# 流れの科学 講義ノート

# 2009年度

担当 後野 正雄

## 第1章　流れの基本的知識

### 1.1　必ず読みなさい

流れの科学では、流れている流体を扱います。水理学 a では、流れは定常流で時間的に流れの様子は変化しない流れでした。流れの科学で扱う流れは時間的に変化する非定常流れも扱います。当然、連続式や運動方程式はどうなっているのか? というような事柄、すなわち基礎方程式から考えていく必要があります。

本節以降は、諸君らが今まで聞いたこともない、全く新しい概念や考え方が数多く出て来ます。数式の理解も必要ですが、それ以前に新しい概念や考え方を理解しないと数式自体を理解することは出来ません。

一方、諸君が既に学んでいるはずの知識や概念をきちんと再確認すべき部分もあります。特に『運動量・運動量保存・力積・エネルギーと仕事』は各自で復習しておく必要があるでしょう。

本節では、基礎方程式に入る前に知っておかなければいけない流れの基本的な知識や用語、考え方について説明します。

✏ **目的**　流れの観測方法、分類等、基本的な用語の意味をきちんと理解して下さい。

✏ **圧力1**　圧力については特に注意が必要です。流れている流体中での圧力は未知量のひとつです。静止流体中の圧力と同じように $p = \rho g h$ になるかどうかは分かりません。

✏ **圧力2**　圧力はスカラー量です。面を決めるとその面に垂直に、圧力×面積 の大きさの力が作用します。面の向き (方向) と力の大きさは無関係です。面の向きが変わっても力の大きさは変化しません。これらの性質は静止流体の場合と同じです。

## 1.2　流体と流れの分類

### 1.2.1　流体の分類

**粘性と非粘性** 実際の流体には粘性 (粘りけ) があり、運動している流体はこの粘性によって徐々に運動が変化し、やがて静止するようになる。コップの中の水をかき混ぜたとき、しばらくするとコップの中の水は静止する。これは水の粘性の影響によるものです。

粘性が無い流体を非粘性流体と呼びます。実際の流体は全て、粘性がある粘性流体であり、非粘性流体は理論上の仮想的な流体です。

**圧縮性と非圧縮性** 空気のように押し縮めると体積が小さくなり、引き延ばすと体積が大きくなるような流体を圧縮性流体といいます。どんな力を加えても体積が変化しない流体を非圧縮性流体と呼びます。水はほとんどの場合、非圧縮性流体として扱われます。(特殊な場合は水の圧縮性を考慮する必要があります。) 空気も流れの中で圧縮性を無視できるような場合は非圧縮性流体として扱います。実際の流体は厳密には圧縮性流体であり， 非圧縮性流体は理論上の仮想的な流体です。

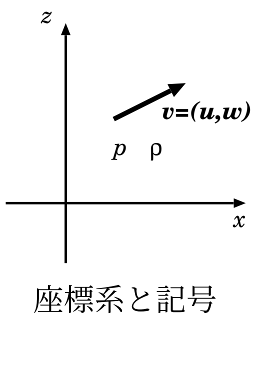
**完全流体** 水理学では非粘性かつ非圧縮な流体を完全流体と呼びます。流体力学では圧縮性流体の運動を扱うこともあるので非粘性流体を完全流体と呼ぶ場合があります。

### 1.2.2　流れの分類

**定常流と非定常流** 流れの様子が時間とともに変化する場合は、その流れは非定常流です。これに対して、時間が経過しても流れの様子が全く変化しない流れを定常流と呼びます。

## 1.3　座標系と記号

本節以降では $z$ 軸は鉛直上向きを正とします。講義では鉛直断面 2 次元 ($x-z$ 平面) での方程式を説明します。
流速は $\boldsymbol{v}$、その $x$、$z$ 方向成分をそれぞれ $u,w$ とします。圧力と密度はそれぞれ、$p$、$\rho$ とします。後述するように流速、圧力、密度ともに時間と場所によって変化する物理量です。



座標系と記号

## 1.4 流れの観測方法

流れを観測する方法 (、あるいは理論的に流れを表現する方法) には、オイラー法とラグランジュ法があります。**用語** オイラー流の表現、とかオイラー流の観測という言葉はオイラー法と同じ意味です。

**オイラー法** 流れを観測するときに、観測する場所や時間を指定 (あるいは固定) し、そこで流速 $\boldsymbol{v}$、圧力 $p$、密度 $\rho$ を計る方法です。

**ラグランジュ法** 流れの中の特定の粒子 (または粒子群) に着目し、その粒子の運動を追跡することによって流れを調べようとする方法です。この方法で観測するのは特定の粒子の座標 $(X, Z)$ とその粒子の圧力 $p$ と密度 $\rho$ です。

### 1.4.1 オイラー法とラグランジュ法

ラグランジュ法は質点の力学でお馴染みの方法です。特定の粒子 (質点) を指定し、その粒子の運動を調べます。つまり粒子の座標 $(X(t), Z(t))$ の時間的変化を調べるのです。さらに流体なので圧力 $p(t)$ やその流体の密度 $\rho(t)$ も計測することが必要です。圧縮性流体のときは密度 $\rho$ も粒子が運動するともに変化するからです。さらに、粒子の座標や圧力は粒子毎に異なる値をとります。粒子を区別するために初期時刻 $(t = 0)$ の座標 $(x_o, z_o)$ を用いるとラグランジュ法による変数は時刻 $t$ と初期座標 $(x_o, z_o)$ の関数となります。

$$
\begin{aligned}
X = X(t, x_o, z_o) \quad &, \quad Z = Z(t, x_o, z_o) \\
p = p(t, x_o, z_o) \quad &, \quad \rho = \rho(t, x_o, z_o)
\end{aligned}
$$

オイラー法は馴染みの薄い方法ですが、人はこの方法を流れを見るときに自然に使っています。例えば、谷川の流れを見るとき、「あの岩の近くはすごく早いけど、あの辺りは流れがゆったりとしてて深そうだ」というような見方をします。あの岩の近くと言う場所を指定し、そこでの流速を計って (見て) 早いという結果を述べています。また、「あの辺り」と言う別の場所では流速と水深を計って、流速は遅く、水深は他の場所に較べて深いという観測結果を述べています。流れの様子は時間によっても変化します。同じ橋の上から見える川の流れを見て「今日は水かさが増えて早いな」と水深と流速の時間的な変化を観測しています。

オイラー法による流速 $\boldsymbol{v}$ や圧力 $p$、密度 $\rho$ は場所と時間によって変化します。

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{v}(x, z, t) = \left( \; u(x, z, t) \quad , \quad w(x, z, t) \; \right) \\
&p(x, z, t), \quad \rho = \rho(x, z, t)
\end{aligned}
$$

### 1.4.2　オイラー法とラグランジュ法の関係

「流れの様子が分かる」、「流れを理解する」ことが流れを解析する目的です。では具体的に「流れの様子が分かる」とはどういうことでしょう。

任意の時刻に、流れの中の任意の点を指定した時、その時刻、その点での流速や圧力などが具体的に与えることが出来れば、「流れの様子を理解した、分かった」といえるでしょう。

オイラー法で流れを観測し、流れの様子を理解するためには、全ての時刻、全ての点で流れを (流速・圧力・密度) を観測しなければならない、と言うことになります。

ラグランジュ法で同じ結果を得ようとすると、一体いくつの粒子を観測すれば良いのでしょう。そうですね、流れを構成している全ての粒子を観測しなければなりません。

オイラー法とラグランジュ法のどちらが優れているかではなく、目的にあった方法を使い分けることが良いと思われます。谷川の流れを眺めたときのことを思い出してください。「あの岩の近くは早い」と流速を観測したとき、実際人はどんな方法で流速を計ったのでしょう。おそらく岩の近くの流れの中に見える泡とか、川面に浮かんだ落葉やゴミなどの流れる様子から流れの早さを計ったのではないでしょうか。泡や落葉は水粒子の代用品です。つまり、流れの早さをラグランジュ流で計測し、その流速をオイラー流の速度として使っているのです。

水理学ではオイラー法を用いることが一般的ですが、ラグランジュ法を使わないということではありません。

オイラー法もラグランジュ法も同じ流れを観測する方法です。したがって、オイラー法で得られた流速や圧力はラグランジュ流に表現することは可能です。もちろん逆の変換も出来ます。

両者の関係で重要なことは流速でしょう。同じ流れを観測したときの流速は同じ時刻同じ座標の流速であれば、オイラー流の計測をしても、ラグランジュ流の計測をしても同じ値が得られます。

$$u(X(t), Z(t), t) = \frac{dX(t)}{dt}$$

$$w(X(t), Z(t), t) = \frac{dZ(t)}{dt}$$

## 1.5　流れの図化方法

流れの様子を表したいとき、これを絵にして表すことが出来れば、非常に分かりやすくなります。水も空気も普通は透明で見えないことが多いですからね。ここでは流れを絵として表すいくつかの方法について考えます。その中には先のオイラー法やラグランジュ法と結び付いて、数学的な表現と一致するものもあります。

流れを図化する方法にはオイラー法で計測した様々な位置の流速をベクトルとして表示する方法と、ベクトルではなく滑らかな曲線を用いて表示する方法があります。ここでは曲線を用いて分かりやすく表示する方法について紹介します。

曲線を用いて流れを描くと、まさに絵を描いているように見えます。非常に分かり易く感じますが、実はその半面、実際には流れの何を描いているのか分からなくなる危険をはらんでいます。工学系の技術者が描く絵 (模式図) ならば数学的な表現と一致するものを使うべきです。

一般的に利用される曲線には流線・流跡線・流脈線の 3 種類があります。

**流線** ある時刻の速度ベクトルを描画し、その描画面の上で速度ベクトルを滑らかに結んだ曲線。 流速が 0 でない限り流線同士が交わったり、分岐したりしない。 流速が 0 の点においてのみ流線が分岐・合流する場合がある。
流線上のある点の接線はその点の速度ベクトルと重なる。
オイラー流の表現と一致する。

**流跡線** ある特定の粒子に着目し、その粒子が通過して来た経路を描いた曲線。ラグランジュ流の表現と一致する。

**流脈線** ある特定の地点を連続的に通過する粒子群のある時刻の存在位置を写真をとるように示したもの。例えば香取線香からたちのぼる煙や煙突から出る煙の写真は流脈線を描いたものになる。オイラー流ともラグランジュ流とも直接結び付かない。

通常、(特定の状況を除いて) ある流れに対して描かれたこの三つの曲線は一致することはない。

流線に関してはもう一つ重要な概念がある。

**流管** 3 次元空間での流れを考える。特定の閉領域を通る流線群が形成するパイプ状の形状を流管という。流線は交わったり、分岐したりしないので流線で形成された流管は流管の外部から流管内へ流れるような流線は存在しない。つまり流管外から流管内へ流れることはない。流管内から流管外へ洩れること無い。つまり流管はゴムホースやパイプの内側と同じである。

## 1.6 運動量の保存と運動方程式

### 1.6.1 運動量と力積

ここでは質量 $m$ の物体が持つ運動量 $m\boldsymbol{v}$ と外力 $\boldsymbol{F}$ の関係を確認しておく。系の外部から系の内部の物体に力が作用するとき、外力が働くという。ここで**系**とは「観測している物体/領域」のことである。

時刻 $t$ から時刻 $t+\Delta t$ の時間 $\Delta t$ の間に、今対象としている系に外力が全く働かなかった場合、系内の物体 (ここでは質量 $m$ の物体が一つだけ) の持つ運動量は変化しない。したがって、時刻 $t+\Delta t$ の運動量 $(m\boldsymbol{v})|_{t=t+\Delta t}$ と時刻 $t$ の運動量 $(m\boldsymbol{v})|_{t=t}$ の差、すなわち

$\underline{\Delta t \text{ 時間内の運動量の変化量 } \Delta m\boldsymbol{v} \text{ は } 0}$ である。

$$\begin{aligned} \Delta m\boldsymbol{v} &= (m\boldsymbol{v})|_{t=t+\Delta t} - (m\boldsymbol{v})|_{t=t} \\ \Delta m\boldsymbol{v} &= 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

時間 $\Delta t$ の間、外力 $\boldsymbol{F}$ が作用すると系内の運動量は変化し、その変化量は作用した力積 $\boldsymbol{F}\Delta t$ に等しい。[1]

$$\Delta m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F}\Delta t \tag{1.2}$$

この式を$\boxed{\text{運動量保存}}$の式と呼びます。物体の速度 $\boldsymbol{v}$ も外力 $\boldsymbol{F}$ もベクトル量なので、それぞれの成分を $\boldsymbol{v} = (u, w)$，$\boldsymbol{F} = (F_x, F_z)$ とすると成分毎の方程式が成り立ちます。

$$\begin{aligned} \Delta mu &= F_x \Delta t \\ \Delta mw &= F_z \Delta t \end{aligned}$$

ここでは $x - z$ 面内での式を書きましたが、$x - y$ 面内でも 3 次元でも同じです。

### 1.6.2　運動量保存と運動方程式

運動方程式を $\boxed{\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}}$ と覚えている人は多いと思いますが、ここでは運動量保存の式と運動方程式は同じものであることを説明します。先の運動量保存の式から出発します。

$$\Delta m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{F}\Delta t \tag{1.2}$$

この式の両辺を $\Delta t$ で割り、左辺に注目します。

$$\frac{\Delta m\boldsymbol{v}}{\Delta t} = \boldsymbol{F}$$

左辺に式 (1.1) を代入すると

$$\frac{(m\boldsymbol{v})|_{t=t+\Delta t} - (m\boldsymbol{v})|_{t=t}}{\Delta t} = \boldsymbol{F}$$

この左辺は微分の定義そのものですから[2]

$$\frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt} = \boldsymbol{F}$$

[1] 正確な力積の大きさは

$$\int_t^{t+\Delta t} \boldsymbol{F} dt$$

[2] 厳密には

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{(m\boldsymbol{v})|_{t=t+\Delta t} - (m\boldsymbol{v})|_{t=t}}{\Delta t} = \frac{d(m\boldsymbol{v})}{dt}$$

ですが、工学系の理解では極限をきちんと考えずに、十分微小な時間 (距離) でその間の変化量を割算すれば、それは微分 (傾き) だと理解しておいて十分です。

左辺の微分は質量 $m$ と速度 $\boldsymbol{v}$ の積になっているので、別々に微分しましょう。

$$\boldsymbol{v}\frac{dm}{dt}+m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{F}$$

今までの力学の知識では質量 $m$ は時間的に変化しませんので

$$\frac{dm}{dt}=0 \tag{1.3}$$

のはずですから、これを代入すると

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\boldsymbol{F}$$

速度を時間で微分したもの、つまり速度の時間的変化は加速度ですから

$$m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}$$

式 (1.3) が成立するとき、つまり質量が時間的に変化しないときは運動量保存と運動方程式は同じものであることが分かります。

質量が時間的に変化するとき、例えば物体が二つに分かれたり、いくつかの物体がくっついて一つになって運動を続けるようなとき、運動方程式は使えないので、運動量保存の式を使います。また、外力が働かないのに系内の物体の運動が変化するとき、例えば系内の物体同士が衝突して運動が変化するとき、このとき働くのは外力ではなく内力ですから、このような場合も運動量方程式のほうが利用しやすくなります。