., a_n).$$

- φ が $P(t_1(x_1, ..., x_n), ..., t_m(x_1, ..., x_n))$ のとき

$$M \models \varphi(a_1, ..., a_n) \iff (t_1^M(a_1, ..., a_n), ..., t_m^M(a_1, ..., a_n)) \in P^M.$$

論理式の解釈（帰納的定義による）

Definition (一般の論理式の解釈)

- $M \models \varphi_1(x_1, ..., x_n) \wedge \varphi_2(x_1, ..., x_n)$
  $\iff$ “$M \models \varphi_1(a_1, ..., a_n)$ かつ $M \models \varphi_2(a_1, ..., a_n)$”.
- $M \models \varphi_1(x_1, ..., x_n) \vee \varphi_2(x_1, ..., x_n)$
  $\iff$ “$M \models \varphi_1(a_1, ..., a_n)$ または $M \models \varphi_2(a_1, ..., a_n)$”.
- $M \models \varphi_1(x_1, ..., x_n) \rightarrow \varphi_2(x_1, ..., x_n)$
  $\iff$ “$M \models \varphi_1(a_1, ..., a_n)$ ならば $M \models \varphi_2(a_1, ..., a_n)$”.
- $M \models \neg\varphi(a_1, ..., a_n) \iff$ “$M \models \varphi(a_1, ..., a_n)$ でない”.
- $M \models \exists x \psi(x, x_1, ..., x_n)$
  $\iff$ $M \models \psi(b, a_1, ..., a_n)$” となる $b \in M$ が存在する.
- $M \models \forall x \psi(x, x_1, ..., x_n)$
  $\iff$ $M \models \psi(b, a_1, ..., a_n)$” が任意の $b \in M$ で成立する.

ウルトラフィルター

Definition

(ウルトラフィルター) 無限集合 I とその部分集合全体 $\mathcal{P}(I)$ を考える．$U \subset \mathcal{P}(I)$ とする．

1. U は有限交叉性を持つ
   $\iff \forall \underbrace{A_1, \ldots, A_n}_{finite} \in U$ に対して，$\bigcap_{i=1 \ldots n} A_i \neq \emptyset$．
2. U が I 上のウルトラフィルター
   $\iff U$ は有限交叉性を持つ $\mathcal{P}(I)$ の部分集合の中で極大．

例

Example

1. I を無限集合とする．$A \subset I$ が補有限（cofinite）であるとは，A の補集合 $A^c = I \setminus A$ が有限となることである．
$F = \{A \subset I : A$ は補有限$\}$ とすれば，F は有限交叉性を持つ．
2. I を非可算集合とする．$F = \{A \subset I : A^c$ は高々可算$\}$ とすれば，F は有限交叉性を持つ．

Remark

I 上のウルトラフィルター U に対して次が成立する．

1. $A \subset I$ に対して，$A \in U$ または $A^c \in U$;
2. $A \in U,\ A \subset B \subset I \ \Rightarrow\ B \in U$;
3. $A \in U,\ B \in U \iff A \cap B \in U$.

$A \in U$ または $A^c \in U$ の証明

- A, A^c の両方が U に属さないとする（背理法）．
- $U \cup \{A\}$ と $U \cup \{A^c\}$ はともに U の真の拡大．
- U の極大性から，$U \cup \{A\}$ と $U \cup \{A^c\}$ はともに有限交差性を持たない．
- このことは，U 自体が有限交差性を持たないことを意味する．
- それは U がウルトラフィルターであることに矛盾．

$A \in U$ または $A^c \in U$ の証明

- A, A^c の両方が U に属さないとする（背理法）．
- $U \cup \{A\}$ と $U \cup \{A^c\}$ はともに U の真の拡大．
- U の極大性から，$U \cup \{A\}$ と $U \cup \{A^c\}$ はともに有限交差性を持たない．
- このことは，U 自体が有限交差性を持たないことを意味する．
- それは U がウルトラフィルターであることに矛盾．

$A \in U$ または $A^c \in U$ の証明

- A, A^c の両方が U に属さないとする（背理法）．
- $U \cup \{A\}$ と $U \cup \{A^c\}$ はともに U の真の拡大．
- U の極大性から，$U \cup \{A\}$ と $U \cup \{A^c\}$ はともに有限交差性を持たない．
- このことは，U 自体が有限交差性を持たないことを意味する．
- それは U がウルトラフィルターであることに矛盾．

$A \in U$ または $A^c \in U$ の証明

- A, A^c の両方が U に属さないとする（背理法）．
- $U \cup \{A\}$ と $U \cup \{A^c\}$ はともに U の真の拡大．
- U の極大性から，$U \cup \{A\}$ と $U \cup \{A^c\}$ はともに有限交差性を持たない．
- このことは，U 自体が有限交差性を持たないことを意味する．
- それは U がウルトラフィルターであることに矛盾．

$A \in U$ または $A^c \in U$ の証明

- A, A^c の両方が U に属さないとする（背理法）．
- $U \cup \{A\}$ と $U \cup \{A^c\}$ はともに U の真の拡大．
- U の極大性から，$U \cup \{A\}$ と $U \cup \{A^c\}$ はともに有限交差性を持たない．
- このことは，U 自体が有限交差性を持たないことを意味する．
- それは U がウルトラフィルターであることに矛盾．

$A \in U$ または $A^c \in U$ の証明

- A, A^c の両方が U に属さないとする（背理法）.
- $U \cup \{A\}$ と $U \cup \{A^c\}$ はともに U の真の拡大.
- U の極大性から，$U \cup \{A\}$ と $U \cup \{A^c\}$ はともに有限交差性を持たない.
- このことは，U 自体が有限交差性を持たないことを意味する.
- それは U がウルトラフィルターであることに矛盾.

$A \in U, A \subset B \subset I \Rightarrow B \in U$ の証明

- $B \notin U$ とする（背理法）．
- $B^c \in U$ を得る．
- よって，$A, B^c \in U$.
- しかし，$A \cap B^c = \emptyset$.
- これは U が有限交差的でないことを意味する．矛盾．

$A \in U, A \subset B \subset I \Rightarrow B \in U$の証明

- $B \notin U$とする（背理法）．
- $B^c \in U$を得る．
- よって，$A, B^c \in U$.
- しかし，$A \cap B^c = \emptyset$.
- これはUが有限交差的でないことを意味する．矛盾．

$A \in U, A \subset B \subset I \Rightarrow B \in U$ の証明

- $B \notin U$ とする（背理法）．
- $B^c \in U$ を得る．
- よって，$A, B^c \in U$.
- しかし，$A \cap B^c = \emptyset$.
- これは U が有限交差的でないことを意味する．矛盾．

$A \in U, A \subset B \subset I \Rightarrow B \in U$ の証明

- $B \notin U$ とする（背理法）．
- $B^c \in U$ を得る．
- よって，$A, B^c \in U$.
- しかし，$A \cap B^c = \emptyset$.
- これは U が有限交差的でないことを意味する．矛盾．

$A \in U, A \subset B \subset I \Rightarrow B \in U$ の証明

- $B \notin U$ とする（背理法）．
- $B^c \in U$ を得る．
- よって，$A, B^c \in U$.
- しかし，$A \cap B^c = \emptyset$.
- これは U が有限交差的でないことを意味する．矛盾．

$A \in U, A \subset B \subset I \Rightarrow B \in U$ の証明

- $B \notin U$ とする（背理法）．
- $B^c \in U$ を得る．
- よって，$A, B^c \in U$.
- しかし，$A \cap B^c = \emptyset$.
- これは U が有限交差的でないことを意味する．矛盾．

$A \in U,\ B \in U \iff A \cap B \in U$ の証明は演習問題．

Lemma

$F \subset \mathcal{P}(I)$ が有限交差性を持てば，I 上のウルトラフィルターに拡大される．

証明

- $\mathfrak{X} = \{X \subset \mathcal{P}(I) : F \subset X, X$ は有限交差性を持つ $\}$ を考える．
- この集合には包含関係に関して極大な集合 U が存在する．（Zorn の補題）
- U が求めるウルトラフィルターである．

証明

- $\mathfrak{X} = \{X \subset \mathcal{P}(I) : F \subset X, X$ は有限交差性を持つ $\}$ を考える．
- この集合には包含関係に関して極大な集合 U が存在する．（Zorn の補題）
- U が求めるウルトラフィルターである．

証明

- $\mathfrak{X} = \{X \subset \mathcal{P}(I) : F \subset X, X$ は有限交差性を持つ $\}$ を考える．
- この集合には包含関係に関して極大な集合 U が存在する．（Zorn の補題）
- U が求めるウルトラフィルターである．

証明

- $\mathfrak{X} = \{X \subset \mathcal{P}(I) : F \subset X, X$ は有限交差性を持つ$\}$ を考える.
- この集合には包含関係に関して極大な集合 U が存在する.
(Zorn の補題)
- U が求めるウルトラフィルターである.

重要な例

Example

$\mathbb{N}$ の補有限集合全体を F とする．よって F は $\mathbb{N}$ 上のウルトラフィルター U_F に拡大される．

しばらく言語 L は関数記号だけからなる場合を考える．一般の場合もまったく同様の議論ができる．

直積構造

- 各 $i \in I$ に対して，M_i を L-構造が与えられている．
- ユニバースの直積 $N = \prod_{i \in I} M_i$ を考える．
- N の元は $(a_i)_{i \in I}$ の形をしている．
- 関数記号 $F \in L$ の解釈を成分ごとの計算に帰着することにより N は L-構造となる：

$$F^N(a^1, ..., a^n) = \left(F^{M_i}(a_i^1, ..., a_i^n)\right)_{i \in I}$$

ただし，$a^j = (a_i^j)_{i \in I} \in N$ である．

Example

G_i $(i \in I)$ を群たちとする．直積群 $\prod_{i \in I} G_i$ は（われわれの意味で）直積構造になっている．

Remark

$|I| \geq 2$ として，F_i $(i \in I)$ たちを体とする．このとき，F_i たちの直積は体にはならない．

超積（Ultraproduct）

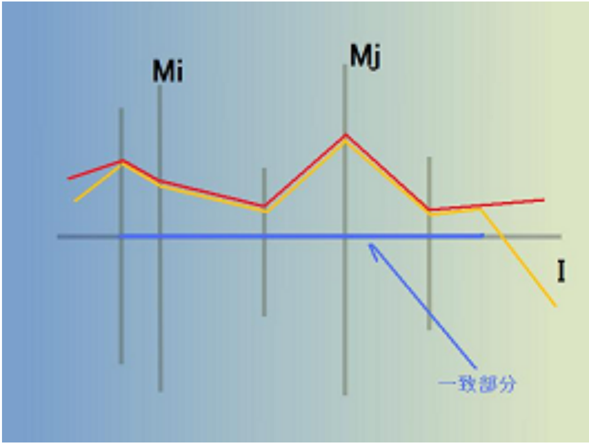
- $N = \prod_{i \in I} M_i$ を L-構造たちの直積構造とする．
- U を I 上のウルトラフィルターとする．
- N 上に同値関係 $\sim$ を導入する：

$$(a_i)_{i \in I} \sim (b_i)_{i \in I} \iff \{i \in I : a_i = b_i\} \in U.$$

- $M^* = N/\sim = \{[(a_i)_{i \in I}] : (a_i)_{i \in I} \in N\}$ とする．
- M^* を以下の解釈で L-構造にする．

$$F^{M^*}([a^1], ..., [a^n]) = [F^N(a^1, ..., a^n)].$$

- L-構造としての M^* を M_i たちのウルトラプロダクトという．


Mi
Mj
I
一致部分

Remark

上の定義が *well-defined* なことは調べておく必要がある．すなわち，$a^1 \sim b^1, \ldots, a^n \sim b^n$ のとき，

$$F^N(a^1, \ldots, a^n) \sim F^N(b^1, \ldots, b^n)$$

を示す必要がある．しかし，これは「$A, B \in U$ のとき $A \cap B \in U$」を使えば簡単である．

Lemma

$t(x^1, ..., x^n)$ を L の項とする．$[a^1], ..., [a^n], [b] \in M^*$ に対して，

$$t^{M^*}([a^1], ..., [a^n]) = [b] \iff \{i \in I : t^{M_i}(a_i^1, ..., a_i^n) = b_i\} \in U.$$

t が変数記号 x のときは自明．t が L の関数記号 F のとき，

$$\begin{aligned} F^{M^*}([a^1], ..., [a^n]) = [b] &\iff [F^N(a^1, ..., a^n)] = [b] \\ &\iff [\left(F^{M_i}(a_i^1, ..., a_i^n)\right)_i] = [(b_i)_i] \\ &\iff \{i \in I : F^{M_i}(a_i^1, ..., a_i^n) = b_i\} \in U. \end{aligned}$$

後は t の構成に関する帰納法で示せばよい

Lemma

$t(x^1, \ldots, x^n)$ を L の項とする．$[a^1], \ldots, [a^n], [b] \in M^*$ に対して，

$$t^{M^*}([a^1], \ldots, [a^n]) = [b] \iff \{i \in I : t^{M_i}(a_i^1, \ldots, a_i^n) = b_i\} \in U.$$

t が変数記号 x のときは自明．t が L の関数記号 F のとき，

$$\begin{aligned} F^{M^*}([a^1], \ldots, [a^n]) = [b] &\iff [F^N(a^1, \ldots, a^n)] = [b] \\ &\iff [\left(F^{M_i}(a_i^1, \ldots, a_i^n)\right)_i] = [(b_i)_i] \\ &\iff \{i \in I : F^{M_i}(a_i^1, \ldots, a_i^n) = b_i\} \in U. \end{aligned}$$

後は t の構成に関する帰納法で示せばよい

Lemma

$t(x^1, \ldots, x^n)$ を L の項とする．$[a^1], \ldots, [a^n], [b] \in M^*$ に対して，

$$t^{M^*}([a^1], \ldots, [a^n]) = [b] \iff \{i \in I : t^{M_i}(a_i^1, \ldots, a_i^n) = b_i\} \in U.$$

t が変数記号 x のときは自明．t が L の関数記号 F のとき，

$$\begin{aligned} F^{M^*}([a^1], \ldots, [a^n]) = [b] &\iff [F^N(a^1, \ldots, a^n)] = [b] \\ &\iff [\left(F^{M_i}(a_i^1, \ldots, a_i^n)\right)_i] = [(b_i)_i] \\ &\iff \{i \in I : F^{M_i}(a_i^1, \ldots, a_i^n) = b_i\} \in U. \end{aligned}$$

後は t の構成に関する帰納法で示せばよい

Lemma

$t(x^1, ..., x^n)$ を L の項とする．$[a^1], ..., [a^n], [b] \in M^*$ に対して，

$$t^{M^*}([a^1], ..., [a^n]) = [b] \iff \{i \in I : t^{M_i}(a_i^1, ..., a_i^n) = b_i\} \in U.$$

左辺 $\iff M^* \models t([a^1], ..., [a^n]) = [b]$
右辺 $\iff M_i \models t(a_i^1, ..., a_i^n) = b_i$ for a.a. $i \in I$
に注意する．

別表現

$M^* \models t([a^1], ..., [a^n]) = [b]$
$\iff M_i \models t(a_i^1, ..., a_i^n) = b_i$ for a.a. $i \in I$

Lemma

$t(x^1, ..., x^n)$ を L の項とする．$[a^1], ..., [a^n], [b] \in M^*$ に対して，

$$t^{M^*}([a^1], ..., [a^n]) = [b] \iff \{i \in I : t^{M_i}(a_i^1, ..., a_i^n) = b_i\} \in U.$$

左辺 $\iff M^* \models t([a^1], ..., [a^n]) = [b]$
右辺 $\iff M_i \models t(a_i^1, ..., a_i^n) = b_i$ for a.a. $i \in I$
に注意する．

別表現

$M^* \models t([a^1], ..., [a^n]) = [b]$
$\iff M_i \models t(a_i^1, ..., a_i^n) = b_i$ for a.a. $i \in I$

Lemma

$t(x^1, ..., x^n)$ を L の項とする．$[a^1], ..., [a^n], [b] \in M^*$ に対して，

$$t^{M^*}([a^1], ..., [a^n]) = [b] \iff \{i \in I : t^{M_i}(a_i^1, ..., a_i^n) = b_i\} \in U.$$

左辺 $\iff$ $M^* \models t([a^1], ..., [a^n]) = [b]$
右辺 $\iff$ $M_i \models t(a_i^1, ..., a_i^n) = b_i$ for a.a. $i \in I$
に注意する．

別表現

$M^* \models t([a^1], ..., [a^n]) = [b]$
$\iff$ $M_i \models t(a_i^1, ..., a_i^n) = b_i$ for a.a. $i \in I$

ウルトラプロダクトの基本定理

Theorem (Łoś)

任意の $[a^1], ..., [a^m] \in M^*$ に対して次が成立する：

$$M^* \models \varphi([a^1], ..., [a^n]) \iff M_i \models \varphi(a_i^1, ..., a_i^n) \text{ for a.a. } i \in I$$

0) φ が原子論理式のときは補題から明らか．後は φ の構成に関する帰納法で示せばよい．

$$M^* \models \varphi([a^1], \ldots, [a^n]) \iff \{i \in I : M_i \models \varphi(a_i^1, \ldots, a_i^n)\} \in U$$

1) φ が $\neg\psi$ のとき：

$$\begin{aligned} M^* \models \neg\psi([a], \ldots) &\Leftrightarrow M^* \models \psi([a], \ldots) \text{ でない} \\ &\Leftrightarrow \{i \in I : M_i \models \psi(a_i, \ldots)\} \notin U \\ &\Leftrightarrow \{i \in I : M_i \models \psi(a_i, \ldots)\}^c \in U \\ &\Leftrightarrow \{i \in I : M_i \models \neg\psi(a_i, \ldots)\} \in U. \end{aligned}$$

2) φ が $\exists y\psi(x^1, \ldots, y)$ のとき：

$$\begin{aligned} M^* \models \exists y\psi([a], \ldots, y) &\Leftrightarrow M^* \models \psi([a], \ldots, [b]) \ \exists b \in M^* \\ &\Leftrightarrow \{i \in I : M_i \models \psi(a_i, \ldots, b_i)\} \in U \ \ \exists b \in M^* \\ &\Leftrightarrow \{i \in I : M_i \models \exists y\psi(a_i, \ldots, y)\} \in U \end{aligned}$$

3) その他の論理記号の場合も同様である．

基本定理の系

U を I 上のウルトラフィルター，M_i $(i \in I)$ を L-構造たちとして，それらのウルトラプロダクトを

$$\prod_{i \in I} M_i \Big/ U$$

で表わす．Łoś の定理をパラメータ抜きで書くと次の形になる．

Theorem

L-閉論理式（自由変数のない論理式）φ に対して，

$$\prod_{i \in I} M_i \Big/ U \models \varphi \iff M_i \models \varphi \text{ for a.a. } i \in I.$$

基本定理の系

Definition

T を L-閉論理式の集合とする．M が T のモデルである（記号 $M \models T$）とは，任意の $\varphi \in T$ に対して，

$$M \models \varphi$$

となることである．

基本定理の系

Theorem (コンパクト性定理)

T を L-閉論理式の集合とする．次は同値：

1. T はモデルを持つ；
2. T の任意有限部分 T_0 はモデルを持つ．

証明

2 ⇒ 1 を示せばよい．

- T を可算として示す．$T = \{\varphi_0, \varphi_2, \ldots\}$.
- $M_n \models \varphi_0 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$ をとる．
- U を $\mathbb{N}$ の補有限集合全体を拡大したウルトラフィルター．
- $M^* = \prod_{i \in I} M_i \big/ U$．
- φ_n は番号が n 以上の M_m で成立する．
- $M^* \models \varphi_n$ （基本定理を使う）．

証明

$2 \Rightarrow 1$ を示せばよい．

- T を可算として示す． $T = \{\varphi_0, \varphi_2, \ldots\}$.
- $M_n \models \varphi_0 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$ をとる．
- U を $\mathbb{N}$ の補有限集合全体を拡大したウルトラフィルター．
- $M^* = \prod_{i \in I} M_i \big/ U$．
- φ_n は番号が n 以上の M_m で成立する．
- $M^* \models \varphi_n$ （基本定理を使う）．

証明

$2 \Rightarrow 1$ を示せばよい．

- T を可算として示す．$T = \{\varphi_0, \varphi_2, \ldots\}$.
- $M_n \models \varphi_0 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$ をとる．
- U を $\mathbb{N}$ の補有限集合全体を拡大したウルトラフィルター．
- $M^* = \prod_{i \in I} M_i \big/ U$．
- φ_n は番号が n 以上の M_m で成立する．
- $M^* \models \varphi_n$ （基本定理を使う）．

証明

$2 \Rightarrow 1$ を示せばよい．

- T を可算として示す． $T = \{\varphi_0, \varphi_2, \ldots\}$.
- $M_n \models \varphi_0 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$ をとる．
- U を $\mathbb{N}$ の補有限集合全体を拡大したウルトラフィルター．
- $M^* = \prod_{i \in I} M_i \big/ U$．
- φ_n は番号が n 以上の M_m で成立する．
- $M^* \models \varphi_n$ （基本定理を使う）．

証明

$2 \Rightarrow 1$ を示せばよい．

- T を可算として示す．$T = \{\varphi_0, \varphi_2, \ldots\}$.
- $M_n \models \varphi_0 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$ をとる．
- U を $\mathbb{N}$ の補有限集合全体を拡大したウルトラフィルター．
- $M^* = \prod_{i \in I} M_i \Big/ U$．
- φ_n は番号が n 以上の M_m で成立する．
- $M^* \models \varphi_n$ （基本定理を使う）．

証明

$2 \Rightarrow 1$ を示せばよい．

- T を可算として示す．$T = \{\varphi_0, \varphi_2, \ldots\}$.
- $M_n \models \varphi_0 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$ をとる．
- U を $\mathbb{N}$ の補有限集合全体を拡大したウルトラフィルター．
- $M^* = \prod_{i \in I} M_i \big/ U$.
- φ_n は番号が n 以上の M_m で成立する．
- $M^* \models \varphi_n$ （基本定理を使う）．

証明

$2 \Rightarrow 1$ を示せばよい．

- T を可算として示す．$T = \{\varphi_0, \varphi_2, \ldots\}$.
- $M_n \models \varphi_0 \wedge \cdots \wedge \varphi_n$ をとる．
- U を $\mathbb{N}$ の補有限集合全体を拡大したウルトラフィルター．
- $M^* = \prod_{i \in I} M_i \big/ U$．
- φ_n は番号が n 以上の M_m で成立する．
- $M^* \models \varphi_n$ (基本定理を使う)．

自然数の超準モデル

Example

- $\mathbb{N}$ を $\{0, 1, +, \cdot, <\}$-構造と考える．
- c を新しい定数記号として，次の T を考える．

$$T = \{\varphi : \mathbb{N} \models \varphi\} \cup \{c > n : n \in \mathbb{N}\}$$

- $T_0 \subset_{fin} T$ が与えられたとき，T_0 のモデルの存在を示す．

$$T_0 = \{\varphi : \mathbb{N} \models \varphi\} \cup \{c > n_1, \ldots, c > n_k\}$$

- c の解釈を $\max\{n_1, ..., n_k\} + 1$ とすれば，$\mathbb{N} \models T_0$.
- コンパクト性定理により，$\mathbb{N}^* \models T$ が存在する．
- $\mathbb{N}$ と $\mathbb{N}^*$ は論理式で区別できない．しかし，$\mathbb{N}^*$ には c の解釈をとることができるので，$\mathbb{N}^* \not\cong \mathbb{N}$.

自然数の超準モデル

Example

- $\mathbb{N}$ を $\{0, 1, +, \cdot, <\}$-構造と考える．
- c を新しい定数記号として，次の T を考える．

$$T = \{\varphi : \mathbb{N} \models \varphi\} \cup \{c > n : n \in \mathbb{N}\}$$

- $T_0 \subset_{fin} T$ が与えられたとき，T_0 のモデルの存在を示す．

$$T_0 = \{\varphi : \mathbb{N} \models \varphi\} \cup \{c > n_1, \ldots, c > n_k\}$$

- c の解釈を $\max\{n_1, ..., n_k\} + 1$ とすれば，$\mathbb{N} \models T_0$.
- コンパクト性定理により，$\mathbb{N}^* \models T$ が存在する．
- $\mathbb{N}$ と $\mathbb{N}^*$ は論理式で区別できない．しかし，$\mathbb{N}^*$ には c の解釈をとることができるので，$\mathbb{N}^* \not\cong \mathbb{N}$.

自然数の超準モデル

Example

- $\mathbb{N}$ を $\{0, 1, +, \cdot, <\}$-構造と考える．
- c を新しい定数記号として，次の T を考える．

$$T = \{\varphi : \mathbb{N} \models \varphi\} \cup \{c > n : n \in \mathbb{N}\}$$

- $T_0 \subset_{fin} T$ が与えられたとき，T_0 のモデルの存在を示す．

$$T_0 = \{\varphi : \mathbb{N} \models \varphi\} \cup \{c > n_1, \ldots, c > n_k\}$$

- c の解釈を $\max\{n_1, ..., n_k\} + 1$ とすれば，$\mathbb{N} \models T_0$.
- コンパクト性定理により，$\mathbb{N}^* \models T$ が存在する．
- $\mathbb{N}$ と $\mathbb{N}^*$ は論理式で区別できない．しかし，$\mathbb{N}^*$ には c の解釈をとることができるので，$\mathbb{N}^* \not\cong \mathbb{N}$.

自然数の超準モデル

Example

- $\mathbb{N}$ を $\{0, 1, +, \cdot, <\}$-構造と考える．
- c を新しい定数記号として，次の T を考える．

$$T = \{\varphi : \mathbb{N} \models \varphi\} \cup \{c > n : n \in \mathbb{N}\}$$

- $T_0 \subset_{fin} T$ が与えられたとき，T_0 のモデルの存在を示す．

$$T_0 = \{\varphi : \mathbb{N} \models \varphi\} \cup \{c > n_1, \ldots, c > n_k\}$$

- c の解釈を $\max\{n_1, ..., n_k\} + 1$ とすれば，$\mathbb{N} \models T_0$.
- コンパクト性定理により，$\mathbb{N}^* \models T$ が存在する．
- $\mathbb{N}$ と $\mathbb{N}^*$ は論理式で区別できない．しかし，$\mathbb{N}^*$ には c の解釈をとることができるので，$\mathbb{N}^* \not\cong \mathbb{N}$.

自然数の超準モデル

Example

- $\mathbb{N}$ を $\{0, 1, +, \cdot, <\}$-構造と考える．
- c を新しい定数記号として，次の T を考える．

$$T = \{\varphi : \mathbb{N} \models \varphi\} \cup \{c > n : n \in \mathbb{N}\}$$

- $T_0 \subset_{fin} T$ が与えられたとき，T_0 のモデルの存在を示す．

$$T_0 = \{\varphi : \mathbb{N} \models \varphi\} \cup \{c > n_1, \ldots, c > n_k\}$$

- c の解釈を $\max\{n_1, ..., n_k\} + 1$ とすれば，$\mathbb{N} \models T_0$.
- コンパクト性定理により，$\mathbb{N}^* \models T$ が存在する．
- $\mathbb{N}$ と $\mathbb{N}^*$ は論理式で区別できない．しかし，$\mathbb{N}^*$ には c の解釈をとることができるので，$\mathbb{N}^* \not\cong \mathbb{N}$.

自然数の超準モデル

Example

- $\mathbb{N}$ を $\{0, 1, +, \cdot, <\}$-構造と考える．
- c を新しい定数記号として，次の T を考える．

$$T = \{\varphi : \mathbb{N} \models \varphi\} \cup \{c > n : n \in \mathbb{N}\}$$

- $T_0 \subset_{fin} T$ が与えられたとき，T_0 のモデルの存在を示す．

$$T_0 = \{\varphi : \mathbb{N} \models \varphi\} \cup \{c > n_1, \ldots, c > n_k\}$$

- c の解釈を $\max\{n_1, ..., n_k\} + 1$ とすれば，$\mathbb{N} \models T_0$.
- コンパクト性定理により，$\mathbb{N}^* \models T$ が存在する．
- $\mathbb{N}$ と $\mathbb{N}^*$ は論理式で区別できない．しかし，$\mathbb{N}^*$ には c の解釈をとることができるので，$\mathbb{N}^* \not\cong \mathbb{N}$.

自然数の超準モデル

Example

- $\mathbb{N}$ を $\{0, 1, +, \cdot, <\}$-構造と考える．
- c を新しい定数記号として，次の T を考える．

$$T = \{\varphi : \mathbb{N} \models \varphi\} \cup \{c > n : n \in \mathbb{N}\}$$

- $T_0 \subset_{fin} T$ が与えられたとき，T_0 のモデルの存在を示す．

$$T_0 = \{\varphi : \mathbb{N} \models \varphi\} \cup \{c > n_1, \ldots, c > n_k\}$$

- c の解釈を $\max\{n_1, ..., n_k\} + 1$ とすれば，$\mathbb{N} \models T_0$.
- コンパクト性定理により，$\mathbb{N}^* \models T$ が存在する．
- $\mathbb{N}$ と $\mathbb{N}^*$ は論理式で区別できない．しかし，$\mathbb{N}^*$ には c の解釈をとることができるので，$\mathbb{N}^* \not\cong \mathbb{N}$.

Elementary Extension

Remark

$n \in \mathbb{N}$ と $\mathbb{N}^*$ における n（$\mathbb{N}^*$ の乗法単位元を n 個足したもの）を同一視すると，$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}^*$ と思える．作り方から，任意の $\varphi(x_1, ..., x_k)$ と $n_1, ..., n_k \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\mathbb{N} \models \varphi(n_1, ..., n_k) \iff \mathbb{N}^* \models \varphi(n_1, ..., n_k)$$

Definition

L-構造の拡大 $M \subset N$ に対して，N が M の基本拡大（elementary extension）であるとは，任意の $\varphi(x_1, ..., x_k)$ と $a_1, ..., a_k \in M$ に対して，

$$M \models \varphi(a_1, ..., a_k) \iff N \models \varphi(a_1, ..., a_k)$$

となること．記号で $M \prec N$ とかく．

Elementary Extension

Remark

$n \in \mathbb{N}$ と $\mathbb{N}^*$ における n（$\mathbb{N}^*$ の乗法単位元を n 個足したもの）を同一視すると，$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}^*$ と思える．作り方から，任意の $\varphi(x_1, ..., x_k)$ と $n_1, ..., n_k \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\mathbb{N} \models \varphi(n_1, ..., n_k) \iff \mathbb{N}^* \models \varphi(n_1, ..., n_k)$$

Definition

L-構造の拡大 $M \subset N$ に対して，N が M の基本拡大（elementary extension）であるとは，任意の $\varphi(x_1, ..., x_k)$ と $a_1, ..., a_k \in M$ に対して，

$$M \models \varphi(a_1, ..., a_k) \iff N \models \varphi(a_1, ..., a_k)$$

となること．記号で $M \prec N$ とかく．

Elementary Extension

Remark

$n \in \mathbb{N}$ と $\mathbb{N}^*$ における n（$\mathbb{N}^*$ の乗法単位元を n 個足したもの）を同一視すると，$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}^*$ と思える．作り方から，任意の $\varphi(x_1, ..., x_k)$ と $n_1, ..., n_k \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\mathbb{N} \models \varphi(n_1, ..., n_k) \iff \mathbb{N}^* \models \varphi(n_1, ..., n_k)$$

Definition

L-構造の拡大 $M \subset N$ に対して，N が M の基本拡大（elementary extension）であるとは，任意の $\varphi(x_1, ..., x_k)$ と $a_1, ..., a_k \in M$ に対して，

$$M \models \varphi(a_1, ..., a_k) \iff N \models \varphi(a_1, ..., a_k)$$

となること．記号で $M \prec N$ とかく．

Saturation

時間があれば....

Löwenheim-Skolem

時間があれば....

$\mathbb{R}$ の拡大

- 自然数の真の拡大 $\mathbb{N}^* \succ \mathbb{N}$ の存在は示した．
- 実数の真の拡大も同様に存在する．

$\mathbb{R}$ の拡大

- 自然数の真の拡大 $\mathbb{N}^* \succ \mathbb{N}$ の存在は示した．
- 実数の真の拡大も同様に存在する．

$\mathbb{R}$ の拡大

- 自然数の真の拡大 $\mathbb{N}^* \succ \mathbb{N}$ の存在は示した．
- 実数の真の拡大も同様に存在する．

$\mathbb{R}$ の言語

$$\mathbb{R} = (\mathbb{R}; \underbrace{0, 1, +, -, \cdot, <}_{\text{ordered field}}, r, \ldots, f, \ldots, R, \ldots)$$

と考える．ここで順序体の言語を拡大した L^* を

$$L^* = \{\text{ordered field language}\} \cup \{c_r\}_r \cup \{F_f\}_f \cup \{P_R\}_R$$

とすると，$\mathbb{R}$ は自明に L^*-構造になる．$c_r{}^{\mathbb{R}} = r$, $F_f{}^{\mathbb{R}} = f$, $P_R{}^{\mathbb{R}} = R$.

$\mathbb{R}$ の言語

$$\mathbb{R} = (\mathbb{R}; \underbrace{0, 1, +, -, \cdot, <}_{\text{ordered field}}, r, \ldots, f, \ldots, R, \ldots)$$

と考える．ここで順序体の言語を拡大した L^* を

$$L^* = \{\text{ordered field language}\} \cup \{c_r\}_r \cup \{F_f\}_f \cup \{P_R\}_R$$

とすると，$\mathbb{R}$ は自明に L^*-構造になる．$c_r{}^{\mathbb{R}} = r$, $F_f{}^{\mathbb{R}} = f$, $P_R{}^{\mathbb{R}} = R$.

$\mathbb{R}$ の言語

$$\mathbb{R} = (\mathbb{R}; \underbrace{0, 1, +, -, \cdot, <}_{\text{ordered field}}, r, ..., f, ..., R, ...)$$

と考える．ここで順序体の言語を拡大した L^* を

$$L^* = \{\text{ordered field language}\} \cup \{c_r\}_r \cup \{F_f\}_f \cup \{P_R\}_R$$

とすると，$\mathbb{R}$ は自明に L^*-構造になる．$c_r{}^{\mathbb{R}} = r$, $F_f{}^{\mathbb{R}} = f$, $P_R{}^{\mathbb{R}} = R$.

$\mathbb{R}^*$

自然数を拡大したのと同様に，L^*-構造としての $\mathbb{R}$ を拡大して，無限大が存在する $\mathbb{R}^*$ をとれる．

- $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^*$ は L^*-論理式で区別できない．

$$\mathbb{R} \models \varphi \iff \mathbb{R}^* \models \varphi.$$

- $\mathbb{R}$ のどの元よりも大きな $c^* \in \mathbb{R}^*$ が存在する．

$\mathbb{R}^*$

自然数を拡大したのと同様に，L^*-構造としての $\mathbb{R}$ を拡大して，無限大が存在する $\mathbb{R}^*$ をとれる．

- $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^*$ は L^*-論理式で区別できない．

$$\mathbb{R} \models \varphi \iff \mathbb{R}^* \models \varphi.$$

- $\mathbb{R}$ のどの元よりも大きな $c^* \in \mathbb{R}^*$ が存在する．

$\mathbb{R}^*$

自然数を拡大したのと同様に，L^*-構造としての $\mathbb{R}$ を拡大して，無限大が存在する $\mathbb{R}^*$ をとれる．

- $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^*$ は L^*-論理式で区別できない．

$$\mathbb{R} \models \varphi \iff \mathbb{R}^* \models \varphi.$$

- $\mathbb{R}$ のどの元よりも大きな $c^* \in \mathbb{R}^*$ が存在する．

Lemma

$\mathbb{R}$ は $\mathbb{R}^*$ に埋め込める．この埋め込みにより $\mathbb{R} \prec \mathbb{R}^*$ と思う．

$\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ を $\sigma(r) = c_r^{\mathbb{R}^*}$ で定義する．m 変数関数記号 $F_f \in L$ に対して，

$$
\begin{aligned}
\mathbb{R} \models F_f(r_1, \ldots, r_m) = s \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathbb{R} \models F_f(c_{r_1}, \ldots, c_{r_m}) = c_s \\
&\Longleftrightarrow \quad F_f(c_{r_1}, \ldots, c_{r_m}) = c_s \in T \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathbb{R}^* \models F_f(c_{r_1}, \ldots, c_{r_m}) = c_s \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathbb{R}^* \models F_f(c_{r_1}{}^{\mathbb{R}^*}, \ldots, c_{r_m}{}^{\mathbb{R}^*}) = c_s{}^{\mathbb{R}^*} \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathbb{R}^* \models F_f(\sigma(r_1), \ldots, \sigma(c_{r_m})) = \sigma(s).
\end{aligned}
$$

他も同様．

Lemma

$\mathbb{R}$ は $\mathbb{R}^*$ に埋め込める．この埋め込みにより $\mathbb{R} \prec \mathbb{R}^*$ と思う．

$\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ を $\sigma(r) = c_r^{\mathbb{R}^*}$ で定義する．m 変数関数記号 $F_f \in L$ に対して，

$$\begin{aligned}
\mathbb{R} \models F_f(r_1, \ldots, r_m) = s \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathbb{R} \models F_f(c_{r_1}, \ldots, c_{r_m}) = c_s \\
&\Longleftrightarrow \quad F_f(c_{r_1}, \ldots, c_{r_m}) = c_s \in T \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathbb{R}^* \models F_f(c_{r_1}, \ldots, c_{r_m}) = c_s \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathbb{R}^* \models F_f(c_{r_1}{}^{\mathbb{R}^*}, \ldots, c_{r_m}{}^{\mathbb{R}^*}) = c_s{}^{\mathbb{R}^*} \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathbb{R}^* \models F_f(\sigma(r_1), \ldots, \sigma(c_{r_m})) = \sigma(s).
\end{aligned}$$

他も同様．

$\mathbb{R}^*$ の性質

- $\mathbb{R}^*$ は無限大の元 d を持つ（$\mathbb{R}$ のどの元より大きい元）
- $\mathbb{R}^*$ は無限小の元を持つ（例えば $1/d$, 絶対値が $\mathbb{R}^+$ のどの元より小さい）
- $\boldsymbol{R} \prec \mathbb{R}^*$
- $\mathbb{R} \not\cong \mathbb{R}^*$.

Definition

$a, b \in \mathbb{R}^*$ に対して，$a - b$ が無限小となるとき，$a \approx b$ とかく．

Proposition

$a \in \mathbb{R}$ とする．関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して次は同値である．

1. f は a において連続である．
2. 任意の無限小 ε に対して，$f^*(a + \varepsilon) \approx f^*(a)$

Definition

$a, b \in \mathbb{R}^*$ に対して，$a - b$ が無限小となるとき，$a \approx b$ とかく．

Proposition

$a \in \mathbb{R}$ とする．関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して次は同値である．

1. f は a において連続である．
2. 任意の無限小 ε に対して，$f^*(a + \varepsilon) \approx f^*(a)$

$1 \Rightarrow 2$ の証明

- f が a で連続とする．
- 各自然数 $n \neq 0$ に対して，次を満たす実数 $\delta_n > 0$ が存在する

$$\mathbb{R} \models \forall x(|x - a| < \delta_n \rightarrow |f(x) - f(a)| < 1/n)$$

-

$$\mathbb{R}^* \models \forall x(|x - a| < \delta_n \rightarrow |f^*(x) - f^*(a)| < 1/n).$$

- x に $a + \varepsilon$ を代入すると，

$$\mathbb{R}^* \models |(a + \varepsilon) - a| < \delta_n \rightarrow |f^*(a + \varepsilon) - f^*(a)| < 1/n.$$

- 仮定部分 $|(a + \varepsilon) - a| < \delta_n$ は成立するので，

$$\mathbb{R}^* \models |f^*(a + \varepsilon) - f^*(a)| < 1/n.$$

- これは $f^*(a + \varepsilon) \approx f^*(a)$ を意味する．

$1 \Rightarrow 2$ の証明

- f が a で連続とする．
- 各自然数 $n \neq 0$ に対して，次を満たす実数 $\delta_n > 0$ が存在する

$$\mathbb{R} \models \forall x(|x - a| < \delta_n \rightarrow |f(x) - f(a)| < 1/n)$$

- $$\mathbb{R}^* \models \forall x(|x - a| < \delta_n \rightarrow |f^*(x) - f^*(a)| < 1/n).$$
- x に $a + \varepsilon$ を代入すると，

$$\mathbb{R}^* \models |(a + \varepsilon) - a| < \delta_n \rightarrow |f^*(a + \varepsilon) - f^*(a)| < 1/n.$$

- 仮定部分 $|(a + \varepsilon) - a| < \delta_n$ は成立するので，

$$\mathbb{R}^* \models |f^*(a + \varepsilon) - f^*(a)| < 1/n.$$

- これは $f^*(a + \varepsilon) \approx f^*(a)$ を意味する．

$1 \Rightarrow 2$ の証明

- f が a で連続とする．
- 各自然数 $n \neq 0$ に対して，次を満たす実数 $\delta_n > 0$ が存在する

$$\mathbb{R} \models \forall x(|x-a| < \delta_n \to |f(x) - f(a)| < 1/n)$$

-

$$\mathbb{R}^* \models \forall x(|x-a| < \delta_n \to |f^*(x) - f^*(a)| < 1/n).$$

- x に $a+\varepsilon$ を代入すると，

$$\mathbb{R}^* \models |(a+\varepsilon) - a| < \delta_n \to |f^*(a+\varepsilon) - f^*(a)| < 1/n.$$

- 仮定部分 $|(a+\varepsilon) - a| < \delta_n$ は成立するので，

$$\mathbb{R}^* \models |f^*(a+\varepsilon) - f^*(a)| < 1/n.$$

- これは $f^*(a+\varepsilon) \approx f^*(a)$ を意味する．

$1 \Rightarrow 2$ の証明

- f が a で連続とする．
- 各自然数 $n \neq 0$ に対して，次を満たす実数 $\delta_n > 0$ が存在する

$$\mathbb{R} \models \forall x(|x - a| < \delta_n \rightarrow |f(x) - f(a)| < 1/n)$$

-

$$\mathbb{R}^* \models \forall x(|x - a| < \delta_n \rightarrow |f^*(x) - f^*(a)| < 1/n).$$

- x に $a + \varepsilon$ を代入すると，

$$\mathbb{R}^* \models |(a + \varepsilon) - a| < \delta_n \rightarrow |f^*(a + \varepsilon) - f^*(a)| < 1/n.$$

- 仮定部分 $|(a + \varepsilon) - a| < \delta_n$ は成立するので，

$$\mathbb{R}^* \models |f^*(a + \varepsilon) - f^*(a)| < 1/n.$$

- これは $f^*(a + \varepsilon) \approx f^*(a)$ を意味する．

$1 \Rightarrow 2$ の証明

- f が a で連続とする．
- 各自然数 $n \neq 0$ に対して，次を満たす実数 $\delta_n > 0$ が存在する

$$\mathbb{R} \models \forall x(|x - a| < \delta_n \to |f(x) - f(a)| < 1/n)$$

- $$\mathbb{R}^* \models \forall x(|x - a| < \delta_n \to |f^*(x) - f^*(a)| < 1/n).$$
- x に $a + \varepsilon$ を代入すると，

$$\mathbb{R}^* \models |(a + \varepsilon) - a| < \delta_n \to |f^*(a + \varepsilon) - f^*(a)| < 1/n.$$

- 仮定部分 $|(a + \varepsilon) - a| < \delta_n$ は成立するので，

$$\mathbb{R}^* \models |f^*(a + \varepsilon) - f^*(a)| < 1/n.$$

- これは $f^*(a + \varepsilon) \approx f^*(a)$ を意味する．

$1 \Rightarrow 2$ の証明

- f が a で連続とする．
- 各自然数 $n \neq 0$ に対して，次を満たす実数 $\delta_n > 0$ が存在する

$$\mathbb{R} \models \forall x(|x-a| < \delta_n \to |f(x) - f(a)| < 1/n)$$

-

$$\mathbb{R}^* \models \forall x(|x-a| < \delta_n \to |f^*(x) - f^*(a)| < 1/n).$$

- x に $a + \varepsilon$ を代入すると，

$$\mathbb{R}^* \models |(a+\varepsilon) - a| < \delta_n \to |f^*(a+\varepsilon) - f^*(a)| < 1/n.$$

- 仮定部分 $|(a+\varepsilon) - a| < \delta_n$ は成立するので，

$$\mathbb{R}^* \models |f^*(a+\varepsilon) - f^*(a)| < 1/n.$$

- これは $f^*(a+\varepsilon) \approx f^*(a)$ を意味する．

$1 \Rightarrow 2$ の証明

- f が a で連続とする．
- 各自然数 $n \neq 0$ に対して，次を満たす実数 $\delta_n > 0$ が存在する

$$\mathbb{R} \models \forall x(|x-a| < \delta_n \to |f(x) - f(a)| < 1/n)$$

- $$\mathbb{R}^* \models \forall x(|x-a| < \delta_n \to |f^*(x) - f^*(a)| < 1/n).$$
- x に $a+\varepsilon$ を代入すると，

$$\mathbb{R}^* \models |(a+\varepsilon) - a| < \delta_n \to |f^*(a+\varepsilon) - f^*(a)| < 1/n.$$

- 仮定部分 $|(a+\varepsilon) - a| < \delta_n$ は成立するので，

$$\mathbb{R}^* \models |f^*(a+\varepsilon) - f^*(a)| < 1/n.$$

- これは $f^*(a+\varepsilon) \approx f^*(a)$ を意味する．

$2 \Rightarrow 1$ の証明

- f が a で連続でないとする（対偶を示す）.
- このとき，$\varepsilon > 0$ と関数 $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ によって，

$$\mathbb{R} \models \forall x \in \mathbb{N}[|g(x) - a| < \frac{1}{x} \ \wedge \ |f(g(x)) - f(a)| > \varepsilon].$$

-

$$\mathbb{R}^* \models \forall x \in \mathbb{N}^*[\, |g^*(x) - a| < \frac{1}{x} \wedge |f^*(g^*(x)) - f^*(a)| > \varepsilon\,]$$

- x に $b \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ を代入すると，

$$\mathbb{R}^* \models |g^*(b) - a| < \frac{1}{b} \ \wedge \ |f^*(g^*(b)) - f^*(a)| > \varepsilon.$$

- このとき，$g^*(b) - a$ は無限小.
- しかし，$f^*(g^*(b)) - f^*(a)$ は無限小ではない（2 でない）.

$2 \Rightarrow 1$ の証明

- f が a で連続でないとする（対偶を示す）．
- このとき，$\varepsilon > 0$ と関数 $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ によって，

$$\mathbb{R} \models \forall x \in \mathbb{N}[|g(x) - a| < \frac{1}{x} \ \wedge \ |f(g(x)) - f(a)| > \varepsilon \ ].$$

-

$$\mathbb{R}^* \models \forall x \in \mathbb{N}^*[\ |g^*(x) - a| < \frac{1}{x} \wedge |f^*(g^*(x)) - f^*(a)| > \varepsilon \ ]$$

- x に $b \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ を代入すると，

$$\mathbb{R}^* \models |g^*(b) - a| < \frac{1}{b} \ \wedge \ |f^*(g^*(b)) - f^*(a)| > \varepsilon.$$

- このとき，$g^*(b) - a$ は無限小．
- しかし，$f^*(g^*(b)) - f^*(a)$ は無限小ではない（2 でない）．

$2 \Rightarrow 1$ の証明

- f が a で連続でないとする（対偶を示す）．
- このとき，$\varepsilon > 0$ と関数 $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ によって，

$$\mathbb{R} \models \forall x \in \mathbb{N}[|g(x) - a| < \frac{1}{x} \ \wedge \ |f(g(x)) - f(a)| > \varepsilon].$$

-

$$\mathbb{R}^* \models \forall x \in \mathbb{N}^*[\,|g^*(x) - a| < \frac{1}{x} \wedge |f^*(g^*(x)) - f^*(a)| > \varepsilon\,]$$

- x に $b \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ を代入すると，

$$\mathbb{R}^* \models |g^*(b) - a| < \frac{1}{b} \ \wedge \ |f^*(g^*(b)) - f^*(a)| > \varepsilon.$$

- このとき，$g^*(b) - a$ は無限小．
- しかし，$f^*(g^*(b)) - f^*(a)$ は無限小ではない（2 でない）．

$2 \Rightarrow 1$ の証明

- f が a で連続でないとする（対偶を示す）.
- このとき，$\varepsilon > 0$ と関数 $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ によって，

$$\mathbb{R} \models \forall x \in \mathbb{N}[|g(x) - a| < \frac{1}{x} \wedge |f(g(x)) - f(a)| > \varepsilon].$$

-

$$\mathbb{R}^* \models \forall x \in \mathbb{N}^*[\ |g^*(x) - a| < \frac{1}{x} \wedge |f^*(g^*(x)) - f^*(a)| > \varepsilon\ ]$$

- x に $b \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ を代入すると，

$$\mathbb{R}^* \models |g^*(b) - a| < \frac{1}{b} \wedge |f^*(g^*(b)) - f^*(a)| > \varepsilon.$$

- このとき，$g^*(b) - a$ は無限小.
- しかし，$f^*(g^*(b)) - f^*(a)$ は無限小ではない（2 でない）.

$2 \Rightarrow 1$ の証明

- f が a で連続でないとする（対偶を示す）．
- このとき，$\varepsilon > 0$ と関数 $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ によって，

$$\mathbb{R} \models \forall x \in \mathbb{N}[|g(x) - a| < \frac{1}{x} \ \wedge \ |f(g(x)) - f(a)| > \varepsilon\,].$$

-

$$\mathbb{R}^* \models \forall x \in \mathbb{N}^*[\, |g^*(x) - a| < \frac{1}{x} \wedge |f^*(g^*(x)) - f^*(a)| > \varepsilon\,]$$

- x に $b \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ を代入すると，

$$\mathbb{R}^* \models |g^*(b) - a| < \frac{1}{b} \ \wedge \ |f^*(g^*(b)) - f^*(a)| > \varepsilon.$$

- このとき，$g^*(b) - a$ は無限小．
- しかし，$f^*(g^*(b)) - f^*(a)$ は無限小ではない（2 でない）．

$2 \Rightarrow 1$ の証明

- f が a で連続でないとする（対偶を示す）．
- このとき，$\varepsilon > 0$ と関数 $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ によって，

$$\mathbb{R} \models \forall x \in \mathbb{N}[|g(x) - a| < \frac{1}{x} \wedge |f(g(x)) - f(a)| > \varepsilon].$$

-

$$\mathbb{R}^* \models \forall x \in \mathbb{N}^*[\ |g^*(x) - a| < \frac{1}{x} \wedge |f^*(g^*(x)) - f^*(a)| > \varepsilon\ ]$$

- x に $b \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ を代入すると，

$$\mathbb{R}^* \models |g^*(b) - a| < \frac{1}{b} \wedge |f^*(g^*(b)) - f^*(a)| > \varepsilon.$$

- このとき，$g^*(b) - a$ は無限小．
- しかし，$f^*(g^*(b)) - f^*(a)$ は無限小ではない（2 でない）．

$2 \Rightarrow 1$ の証明

- f が a で連続でないとする（対偶を示す）．
- このとき，$\varepsilon > 0$ と関数 $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ によって，

$$\mathbb{R} \models \forall x \in \mathbb{N}[|g(x) - a| < \frac{1}{x} \ \wedge \ |f(g(x)) - f(a)| > \varepsilon\,].$$

-

$$\mathbb{R}^* \models \forall x \in \mathbb{N}^*[\, |g^*(x) - a| < \frac{1}{x} \wedge |f^*(g^*(x)) - f^*(a)| > \varepsilon\,]$$

- x に $b \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ を代入すると，

$$\mathbb{R}^* \models |g^*(b) - a| < \frac{1}{b} \ \wedge \ |f^*(g^*(b)) - f^*(a)| > \varepsilon.$$

- このとき，$g^*(b) - a$ は無限小．
- しかし，$f^*(g^*(b)) - f^*(a)$ は無限小ではない（2 でない）．

一様連続性

Proposition

関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して，次は同値である．

1. f は一様連続である．
2. 任意の $a, b \in \mathbb{R}^*$ に対して，

$$a \approx b \Rightarrow f^*(a) \approx f^*(b).$$

まとめ

- 言語と構造
- Łoś の定理
- コンパクト性定理
- 構造の拡大
- 応用（超準解析）

まとめ

- 言語と構造
- Łoś の定理
- コンパクト性定理
- 構造の拡大
- 応用（超準解析）

まとめ

- 言語と構造
- Łoś の定理
- コンパクト性定理
- 構造の拡大
- 応用（超準解析）

まとめ

- 言語と構造
- Łoś の定理
- コンパクト性定理
- 構造の拡大
- 応用（超準解析）

まとめ

- 言語と構造
- Łoś の定理
- コンパクト性定理
- 構造の拡大
- 応用（超準解析）

まとめ

- 言語と構造
- Łoś の定理
- コンパクト性定理
- 構造の拡大
- 応用（超準解析）

参考文献

[1] http://www.math.tsukuba.ac.jp/ tsuboi/und/logic/530.pdf

[2] **ゲーデルと** 20 **世紀の 論理学** 2**，完全性定理とモデル理論，田中一之編**