単位系の擬順序構造と次元解析

北野正雄

京都大学工学研究科

2012.1.8–9 第 1 回 QUATUO 研究会
高知工科大学

もくじ

はじめに

問題意識

- 複数の単位系
  - 電磁気における混乱の原因
    MKSA, CGS-esu, CGS-emu, CGS-Gauss, . . .
  - 力学では問題にならない
    MKS, CGS
- 基本単位
  - 基本単位はどのように選ぶのか
  - いくつ選ぶのが適切なのか
- 次元とは
  - tautology でない定義は
  - 次元解析の有効性
- 量, 単位系, 次元などに関する一般論が欲しい
  - 既存の例とそれらの関係の議論が多い

数と量

数と量

- 数 (number) と 量 (quantity) は異なる概念である
  — 数がなくても量は認識できる.
  — 数は電話で伝えられるが, 量は伝えられない.
- 数と量の関係

$$\langle \text{量} \rangle = \langle \text{数} \rangle \times \langle \text{単位} \rangle$$

$$(\text{例}) Q = \{Q\}[Q] = 2.3\,\mathrm{C}$$

- 単位 (unit) は基準として選ばれた量.
- 「計量」は単位を用いて量を数に対応させる操作.
- 数は紙や計算機で簡単に操作 (足したり引いたり) できる.
- 単位が変われば, 数は変化する.

量の表記

- (例) 地球の半径 R

$$R = 6370\,\mathrm{km} = 6370 \times 1\,\mathrm{km} = 6370 \times 0.54\,\text{海里} = 3440\,\text{海里}$$

- R という記号は量そのものを表している．$R = 6370$ や $R = 3440$ ではない！書くとすれば,

$$R/\mathrm{km} = 6370, \quad R/\text{海里} = 3440$$

- 練習: 以下の式の 2 つの “$+$” の意味の違いを考えよ．

$$\frac{W_1 + W_2}{\mathrm{kg}} = \frac{W_1}{\mathrm{kg}} + \frac{W_2}{\mathrm{kg}}$$

物理における式は次元つき

- 数式ではなく，量式！ — 単位に依存しない関係を記述
- ベクトル，テンソル，関数，演算子，ブラ，ケットなども次元をもつ場合がある．
- あぶない例
  - $V(t) = \sin(t + \pi/4)$
  - $i(t) = i_0\delta(t)$
  - $\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{e}_x$
  - $\log(f)$
- 計算のチェックに役立つ

(cf) Buckingham Π theorem (Phys. Rev. **4**, 345 (1914))

単位系の基礎

単位系の基礎

単位系は量の整理学 — 単なる単位の集まりではない

- 基本単位 (base) と組立単位 (derived)
  - 少数 (N 個) の単位を基本単位として選定.
  - 他の単位は基本単位の積・商・冪.
  - N-元単位系
- 一貫した単位系 (coherent)
  - 1 以外の変換係数が表れない
  - 実用上重要
- 有理単位系 (rational)
  - 方程式に球因子 4π が表れない. (点対称解には 4π, 線対称解には 2π が表れる.)

単位系（電磁気）の例

- MKSA 単位系 (SI)
  4 元, 有理
- CGS emu (electomagnetic unit)
  3 元, 非有理, $\mu_0 = 1$
- CGS esu (electrostatic unit)
  3 元, 非有理, $\varepsilon_0 = 1$
- CGS Gauss
  3 元, 非有理, (単位系もどき), $\mu_0 = \varepsilon_0 = 1$
- Heaviside-Lorentz 単位系
  有理化 Gauss 単位系

Gauss 単位系

CGS Gauss 単位系は依然ポピュラーだが問題が多い

- 非有理— 有理化したものが Heaviside-Lorentz 単位系
- 電気・磁気の対称性を保つために, $\mu_0 = 1$ と $\varepsilon_0 = 1$ を同時に要求.
  — CGS emu と CGS esu の場当たり的折衷.
- CGS emu と CGS esu の接合に問題あり

$$\mathrm{curl}\,\boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c_0}\boldsymbol{J} + \frac{1}{c_0}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \qquad \frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{J}$$

- 修正バージョンが提案されている: $c_0^{-1}\boldsymbol{J} \to \boldsymbol{J}$
  修正 Gauss 単位系 (cf. Jackson 付録)

ここで扱う単位系

系統的な比較を行うために, 次のような単位系を導入する. すべて有理化.
ガウス単位系はさらに修正.

- 有理化 CGS esu　(rCGS-esu)
- 有理化 CGS emu　(rCGS-emu)
- 修正 有理化 CGS gauss　(mrCGS-Gauss)
  修正 Heaviside-Lorentz 単位系 (mHL)
- MKSAQ 単位系 (5 元)

量の集合 Ω

単位や単位系は量の表現手段である．表現の対象となる量全体を次のように定義しておく．

- 量の集合 Ω
  - スカラー倍
    任意の $Q \in \Omega$, $c \in \mathbb{R}$ について $cQ \in \Omega$.
  - 積，冪
    任意の $P, Q (\neq 0) \in \Omega$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ に対して，$P^\alpha Q^\beta \in \Omega$.
    かけ算，割り算は自由にできる
  - 和
    Q_1, Q_2 に対して，$c \in \mathbb{R}$ が存在して $Q_2 = cQ_1$ と表されるとき，和を $Q_1 + Q_2 = (1 + c)Q_1$ と定義する．Q_1, Q_2 は Ω において可加算 (Ω-addible) であるとよぶ.
    スカラー倍の関係にある量しか足せない

単位系

単位系 U の定め方

- 基本単位 — 基準となる (独立な) 量 $u_i \in \Omega$ を N 個選ぶ;

$$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_N)$$

- $\boldsymbol{u}$ によって生成される量全体の集合 $\Omega_U \subset \Omega$

$$q_U u_1^{d_1} u_2^{d_2} \cdots u_N^{d_N} = q_U \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{d}}$$

$$q_U \in \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_N)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{Q}^N$$

- $\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{d}} := \prod_{i=1}^N u_i^{d_i} = u_1^{d_1} \cdots u_n^{d_N}$ は $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^N x_i y_i$ との類似性から

単位系による量の表現

- 単位系 U における量 Q の表現

$$\mathcal{U} : (Q \in \Omega) \mapsto \left(Q_U = q_U \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{d}} \in \Omega_U\right)$$

ここで $q_U = \{Q\}_U \in \mathbb{R}$ は係数 (数値), $\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{d}} = [Q]_U$ は単位を表す.
$\boldsymbol{u}$: 基本単位の集まり, $\boldsymbol{d}$: 次元

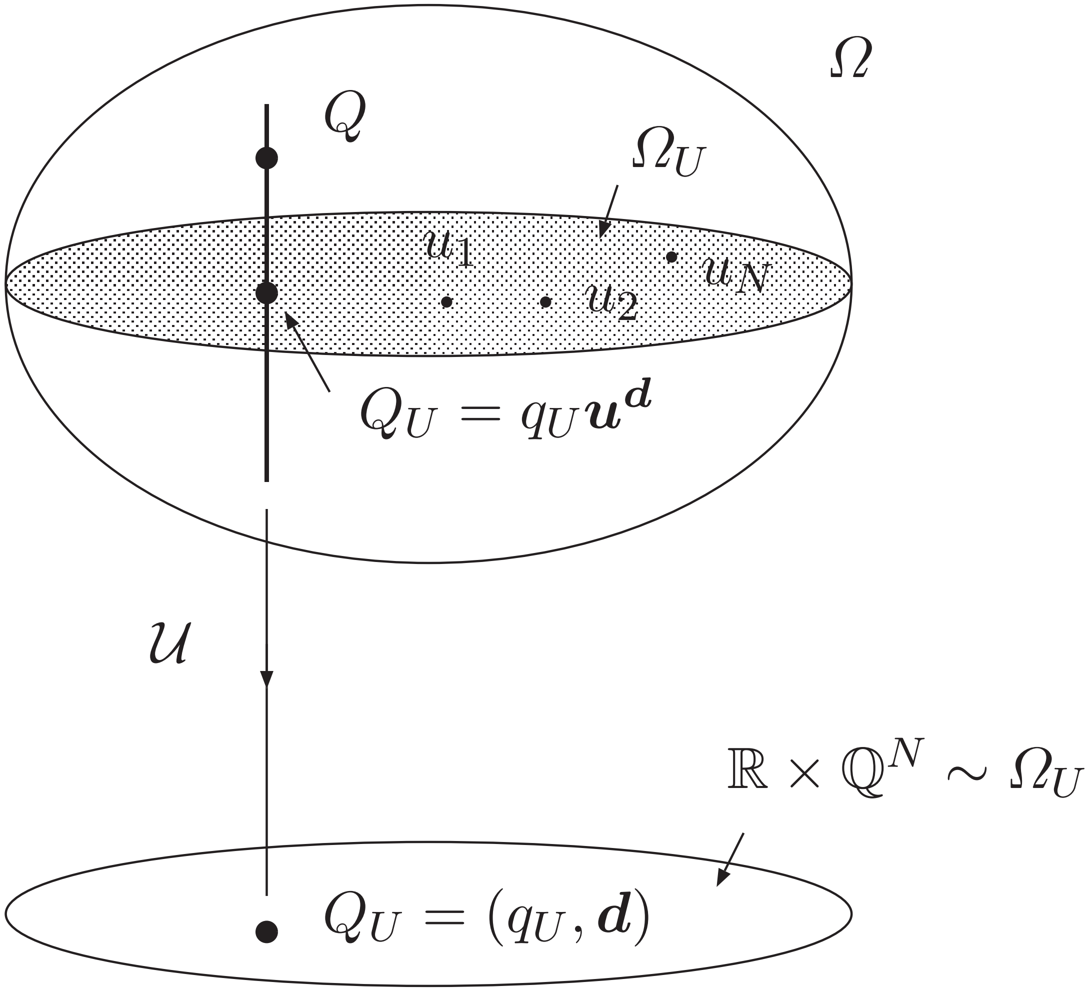
- $\Omega_U \sim \mathbb{R} \times \mathbb{Q}^N$ なので,

$$\mathcal{U} : (Q \in \Omega) \mapsto \left((q_U, \boldsymbol{d}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Q}^N\right)$$

と見なすこともできる.

- 通常, 物理量と呼んでいるものは, 表現 Q_U であり, 量 Q そのものではない.

写像 $\mathcal{U}$ (2 つの見方)



表現の例

- MKSA 単位系の基本単位 $\boldsymbol{u} = (\mathrm{m}, \mathrm{kg}, \mathrm{s}, \mathrm{A})$
- 磁束量子 $\Phi_0 (= \hbar/2e) \in \Omega$ は (MKSA) において

$$\mathcal{U}(\Phi_0) = \{\Phi_0\}_0 \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{d}} = 2.07 \times 10^{-15}\,\mathrm{m\,kg\,s^{-2}A^{-1}}$$

と表現される．ただし, $\boldsymbol{d} = (1, 1, -2, -1)^{\mathsf{T}}$.

$\mathcal{U}$ の性質 (1)

写像 $\mathcal{U}$ は次の性質を満たす.

- 任意の $Q \in \mathit{\Omega}$, 任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して

$$\mathcal{U}(cQ) = c\,\mathcal{U}(Q) = (c\,q_U)\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{d}}.$$

- $(0 \neq)\ Q, P \in \mathit{\Omega}$ が $\mathcal{U}(Q) = q_U\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{d}}$, $\mathcal{U}(P) = p_U\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{b}}$ と表現されるとき, 量 $Q^\alpha P^\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ は

$$\mathcal{U}(Q^\alpha P^\beta) = \mathcal{U}(Q)^\alpha \mathcal{U}(P)^\beta = (q_U^\alpha p_U^\beta)\boldsymbol{u}^{\alpha\boldsymbol{d}+\beta\boldsymbol{b}}.$$

と表現される. ここで $\boldsymbol{u}^{\alpha\boldsymbol{d}+\beta\boldsymbol{b}}$ は量 $Q^\alpha P^\beta$ を測る単位 (組立単位).

$\mathcal{U}$ の性質 (2)

- Q_1, Q_2 が Ω において可加算のとき, Q_1 と Q_2 は同じ次元 $\boldsymbol{d}$ で表現され,

$$\mathcal{U}(Q_1 + Q_2) = \mathcal{U}(Q_1) + \mathcal{U}(Q_2) = (q_{1U} + q_{2U})\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{d}}$$

- Q と P が Ω において可加算でなくても, 同じ次元 $\boldsymbol{d}$ で表現されることがある. この場合は, $Q + P$ は定義されないにもかかわらず,

$$\mathcal{U}(Q) + \mathcal{U}(P) = Q_U + P_U = (q_U + p_U)\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{d}}$$

  である. このとき, Q と P は単位系 U において可加算 (U-addible) であるという.
- 可加算性は単位系に依存する性質である.

$\mathcal{U}$ の性質 (3)

- $\mathcal{U}$ を上射であると仮定する．つまり，任意の $q \in \mathbb{R}$, 任意の $\boldsymbol{d} \in \mathbb{Q}^N$ に対して，$\mathcal{U}(Q) = q\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{d}}$ を満たす $Q \in \varOmega$ が少なくとも 1 つ存在するものとする．
- 単位系 $U = (\boldsymbol{u}, \mathcal{U})$ は基本単位の組 $\boldsymbol{u}$ と写像 $\mathcal{U} : \varOmega \to \mathbb{R} \times \mathbb{Q}^N$ によって特徴づけられる．
- 基本単位の数が N の単位系は N-元単位系と呼ばれる: $N =: \#(U)$.

順序構造

順序構造 (1) — 全順序

- 次の性質をもつ 2 項関係 $\geq$ を備えた集合 X を全順序集合という.
- 任意の $a, b, c \in X$ に対して
  - (完全関係) $a \geq b$ または $b \geq a$,
  - (反対称律) $a \geq b$, $b \geq a$ なら $a = b$,
  - (推移律) $a \geq b$, $b \geq c$ なら $a \geq c$,
  - (反射律) $a \geq a$,
- 整列可能
- (例) 数の大小関係

順序構造 (2) — 部分順序

- 次の性質をもつ 2 項関係 $\geq$ を備えた集合 X を部分順序集合 (Partially ordered set, POSET) という.
- 任意の $a, b, c \in X$ に対して
  - (反対称律) $a \geq b$, $b \geq a$ なら $a = b$,
  - (推移律) $a \geq b$, $b \geq c$ なら $a \geq c$,
  - (反射律) $a \geq a$,
- 比較できない場合がある
- (例) 集合の包含関係

順序構造 (3) — 擬順序

- 次の性質をもつ 2 項関係 $\geq$ を備えた集合 X を擬順序集合 (pre-ordered set) という.
- 任意の $a, b, c \in X$ に対して
  - (推移律) $a \geq b$, $b \geq c$ なら $a \geq c$,
  - (反射律) $a \geq a$,
- $a \neq b$ でも, $a \geq b$ と $b \geq a$ が同時に成り立つ場合がある
- (例) 世代の比較
- 同値関係 ($a \geq b$ かつ $b \geq a$) で X をクラス分けすれば, 部分順序が得られる.

U において等しい量

- 2 つの量 $Q, P \in \Omega$ について $\mathcal{U}(Q) = \mathcal{U}(P)$ が成り立つとき, $Q \overset{U}{=} P$ と書くことにする.
- すなわち, $\mathcal{U}(Q) = q_U \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{d}}$, $\mathcal{U}(P) = p_U \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{b}}$ に対して, $q_U = p_U$ かつ $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{b}$
- 当然のことながら, $Q = P$ なら $Q \overset{U}{=} P$.
- しかし, 逆はかならずしも成り立たない.

関係 $\overset{U}{=}$ は同値関係

- 関係 "$\overset{U}{=}$" は Ω における同値関係を与える.
- 任意の Q, Q', $Q'' \in \Omega$ について
  - (対称律) $Q \overset{U}{=} Q'$ なら $Q' \overset{U}{=} Q$,
  - (反射律) $Q \overset{U}{=} Q$,
  - (推移律) $Q \overset{U}{=} Q'$ かつ $Q' \overset{U}{=} Q''$ なら $Q' \overset{U}{=} Q''$.
- この同値関係をつかって Ω をクラス分けすることができる.

単位系間の移行可能性

- 2 つの単位系 U, V を考える. $N = \#(U)$, $M = \#(V)$.
- 任意の量 $Q, P \in \mathit{\Omega}$ に対して

$$(Q \overset{U}{=} P) \Rightarrow (Q \overset{V}{=} P)$$

  が成り立つとき,

$$U \succsim V$$

- U で等しいと見なされる量は V で必ず等しいと見なされる.
  逆に, V で区別される量は必ず U でも区別される.
- 単位系 U は V に移行可能 (transferable) であると呼ぶことにする.
- $N \geq M$

単位系の擬順序

- 単位系間の移行可能関係 “$\succsim$” は擬順序の公理を満たす.
- 任意の単位系 U, U', U'' について
  - $U \succsim U$,
  - $U \succsim U'$ かつ $U' \succsim U''$ なら, $U \succsim U''$.
- この順序構造を使って, 単位系を樹状図や家系図のように整理することができる.

単位系の間の関係

- $U \succsim V$ かつ $U \precsim V$ のとき, すなわち, U と V が相互に移行可能なとき, $U \sim V$ と表し, U と V を等価である (equivalent) と呼ぶ.
  $N = M$ である.
- $U \succsim V$ も $U \precsim V$ も成り立たない場合, すなわち, U と V がどちら側からも移行できない場合, $U \parallel V$ と表し, U と V は両立しない (incomparable) とよぶ.
- $U \succsim V$ かつ $V \not\succsim U$ の場合, $U \succ V$ と書く.

単位系の間の関係のまとめ

- 関係をまとめると

	$U \precsim V$	$U \not\precsim V$
$U \succsim V$	$U \sim V \ (N = M)$	$U \succ V \ (N > M)$
$U \not\succsim V$	$U \prec V \ (N < M)$	$U \parallel V \ (N <=> M)$

$N = \#(U)$, $M = \#(V)$.

単位系間の写像 $\mathcal{T}$

単位系による表現間の写像 (1)

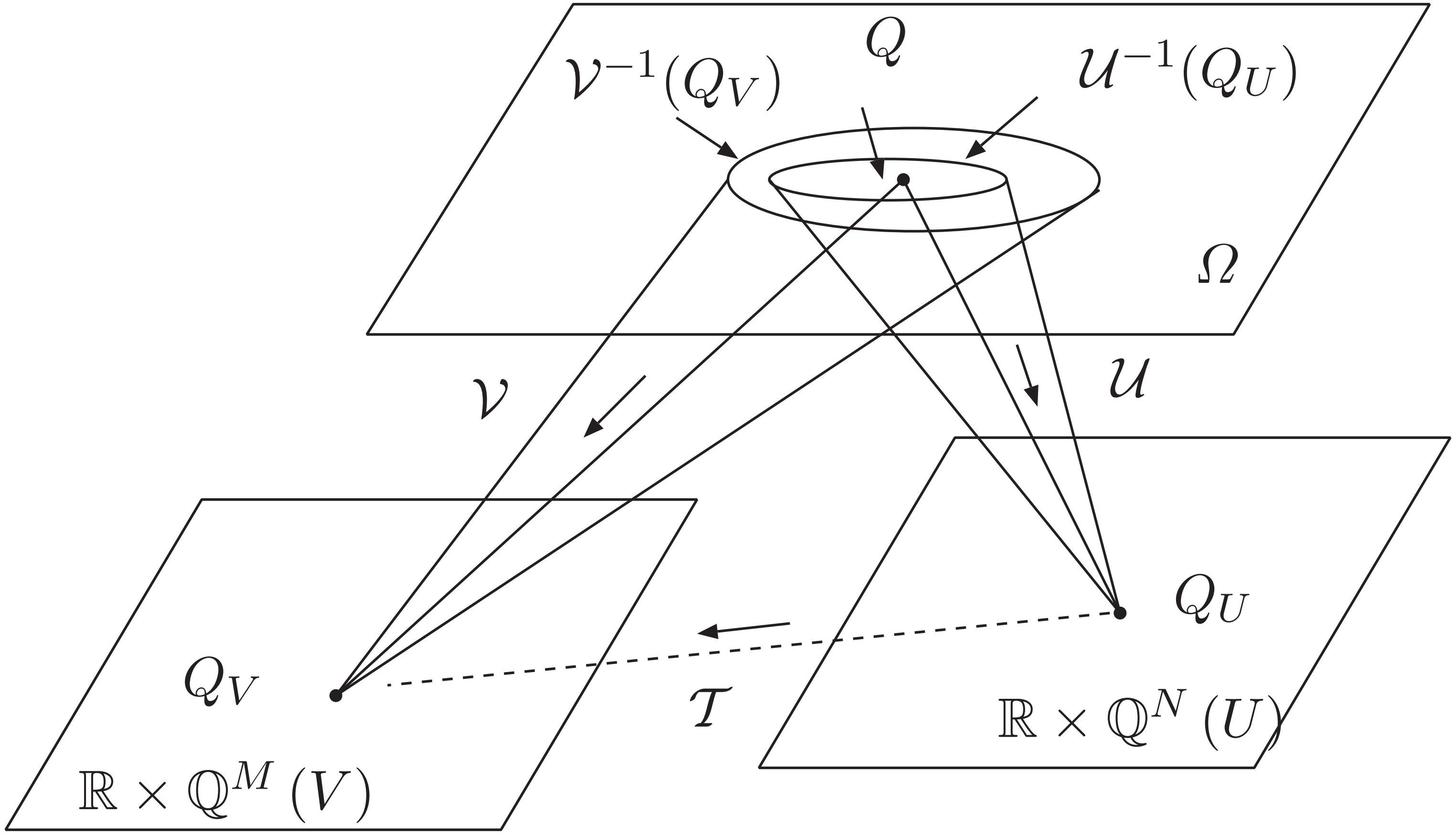
$U \gtrsim V$ の場合に限り, $U = (\boldsymbol{u}, \mathcal{U})$ による表現から $V = (\boldsymbol{v}, \mathcal{V})$ による表現への写像 $\mathcal{T} : Q_U \mapsto Q_V$ が存在することを示す.

- まず, U における表現 Q_U を選ぶ. $\mathcal{U}$ が全射なので, 空でない逆像 $\mathcal{U}^{-1}(Q_U) \subset \Omega$ が存在.
- この逆像から量 Q を選び, それを $\mathcal{V}$ で写して Q_V を得る. $U \gtrsim V$ なので, $\mathcal{V}^{-1}(Q_V) \supseteq \mathcal{U}^{-1}(Q_U)$.
- したがって, Q_U から $Q_V = \mathcal{V}(\mathcal{U}^{-1}(Q_U))$ を一意に定めることができる.
- このようにして, 写像が得られる.

$$\mathcal{T} : \Omega_U \to \Omega_V, \quad \text{あるいは,} \quad \mathbb{R} \times \mathbb{Q}^N \to \mathbb{R} \times \mathbb{Q}^M$$

- $U \sim V$ の場合, 逆向きの写像も存在するので $\mathcal{T}$ は可逆 (1 対 1).
- $U \parallel V$ の場合は写像が存在しない, つまり単位系の変換はできない.

単位系による表現間の写像 (2)



写像 $\mathcal{T}$ の具体的な形

写像 $\mathcal{T}$ の具体的な形 (1)

- 2 つの単位系 $U \succsim V$,　$N = \#(U)$, $M = \#(V)$.

$$U = (\boldsymbol{u}, \mathcal{U}), \quad \boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_N)$$
$$V = (\boldsymbol{v}, \mathcal{V}), \quad \boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \cdots, u_M)$$

- 量 $Q \in \Omega$ が, U, V においてそれぞれ

$$\mathcal{U}(Q) = Q_U = q_U \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{d}}, \quad \mathcal{V}(Q) = Q_V = q_V \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{c}}$$

ただし,

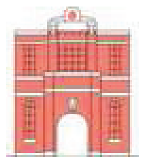
$$q_U, q_V \in \mathbb{R},$$
$$\boldsymbol{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_N)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{Q}^N, \quad \boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_M)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{Q}^M.$$

写像 $\mathcal{T}$ の具体的な形 (2)

- U の基本単位 $u_i \in \Omega$ $(i = 1, \dots, N)$ の U による表現は $\mathcal{U}(u_i) = 1 \times u_i^1$.
- 一方, V による表現は $\mathcal{V}(u_i) = k_i \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{t}_i}$. ただし, $k_i \in \mathbb{R}_+$ (正の実数), $\boldsymbol{t}_i = (t_{1i}, \dots, t_{Mi})^\mathsf{T}$, $t_{ji} \in \mathbb{Q}$ $(j = 1, \dots, M)$.
- 基本単位は $\mathcal{T}(u_i) = k_i \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{t}_i}$ のように移される.
- 一般の量 $Q \in \Omega$ の U での表現 $\mathcal{U}(Q) = Q_U = q_U \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{d}}$ は

$$Q_V = \mathcal{T}(Q_U) = (q_U \boldsymbol{k}^{\boldsymbol{d}}) \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{c}}, \quad \boldsymbol{c} = T\boldsymbol{d},$$

のように移る. ただし, $T = [\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2, \cdots, \boldsymbol{t}_N]$ は $M \times N$ 行列, $\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{d}} := \prod_{i=1}^N k_i^{d_i} = k_1^{d_1} \cdots k_N^{d_N}$.



写像 $\mathcal{T}$ の具体的な形 (3)

- 写像 $\mathcal{T} : Q_U \mapsto Q_V$ は

$$\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_N)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}_+^N, \qquad \text{係数}$$

$$T \in L(\mathbb{Q}^N, \mathbb{Q}^M) \qquad \text{変換行列}$$

によって特徴づけられる．すなわち, $\mathcal{T} = (\boldsymbol{k}, T)$ と表せる．

- $\operatorname{rank} T = M$ を仮定する．
- $\boldsymbol{d} = 0$ の場合, $Q_V = Q_U \, (= q_U)$ が常になりたつ．つまり, 無次元量は写像により変化しない．

等価な単位系 — EUS

等価な単位系 (1)

- $N = M$ の場合, $U \succsim V$ なら, $V \succsim U$ が必ず成り立つ. すなわち, $U \sim V$ あるいは $U \parallel V$ のどちらかである.
- $U \sim V$ の場合, 変換行列 $\mathcal{T}$ は可逆である. 表現の間に 1 対 1 対応があるので, $Q_U = Q_V$ と表しても構わない.
- N 元単位系の関係 "$\sim$" は同値関係なので, これによって N 単位系をクラス分けすることができる.
- 各クラスを等価な単位系族 (equivalence class of unit systems, EUS) と名付けることにする.

等価な単位系 (2)

- 例 (力学単位系)
  (MKS) $\sim$ (CGS)
- 例
  (mrCGS-Gauss) $\parallel$ (rCGS-esu),
  (mrCGS-Gauss) $\parallel$ (rCGS-emu),
  (rCGS-emu) $\parallel$ (rCGS-esu)
- 例
  (MKSA) $\sim$ (MKSΩ) $\sim$ (MKSV) $\sim$ (MSVA)

等価な単位系 (3)

- $U \sim V$ の場合, $Q_U = \mathcal{U}(Q)$, $Q_V = \mathcal{V}(Q)$ の逆像は $\mathcal{U}^{-1}(Q_U) = \mathcal{V}^{-1}(Q_V)$ を満たし, 同じ量の集合を与えている．したがって,

$$Q_U = Q_V, \quad \text{すなわち,} \quad q_U \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{d}} = q_V \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{c}}$$

  と書いても差し支えない.
- さらにしばしば, $Q = q_U \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{d}} = q_V \boldsymbol{v}^{\boldsymbol{c}}$ と書かれることもあるが, 危険である.
- 例: (MKSΩ) $\sim$ (MKSA) なので, $1.2\,\Omega = 1.2\,\mathrm{m}^2\mathrm{kg}\,\mathrm{s}^{-3}\mathrm{A}^{-2}\,(= R)$.
- 例: (CGS) $\sim$ (MKS) なので, $1\,\mathrm{erg} = 10^{-7}\,\mathrm{J}\,(= E)$.

写像の合成

- 3 つの単位系 U, V, W が $\mathcal{T} = (\boldsymbol{k}, T)$ と $\mathcal{S} = (\boldsymbol{h}, S)$ によって逐次変換可能: $U \xrightarrow{\mathcal{T}} V \xrightarrow{\mathcal{S}} W$ の場合.
- $Q_V = \mathcal{T}(Q_U) = q_U \boldsymbol{k}^{\boldsymbol{d}} \boldsymbol{v}^{T\boldsymbol{d}}$ と $\mathcal{S}(Q_V) = q_V \boldsymbol{h}^{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{w}^{S\boldsymbol{c}}$ より,

$$\mathcal{S}\mathcal{T}(Q_U) = q_U \boldsymbol{k}^{\boldsymbol{d}} \boldsymbol{h}^{(T\boldsymbol{d})} \boldsymbol{w}^{S(T\boldsymbol{d})} = q_U (\boldsymbol{k}\boldsymbol{h}^T)^{\boldsymbol{d}} \boldsymbol{w}^{(ST)\boldsymbol{d}}.$$

以下の関係を用いた

$$\boldsymbol{h}^{(T\boldsymbol{d})} = \prod_{j=1}^{M} h_j^{\sum_{i=1}^{N} T_{ji} d_i} = \prod_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{M} h_j^{T_{ji} d_i} = (\boldsymbol{h}^T)^{\boldsymbol{d}}$$

ただし, $(\boldsymbol{h}^T)_i = \prod_{j=1}^{M} h_j^{T_{ji}}$ $(i = 1, \ldots, N)$,
$\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{d}} \boldsymbol{k}'^{\boldsymbol{d}} = (\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}')^{\boldsymbol{d}}$, $\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}' = (k_1 k_1', \ldots, k_N k_N')$.

- まとめると, 合成則が得られる:

$$\mathcal{S}\mathcal{T} = (\boldsymbol{h}^T \boldsymbol{k}, ST)$$

逆写像

- 等価な単位系 U, U' の間の写像 $\mathcal{T} = (\boldsymbol{k}, T) : U \to U'$, $\mathcal{S} = (\boldsymbol{h}, S) : U' \to U$ を考える.
- 合成写像 $\mathcal{S}\mathcal{T} = (\boldsymbol{h}^{T}\boldsymbol{k}, ST)$ が恒等写像 $\mathcal{I} = (\mathbf{1}_N, I)$ になる条件は,

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{k}^{-T^{-1}} \quad \text{かつ}, \quad S = T^{-1}$$

ただし, $\mathbf{1}_N = (1, 1, \ldots, 1)^\mathsf{T}$ は N 次元ベクトル.

- $\mathcal{T} = (\boldsymbol{k}, T)$ の逆写像は

$$\mathcal{T}^{-1} = (\boldsymbol{k}^{-T^{-1}}, T^{-1}).$$

等価単位系族

- 等価な単位系族 (EUS) を $\mathcal{U} = \{U, U', \ldots\}$ のように表す.
- EUS に含まれる単位系の間には可逆な写像 $\mathcal{D} = (\boldsymbol{k}, D) : U \to U'$ が与えられている. これを用いて,

$$q_U \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{d}} = q_U \boldsymbol{k}^{\boldsymbol{d}} \boldsymbol{k}^{-\boldsymbol{d}} \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{d}} = q_{U'} (\boldsymbol{k}^{-1}\boldsymbol{u})^{\boldsymbol{d}} = q_{U'} (\boldsymbol{k}^{-1}\boldsymbol{u})^{D^{-1}D\boldsymbol{d}} = q_{U'} \boldsymbol{u}'^{\boldsymbol{d}'}$$

  ただし, $q_{U'} = q_U \boldsymbol{k}^{\boldsymbol{d}}$, $\boldsymbol{u}' = (\boldsymbol{k}^{-1}\boldsymbol{u})^{D^{-1}}$, and $\boldsymbol{d}' = D\boldsymbol{d}$.
- したがって, EUS に属する単位系の表現を

$$Q_{\mathcal{U}} = q_U \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{d}} = q_{U'} \boldsymbol{u}'^{\boldsymbol{d}'} = \cdots$$

  のように厳密に等値することができる.
- この総称的表現 $Q_{\mathcal{U}}$ が通常, 「物理量」と呼ばれているものである.
- しかし, これは EUS に依存する表現にすぎないので, 普遍性はない. この点を注意する必要がある場合には「e 量」と呼ぶことにする.

EUS における加算可能性

- EUS $\mathcal{U} = \{U, U', \ldots\}$ における e 量

$$Q_{\mathcal{U}} = q_U \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{d}} = q'_U \boldsymbol{u}'^{\boldsymbol{d}'} = \cdots$$
$$P_{\mathcal{U}} = p_U \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{b}} = p'_U \boldsymbol{u}'^{\boldsymbol{b}'} = \cdots$$

は, $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{b}$ のとき, 和が定義できる：

$$Q_{\mathcal{U}} + P_{\mathcal{U}} = (q_U + p_U)\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{d}} = (q'_U + p'_U)\boldsymbol{u}'^{\boldsymbol{d}'} = \cdots$$

EUS $\mathcal{U}$ において可加算 ($\mathcal{U}$-addible) であるという.

- $Q_U + P_{U'}$ なども OK.

e-量

- 通常, 物理における式に含まれる量は「e 量」であり, 「量」そのものではないことに注意する.
- 「物理の方程式が EUS 依存であり, 普遍的でない」ということはやや物議を醸すかもしれないが...
  - 実際, Maxwell 方程式には単位系に依存した複数のバージョンが存在する.
  - 先に見たように, 無次元量の表現は単位系に依存しないので, 規格化によって無次元化された方程式は普遍的である.

EUS の部分順序関係

EUS の部分順序関係

- 単位系の間の関係 $U \succsim V$ (擬順序) は EUS 間の関係 $\mathcal{U} \succeq \mathcal{V}$ に一般化することができる．反射則，推移則に加えて，反対称則が成り立つ: $\mathcal{U} \succeq \mathcal{U}'$ かつ $\mathcal{U}' \succeq \mathcal{U}$ なら $\mathcal{U} = \mathcal{U}'$.
- EUS 間の関係 $\mathcal{U} \succeq \mathcal{V}$ は部分順序 (partial order) である．

	$\mathcal{U} \precsim \mathcal{V}$	$\mathcal{U} \not\precsim \mathcal{V}$
$\mathcal{U} \succsim \mathcal{V}$	$\mathcal{U} = \mathcal{V}\ (N = M)$	$\mathcal{U} \succ \mathcal{V}\ (N > M)$
$\mathcal{U} \not\succsim \mathcal{V}$	$\mathcal{U} \prec \mathcal{V}\ (N < M)$	$\mathcal{U} \parallel \mathcal{V}\ (N <=> M)$

EUS 間の写像

- 単位系間の写像 $\mathcal{T} : U \to V$ は EUS $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ の間の写像に拡張される．$\mathcal{U} \succeq \mathcal{V}$ に対して

$$\mathscr{T} : (Q_{\mathcal{U}} \in \mathcal{U}) \to (Q_{\mathcal{V}} \in \mathcal{V})$$

- EUS の間の写像 $\mathscr{T}$ は単位系の間の写像 $\mathcal{T} : U \in \mathcal{U} \to V \in \mathcal{V}$, $\mathcal{T}' : U' \in \mathcal{U} \to V' \in \mathcal{V}$ などで表現される．
- これらは $\mathcal{T}' = \mathcal{C}\mathcal{T}\mathcal{D}^{-1}$ のように関係づけられる．ただし，$\mathcal{D} : U \to U'$, $\mathcal{C} : V \to V'$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U} \arrow[d, "\mathscr{T}"] & & U \arrow[r, shift left, "\mathcal{D}"] \arrow[d, "\mathcal{T}"'] & U' \arrow[l, shift left, "\mathcal{D}^{-1}"] \arrow[d, "\mathcal{T}'"] & \cdots \\
\mathcal{V} & & V \arrow[r, shift left, "\mathcal{C}"] & V' \arrow[l, shift left, "\mathcal{C}^{-1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

単位系間の関係

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \text{(MKSAQ)} \arrow[dl, "{\mu_0, \varepsilon_0}"'] \arrow[dr, "\gamma"] & & & N=5 \\
 & \text{(MSVA)} \arrow[d, "\mu_0"'] & \text{(MKSA)} \arrow[d, "\varepsilon_0"] & \text{(MKS}\Omega\text{)} \arrow[d, "Z_0"] & N=4 \\
\text{(mHL)} \arrow[d, "c_0"'] & \text{(rCGS-emu)} \arrow[d, "\varepsilon_0"'] & \text{(rCGS-esu)} \arrow[d, "\mu_0"] & \text{(MKSA}/Z_0\text{)} \arrow[d, "c_0"] & N=3 \\
\text{(mHL}/c_0\text{)} & \text{(rCGS-emu}/\varepsilon_0\text{)} & \text{(rCGS-esu}/\mu_0\text{)} & \text{(MKSA}/Z_0/c_0\text{)} & N=2
\end{tikzcd}
$$

- 矢印は “$\succ$” に対応する．点線の箱は EUS を表す．

1に移る量

写像の標準形

- $U \succ V$ の場合を考える．$L = \#(U) - \#(V) = N - M (\geq 1)$ とおく．
- T $(M \times N$, $\mathrm{rank}\, T = M)$ は正則行列 C $(M \times M)$, D $(N \times N)$ と

$$J = [I_M|0] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & 0 & .. & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 & .. & 0 \end{array}\right] \quad (M \times N)$$

を用いて, $T = C^{-1}JD$ のように表せる．(行列の要素は全て有理数)
(I_M は $M \times M$ 単位行列)

- 行列の分解に対応して次のような単位系の列を考える：

$$U \xrightarrow{\mathcal{D}} U' \xrightarrow{\mathcal{J}} V' \xrightarrow{\mathcal{C}^{-1}} V, \quad \#(U') = N,\ \#(V') = M$$

$$\mathcal{D} = (\mathbf{1}_N, D), \quad \mathcal{C} = (\mathbf{1}_M, C), \quad \mathcal{J} = (\boldsymbol{k}', J) \qquad \boldsymbol{k}' = \boldsymbol{k}^{D^{-1}}$$

- 合成則を用いて

$$\mathcal{C}^{-1}\mathcal{J}\mathcal{D} = (\mathbf{1}_M^{JD}\boldsymbol{k}'^{D}\mathbf{1}_N, C^{-1}JD) = (\boldsymbol{k}, T) = \mathcal{T}$$

1に移る量

- ベクトル $\boldsymbol{d}'_h = \boldsymbol{e}_{M+h}$ $(h = 1, \ldots, L)$ は $\mathrm{Ker}\, J$ に属する．すなわち，$J\boldsymbol{d}'_h = 0$.
- これらを D^{-1} で変換したベクトルは $\boldsymbol{d}_h = D^{-1}\boldsymbol{d}'_h \in \mathrm{Ker}\, T$，つまり，$T\boldsymbol{d}_h = 0$.
- $\boldsymbol{d}_h$ を用いた U における表現

$$X_{hU} = \boldsymbol{k}^{-\boldsymbol{d}_h}\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{d}_h} \quad (h = 1, \ldots, L)$$

は $\mathcal{T}$ によって，すべて，1 に移される;

$$X_{hV} = \mathcal{T}(X_{hU}) = \boldsymbol{k}^{-\boldsymbol{d}_h}\boldsymbol{k}^{\boldsymbol{d}_h}\boldsymbol{v}^{T\boldsymbol{d}_h} = 1\boldsymbol{v}^0 = 1$$

1 に移る量

- $\mathcal{V}$ において，e 量 $X_{h\mathcal{V}}$ $(h = 1, 2, \ldots, L)$ はすべて 1.
- e 量 $Q_{1\mathcal{U}}$ と $Q_{2\mathcal{U}}$ が

$$Q_{1\mathcal{U}} = X_{1\mathcal{U}}^{d_1} \cdots X_{L\mathcal{U}}^{d_L} Q_{2\mathcal{U}}, \quad (d_1, \ldots, d_L)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{Q}^L$$

  を満たすと，$Q_{1\mathcal{V}} = Q_{2\mathcal{V}}$.
- 写像 $\mathcal{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ は逆像 $\mathcal{T}^{-1}(1) = \{X_{1\mathcal{U}}^{d_1} \cdots X_{L\mathcal{U}}^{d_L} \,|\, d_1, \ldots, d_L \in \mathbb{Q}\}$ で規定される.
- 単位系の変換において，「ある量を 1 と見なす」といういい方がされるが，正確には上のような手続きが必要である．(例: $c_0 = 1$ とおく.)

規格化

規格化による変換

- 異なる ESU における表現を直接的に比較するには工夫が必要.
  — 規格化
- $\mathfrak{U} \succ \mathcal{V}$ の場合, 規格化によって $\mathcal{V}$ を $\mathfrak{U}$ に埋め込むことができる.
- 標準形を利用する. $U' \in \mathfrak{U}$ において,

$$X_{hU'} = \boldsymbol{k}^{-\boldsymbol{d}_h} \boldsymbol{u}'^{\boldsymbol{d}'_h} = (k'_{M+h})^{-1} u'_{M+h}$$

  ただし, $\boldsymbol{k}'^{\boldsymbol{d}'_h} = \boldsymbol{k}^{\boldsymbol{d}_h}$.
- U' において, $Q_{U'} = q_U \boldsymbol{u}'^{\boldsymbol{d}'}$ と表される e 量 $Q_{\mathfrak{U}}$ に対して, 表現

$$N_{U'}(Q_{\mathfrak{U}}) = X_{1U'}^{-d'_{M+1}} \cdots X_{LU'}^{-d'_{M+L}}$$

  は $N_V(Q_{\mathfrak{U}}) = 1$ を満たし, $Q_{U'}$ の次元の高位部分 $(d'_{M+1}, \ldots, d'_{M+L})$ を打ち消す.

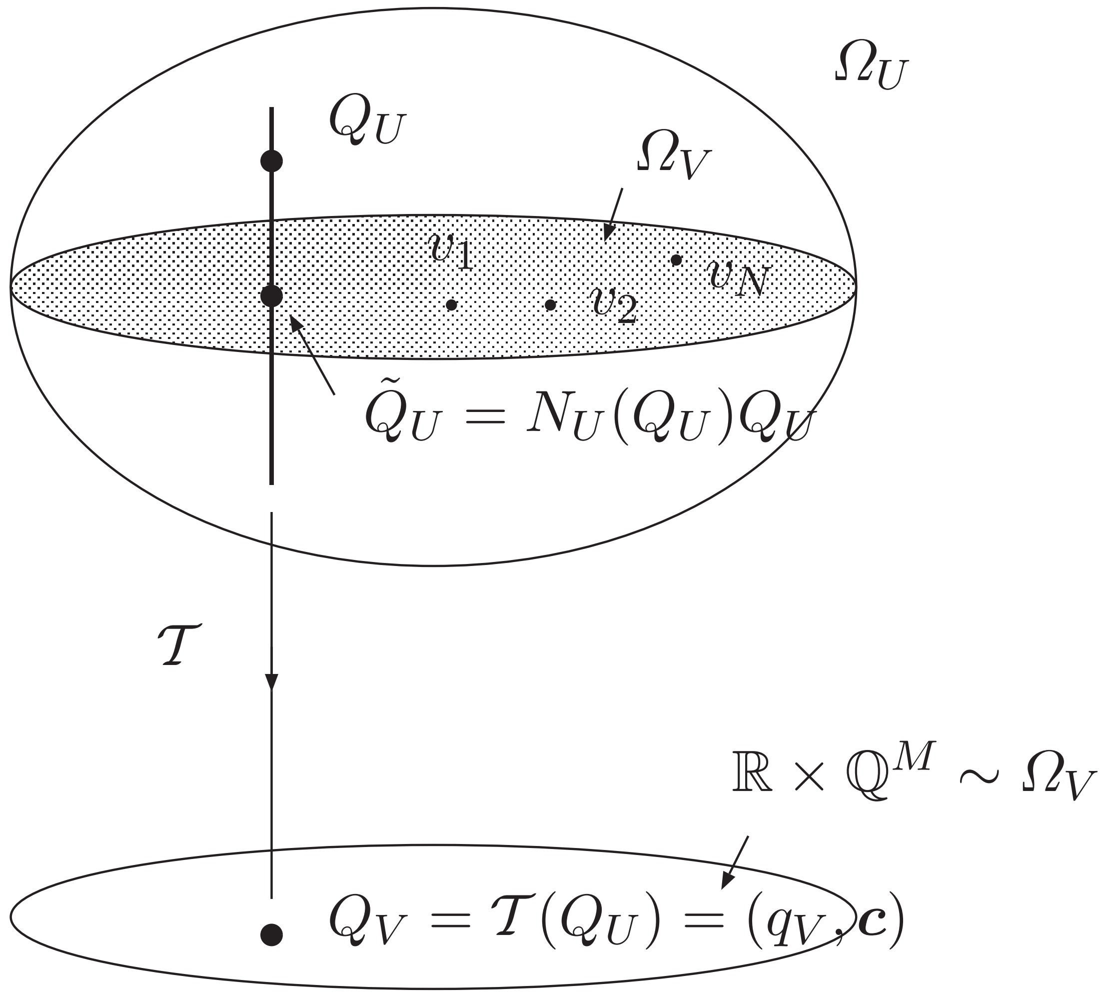
規格化による変換 (2)

- そこで

$$\tilde{Q}_{U'} = N_{U'}(Q_{\mathcal{U}})Q_U = q_U(k'_{M+1})^{d'_{M+1}} \cdots (k'_{M+L})^{d'_{M+L}} u_1'^{d'_1} \cdots u_M'^{d'_M}$$

  を定義すると, 規格化された e 量 $\tilde{Q}_{\mathcal{U}} = N(Q_{\mathcal{U}})Q_{\mathcal{U}}$ は基本単位の部分集合 $\tilde{\boldsymbol{u}}' = (u'_1, \ldots, u'_M) \subset \boldsymbol{u}'$ だけで表現できる.
- $\boldsymbol{v}' = J\boldsymbol{u}'$ なので, $\tilde{\boldsymbol{u}}$ は $\boldsymbol{v}'$ に忠実に移される: $v'_i = \tilde{u}'_i$ $(i = 1, 2, \ldots, M)$. すなわち, $\tilde{Q}_{U'}$ と $Q_{V'}$ の間, あるいは $\tilde{Q}_{\mathcal{U}}$ と $Q_{\mathcal{V}}$ の間に 1 対 1 対応が成り立つ.
- 規格化 $Q_{\mathcal{U}} \mapsto \tilde{Q}_{\mathcal{U}} = N_{\mathcal{U}}(Q_{\mathcal{U}})Q_{\mathcal{U}}$ は写像 $\mathcal{T} : Q_{\mathcal{U}} \mapsto Q_{\mathcal{V}}$ と等価である.

規格化の図的理解


Ω_U
Q_U
Ω_V
v_1
v_N
v_2
$\tilde{Q}_U = N_U(Q_U)Q_U$
$\mathcal{T}$
$\mathbb{R} \times \mathbb{Q}^M \sim \Omega_V$
$Q_V = \mathcal{T}(Q_U) = (q_V, \boldsymbol{c})$

規格化された量の識別

- $Q_{1\mathcal{U}}$ と $Q_{2\mathcal{U}}$ に対して e 量 $\tilde{Q}_{1\mathcal{U}} = N_{\mathcal{U}}(Q_{1\mathcal{U}})Q_{1\mathcal{U}}$ と $\tilde{Q}_{2\mathcal{U}} = N_{\mathcal{U}}(Q_{2\mathcal{U}})Q_{2\mathcal{U}}$ が定義される.
- ここで $\tilde{Q}_{1\mathcal{U}} = \tilde{Q}_{2\mathcal{U}}$ かつ $\mathcal{U}$ において $Q_{1\mathcal{U}} \neq Q_{2\mathcal{U}}$ という状況がありうる. 規格化因子 $N_{\mathcal{U}}(Q_{\mathcal{U}})$ のお蔭で区別を維持できる.
- 移行先 V (または $\mathcal{V}$) を明示する必要がある場合は $\tilde{Q}_U^V = N_U^V(Q)Q_U$ あるいは $\tilde{Q}_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} = N_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}(Q)Q_{\mathcal{U}}$ と表す.

比較不可能な単位系間の比較

- 比較不可能な単位系 $U \parallel V$ は直接比較はできないが, $W \succsim U$, $W \succsim V$ を満たす W を利用すれば比較可能となる.
- W において規格化量

$$\tilde{Q}^U_W = N^U_W(Q)Q_W, \quad \tilde{Q}^V_W = N^V_W(Q)Q_W$$

を導入すると, U と V における表現を W に埋め込むことができる.

- 例 : (rCGS-emu) と (rCGS-esu) は (MKSA) に埋め込める.

規格化の例 — 電流 (1)

- 異なった単位系による表現を等値することはできない．つまり，一般に $Q_U = Q_V$ は誤り．
- MKSA (あるいは SI) における $I_{\mathsf{SI}} = 1\,\mathrm{A}$ と，CGS-emu における $I_{\mathsf{emu}} = \sqrt{4\pi} \times 10^{-1}\,\sqrt{\mathrm{dyn}}$ は同じ大きさの電流を表す．
- しかし，$I_{\mathsf{SI}} = I_{\mathsf{emu}}$ と書くことはできない．
- なぜなら，$1\,\mathrm{A} = \sqrt{4\pi} \times 10^{-1}\,\sqrt{\mathrm{dyn}}$ は次元的に不整合．
    - rCGS-emu の観点からは，未定義の “A” が含まれる．
    - MKSA の観点からは，$1\,\mathrm{A} = \sqrt{40\pi} \times 10^{-3}\,\sqrt{\mathrm{N}}$ という正しくない式．

規格化の例 — 電流 (2)

- $I_{\mathsf{SI}}/\mathrm{A} = 1$ and $I_{\mathsf{emu}}/\sqrt{\mathrm{dyn}} = \sqrt{4\pi}/10$ より, 次元なし式が得られる：

$$\frac{I_{\mathsf{emu}}}{\sqrt{\mathrm{dyn}}} = \frac{\sqrt{4\pi}}{10}\frac{I_{\mathsf{SI}}}{\mathrm{A}}$$

  この関係式はどのような大きさの電流に対しても成り立つ.

- 注意深く, 両辺に $\sqrt{\mathrm{dyn}}$ または A をかけて換算式を得ることができる.

$$I_{\mathsf{emu}} = \frac{\sqrt{4\pi}}{10}\left[\frac{I_{\mathsf{SI}}}{\mathrm{A}}\right]\sqrt{\mathrm{dyn}}, \quad I_{\mathsf{SI}} = \frac{10}{\sqrt{4\pi}}\left[\frac{I_{\mathsf{emu}}}{\sqrt{\mathrm{dyn}}}\right]\mathrm{A}$$

- しかし, 次の式は誤り.

$$I_{\mathsf{emu}} = \frac{\sqrt{4\pi}}{10} I_{\mathsf{SI}} \frac{\sqrt{\mathrm{dyn}}}{\mathrm{A}}$$

規格化の例 — 電流 (3)

- 確実な計算のためには, MKSA (SI) における規格化された量を導入する必要がある：

$$\tilde{I}_{\mathsf{SI}}^{\mathsf{emu}} = \sqrt{\mu_{0,\mathsf{SI}}} I_{\mathsf{SI}}$$

- I_{emu} の代わりに $\tilde{I}_{\mathsf{SI}}^{\mathsf{emu}}$ を用いる. $\mu_{0,\mathsf{SI}} = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{N/A^2}$ である.

規格化の例 — 磁場

- MKSA において

$$B_{\mathsf{SI}} = \mu_{0,\mathsf{SI}} H_{\mathsf{SI}}$$

なら, rCGSemu では,

$$B_{\mathsf{emu}} = H_{\mathsf{emu}}$$

- もし, $B_{\mathsf{SI}} = B_{\mathsf{emu}}$ と書くと $H_{\mathsf{SI}} = H_{\mathsf{emu}}$ となって矛盾した式 $\mu_{0,\mathsf{SI}} = 1$ が得られる.
- しかし, 規格化 $\tilde{B}_{\mathsf{SI}}^{\mathsf{emu}} := (1/\sqrt{\mu_{0,\mathsf{SI}}}) B_{\mathsf{SI}}$, $\tilde{H}_{\mathsf{SI}}^{\mathsf{emu}} := \sqrt{\mu_{0,\mathsf{SI}}} H_{\mathsf{SI}}$, を用いれば, 正しい式 $\tilde{B}_{\mathsf{SI}}^{\mathsf{emu}} = \tilde{H}_{\mathsf{SI}}^{\mathsf{emu}}$, が得られる.

規格化の例 — 電荷

- 電荷の表現の比較.

$$\tilde{q}_{\mathsf{SI}}^{\mathsf{esu}} = q_{\mathsf{SI}}/\sqrt{\varepsilon_{0\mathsf{SI}}}, \quad \tilde{q}_{\mathsf{SI}}^{\mathsf{esm}} = \sqrt{\mu_{0\mathsf{SI}}}\, q_{\mathsf{SI}}$$

  単位はそれぞれ $\sqrt{\mathrm{N}}\,\mathrm{m}$, $\sqrt{\mathrm{N}}\,\mathrm{s}$.

- これらから, 有名な Weber-Kohlrausch の関係式

$$\frac{\tilde{q}_{\mathsf{SI}}^{\mathsf{esu}}}{\tilde{q}_{\mathsf{SI}}^{\mathsf{emu}}} = c_{0\mathsf{SI}}$$

- このように MKSA 単位系は rCGS-emu と rCGS-esu の関係を調べるのに役立つ.

具体例

電圧と電流

- 簡単のために電圧, 電流に関する量だけを考える. $\boldsymbol{u} = (\mathrm{A}, \mathrm{V})$ $\boldsymbol{v} = (\mathrm{W}, \Omega)$ に対して,

$$\mathcal{T}(\mathrm{A}) = 1\,\mathrm{W}^{1/2}\Omega^{-1/2}, \quad \mathcal{T}(\mathrm{V}) = 1\,\mathrm{W}^{1/2}\Omega^{1/2}$$

  が成り立つ.
- 変換 $\mathcal{T} = (\boldsymbol{k}, T)$ は

$$\boldsymbol{k} = (1, 1), \quad T = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

- $\mathrm{Ker}\, T = \{0\}$ なので, $\mathcal{T}$ は可逆. つまり, $U \sim V$.

時間と長さ

- 時間と長さからなる量のみを考える．$\boldsymbol{u} = (\mathrm{m}, \mathrm{s})$，$\boldsymbol{v} = (\mathrm{m})$ に対して

$$\mathcal{T}(\mathrm{m}) = 1\,\mathrm{m}, \quad \mathcal{T}(\mathrm{s}) = \{c_0\}_U\,\mathrm{m}$$

- よって，

$$\boldsymbol{k} = (1,\ \{c_0\}_U), \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ただし，c_0 は光速であり，$\{c_0\}_U := c_{0U}/(\mathrm{m}/\mathrm{s}) = 299\,792\,458.$
$U \succ V$ である．

- $\boldsymbol{d}_1 = (1, -1)^\mathsf{T} \in \operatorname{Ker} T$，と選ぶことで，

$$X_{1U} = \boldsymbol{k}^{-\boldsymbol{d}_1}\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{d}_1} = \{c_0\}_U\,\mathrm{m}\,\mathrm{s}^{-1} = c_{0U}$$

- これは V において $X_{1V} = c_{0V} = 1$ 自然単位系への第 1 歩である．
この手続きを簡単に，“$c_0 = 1$ とおく” と称するのが普通である．

MKSA から CGS emu

- $U = (\text{MKSA})$, $\boldsymbol{u} = (\mathrm{m}, \mathrm{kg}, \mathrm{s}, \mathrm{A})$, $V = (\text{rCGS emu})$, $\boldsymbol{v} = (\mathrm{cm}, \mathrm{g}, \mathrm{s})$.

$$\frac{I_{\mathsf{emu}}}{\sqrt{\mathrm{dyn}}} = \frac{\sqrt{4\pi}}{10} \frac{I_{\mathsf{SI}}}{\mathrm{A}} \quad \text{より,} \quad \mathcal{T}(\mathrm{A}) = \sqrt{4\pi} 10^{-1}\,\mathrm{cm}^{1/2}\mathrm{g}^{1/2}\mathrm{s}^{-1}$$

- よって,

$$\boldsymbol{k} = (100,\ 1000,\ 1,\ \sqrt{4\pi}/10\}), \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

- $\boldsymbol{d}_1 = (1, 1, -2, -2)^{\mathsf{T}} \in \operatorname{Ker} T$ より

$$\begin{aligned} X_{1U} &= 100^{-1} \times 1000^{-1} \times 4\pi \times 10^{-2}\,\mathrm{m}\,\mathrm{kg}\,\mathrm{s}^{-2}\,\mathrm{A}^{-2} \\ &= 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{N}/\mathrm{A}^2 = \mu_{0U} \end{aligned}$$

が, V において $\mu_{0V} = 1$.

MKSA から CGS esu

- $U = (\text{MKSA})$, $\boldsymbol{u} = (\mathrm{m}, \mathrm{kg}, \mathrm{s}, \mathrm{A})$, $V = (\text{rCGS esu})$, $\boldsymbol{v} = (\mathrm{cm}, \mathrm{g}, \mathrm{s})$.

$$\frac{I_{\text{esu}}}{\sqrt{\mathrm{dyn}} \cdot \mathrm{cm/s}} = \sqrt{4\pi} \times 10 \times \{c_0\}_U \frac{I_{\text{SI}}}{\mathrm{A}}$$

すなわち, $\mathcal{T}(\mathrm{A}) = 10\sqrt{4\pi}\{c_0\}_U\, \mathrm{cm}^{3/2}\mathrm{g}^{1/2}\mathrm{s}^{-2}$, より

$$\boldsymbol{k} = (100,\ 1000,\ 1,\ 10\sqrt{4\pi}\{c_0\}_U), \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{d}_1 = (-3, -1, 4, 2)^{\mathsf{T}} \in \operatorname{Ker} T$ より,

$$X_{1U} = 100^3 \times 1000 \times (4\pi)^{-1} \times \{c_0\}_U^{-2}\, \mathrm{m}^{-3}\,\mathrm{kg}^{-1}\,\mathrm{s}^4\,\mathrm{A}^2$$

$$= \frac{1}{4\pi \times 10^{-7} \times \{c_0\}_U^2} \frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{N}} \frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{m}^2} = \frac{1}{\mu_{0U} c_{0U}^2} = \varepsilon_{0U}$$

は $\varepsilon_{0V} = 1$ に移る.

MKSA から対称 3 元単位系

- MKSA から電気・磁気に関して対称な 3 元単位系を構成する.
  $\boldsymbol{u} = (\mathrm{m}, \mathrm{kg}, \mathrm{s}, \mathrm{A})$, $\boldsymbol{v} = (\mathrm{m}, \mathrm{kg}, \mathrm{s})$.
- 真空インピーダンス Z_0 の U における表現
  $Z_{0U} = \sqrt{\mu_{0U}/\varepsilon_{0U}} = c_{0U}\,\mu_{0U}$.
- 電力 P_U と電流 I_U を次のように関連づける : $P_U = Z_{0U} I_U^2$.
- $\mathcal{T}(\mathrm{A}) = \sqrt{\{Z_0\}_U}\,\mathrm{m}\,\mathrm{kg}^{1/2}\mathrm{s}^{-3/2}$ によって変換は

$$\boldsymbol{k} = (1,\ 1,\ 1,\ \sqrt{\{Z_0\}_U}), \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 \end{bmatrix}$$

  ただし, $\{Z_0\}_U = Z_{0U}/\Omega = \{c_0\}_U\{\mu_0\}_U \sim 377$.
- $\boldsymbol{d}_1 = (2, 1, -3, -2)^{\mathsf{T}} \in \mathrm{Ker}\, T$ を用いた表現
  $X_{1U} = \{Z_0\}_U\,\mathrm{m}^2\,\mathrm{kg}\,\mathrm{s}^{-3}\,\mathrm{A}^{-2} = \{Z_0\}_U\,\Omega = Z_{0U}$ は $Z_{0V} = 1$ に移る.

MKSA から対称 3 元単位系

- この変換によって Maxwell 方程式の見かけは変わらないが，構成方程式は

$$\boldsymbol{D}_U = \varepsilon_{0U}\boldsymbol{E}_U, \quad \boldsymbol{H}_U = \mu_{0U}^{-1}\boldsymbol{B}_U$$

から

$$\boldsymbol{D}_V = c_{0V}^{-1}\boldsymbol{E}_V, \quad \boldsymbol{H}_V = c_{0V}\boldsymbol{B}_V$$

に変化する.

- さらに光速を 1 と表現する 2 元単位系 W, $\boldsymbol{w} = (\mathrm{m}, \mathrm{kg})$ に移ると $c_{0W} = 1$ であり，構成方程式は

$$\boldsymbol{D}_W = \boldsymbol{E}_W, \quad \boldsymbol{H}_W = \boldsymbol{B}_W$$

- V と W をそれぞれ (MKSA$/Z_0$), (MKSA$/Z_0/c_0$) と表すことにする.

MKSAQ

- 論理的には 5 元単位系から出発する必要がある.
  $U = (\mathsf{MKSAQ})$, $\boldsymbol{u} = (\mathrm{m}, \mathrm{kg}, \mathrm{s}, \mathrm{A}, \mathrm{C})$.
- 電荷と電流を独立次元にとるので，これらを関係づける定数 γ が必要である. U における単位は $[\gamma]_U = \mathrm{C}/(\mathrm{A\,s})$.

$$\gamma_U^{-1} \frac{\partial \varrho_U}{\partial t} = -\operatorname{div} \boldsymbol{J}_U \quad \text{電荷の保存則}$$

- 誘電率と透磁率の単位は $[\varepsilon_0]_U = \mathrm{C}^2/(\mathrm{N\,m}^2)$, $[\mu_0]_U = \mathrm{N}/\mathrm{A}^2$.
- Maxwell 方程式と構成方程式は

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D}_U = \varrho_U, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{B}_U = 0,$$

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{H}_U = \boldsymbol{J}_U + \gamma_U^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{D}_U}{\partial t}, \quad \operatorname{curl} \boldsymbol{E}_U = -\gamma_U^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{B}_U}{\partial t},$$

$$\boldsymbol{D}_U = \varepsilon_{0U} \boldsymbol{E}_U, \quad \boldsymbol{H}_U = \mu_{0U}^{-1} \boldsymbol{B}_U$$

MKSAQ

- 光速と真空インピーダンスは

$$c_{0U} = \frac{\gamma_U}{\sqrt{\mu_{0U}\varepsilon_{0U}}}, \quad Z_{0U} = \sqrt{\frac{\mu_{0U}}{\varepsilon_{0U}}}$$

MKSAQ から MKSA

- $V = ($MKSA$)$ への写像は $\mathcal{T}(\mathrm{C}) = 1\,\mathrm{A\,s}$ を満たすので,

$$\boldsymbol{k} = (1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1), \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- $\boldsymbol{d}_1 = (0, 0, -1, -1, 1)^{\mathsf{T}} \in \operatorname{Ker} T$ より, 表現 $X_{1U} = 1\,\mathrm{C}/(\mathrm{s\,A}) = \gamma_U$ は $\gamma_V = 1$ に移る.

MKSAQ から mHL

- 次に, $U = (\text{MKSAQ})$ から $W = (\text{mHL})$, $\boldsymbol{w} = (\mathrm{cm}, \mathrm{g}, \mathrm{s})$ へ移る.
- $\mathcal{S}(\mathrm{A}) = 10^{-1}\sqrt{4\pi}\,\sqrt{\mathrm{dyn}}$ と $\mathcal{S}(\mathrm{C}) = 10\sqrt{4\pi}\{c_0\}_U\,\sqrt{\mathrm{dyn}}\,\mathrm{cm}$ より,

$$\boldsymbol{h} = (10^2,\ 10^3,\ 1,\ \sqrt{4\pi}/10,\ 10\sqrt{4\pi}\{c_0\}_U), \qquad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

- $\boldsymbol{c}_1 = (1, 1, -2, -2, 0)^\mathsf{T}$ と $\boldsymbol{c}_2 = (-3, -1, 2, 0, 2)^\mathsf{T}$ は $\operatorname{Ker} S$ に含まれ, 表現 $X_{1U} = \{\mu_0\}_U\,\mathrm{N}/\mathrm{A}^2 = \mu_{0U}$ と $X_{2U} = \{\varepsilon_0\}_U\,\mathrm{C}^2/(\mathrm{N}\,\mathrm{m}^2) = \varepsilon_{0U}$. は, $\mu_{0W} = 1$, $\varepsilon_{0W} = 1$ に移る.
- さらに

$$\gamma_W = \mathcal{S}(\gamma_U) = \{\gamma\}_U \frac{\mathcal{S}(\mathrm{C})}{\mathcal{S}(\mathrm{A})}\mathrm{s}^{-1} = 100\{c_0\}_U\,\mathrm{cm/s}$$

つまり, $\gamma_W = c_{0W}$, $Z_{0W} = 1$.

修正 Heaviside-Lorentz 単位系

- 修正 Heaviside-Lorentz 系では

$$
\begin{aligned}
&c_{0W}^{-1}\frac{\partial \varrho_W}{\partial t} = -\operatorname{div}\boldsymbol{J}_W,\\
&\operatorname{div}\boldsymbol{D}_W = \varrho_W, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{B}_W = 0,\\
&\operatorname{curl}\boldsymbol{H}_W = \boldsymbol{J}_W + c_{0W}^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{D}_W}{\partial t}, \quad \operatorname{curl}\boldsymbol{E}_W = -c_{0W}^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{B}_W}{\partial t},\\
&\boldsymbol{D}_W = \boldsymbol{E}_W, \quad \boldsymbol{H}_W = \boldsymbol{B}_W
\end{aligned}
$$

- しかし, 通常 (非修正) の Heaviside-Lorentz 単位系 や Gauss 単位系では, $\boldsymbol{J}'_W = c_{0W}\boldsymbol{J}_W$ が電流密度として用いられる.

おわりに

まとめ

- 単位系の整理
  — 単位系は擬順序, EUS は部分順序
- 単位系は N が小さいほど, 式は簡単になるが, 決めごとが増える.
- 物理量や物理式は 1 つの EUS の中で不変
- 規格化によって, より下位の EUS を埋め込むことができる.
- 無次元化された物理量や物理式は下位の EUS で不変
- 次元とスケーリングはやや別の概念 (?)