

第3章 変成器と最大電力伝送定理

3.1 変成器

第 1.1.3 節で既に述べたように，図 3.1 のように，鉄心に 2 つのコイルを巻いたものを変成器という。インダクタと同様に，1 回巻きのコイルのインダクタンスが L_0 で，電流 I を流したとき磁束 ϕ_0 が生じるものとする。また，一次コイルの巻数 N_1 ，二次コイルの巻数を N_2 とする。

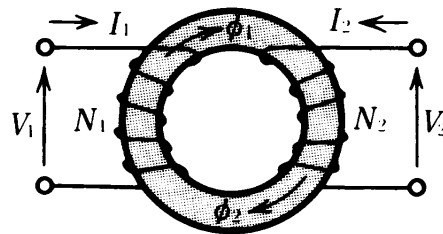


図 3.1: 変成器

まず， I_2 を 0 にしてみる。このとき， I_1 と V_1 の関係はインダクターと同じであるから

$$\phi_1 = N_1 \phi_0 = N_1 L_0 I_1 \quad (3.1)$$

$$V_1 = N_1 \frac{d\phi_1}{dt} = N_1^2 L_0 \frac{dI_1}{dt} = L_1 \frac{dI_1}{dt} \quad (3.2)$$

$$\therefore L_1 = N_1^2 L_0 \quad (3.3)$$

が成り立つ。

ϕ_1 の大部分は同じ鉄心に巻かれた二次コイルとも鎖交し， V_2 を生じる。 ϕ_1 のうち $K\phi_1$ ($K \leq 1$) だけが二次コイルと鎖交したとすると

$$V_2 = K N_2 \frac{d\phi_1}{dt} = K N_1 N_2 L_0 \frac{dI_1}{dt} = M \frac{dI_1}{dt} \quad (3.4)$$

となる。 M を相互インダクタンスとよび

$$M = K N_1 N_2 L_0 \quad (3.5)$$

である。

同様に， I_1 を 0 にして， I_2 だけを流すと

$$\phi_2 = N_2 \phi_0 = N_2 L_0 I_2 \quad (3.6)$$

$$V_2 = N_2 \frac{d\phi_2}{dt} = N_2^2 L_0 \frac{dI_2}{dt} = L_2 \frac{dI_2}{dt} \quad (3.7)$$

$$\therefore L_2 = N_2^2 L_0 \quad (3.8)$$

が成り立つ。

ϕ_2 のうち $K\phi_2$ だけが一次コイルと鎖交したとすると

$$V_1 = K N_1 \frac{d\phi_2}{dt} = K N_1 N_2 L_0 \frac{dI_2}{dt} = M \frac{dI_2}{dt} \quad (3.9)$$

が得られる。すなわち、 N_1, N_2 のいかんに関わらず、 I_1 と V_2 、 I_2 と V_1 の関係は、等しい相互インダクタンス M で結ばれている。

変成器の特徴は、一次コイルと二次コイルが磁束によって (磁氣的に) 結ばれているだけで、電氣的には絶縁されていることである。したがって、巻き方を逆にするか、あるいは図 3.1 と同じ変成器で図 3.2(b) のように、 V_2 と I_2 を逆転して決めることもできる。このとき、 I_1 対

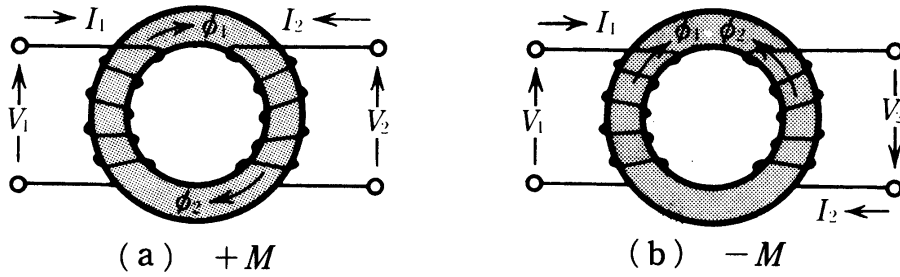


図 3.2: 変成器

する V_2 と、 I_2 に対する V_1 とは図 3.1 とは逆になるので、式 (3.4) や式 (3.9) と逆極性の電流、電圧の関係

$$V_2 = -M \frac{dI_1}{dt} \quad (3.10)$$

$$V_1 = -M \frac{dI_2}{dt} \quad (3.11)$$

が得られる。 M 自体に正負を持たせる書き方もできるが、ここでは $M > 0$ とし、 $\pm M$ で表現することにする。

I_1 と I_2 を重ね合わせる (重ねの理) と、次の変成器の基本式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= L_1 \frac{dI_1}{dt} \pm M \frac{dI_2}{dt} \\ V_2 &= \pm M \frac{dI_1}{dt} + L_2 \frac{dI_2}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

変成器の結合係数 (coupling coefficient) k を次のように定義する。

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \quad (3.13)$$

式 (3.3), (3.5), (3.8) より

$$k = \frac{K N_1 N_2 L_0}{\sqrt{N_1^2 L_0 N_2^2 L_0}} = K \quad (3.14)$$

となり，結合係数 k は磁束の鎖交する割合 K と同じである。したがって， $k \leq 1$ である。

変成器の記号を図 3.3 に示す。黒丸によって極性を表し，図 3.3(a)，(b) がそれぞれ図 3.2(a)，(b) に対応する。

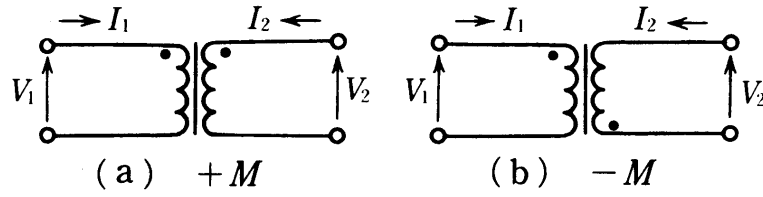


図 3.3: 変成器の記号

次に，図 3.4 のように，変成器の二次側にインピーダンス Z_L を接続した場合の入力インピーダンスを考える。この回路の各部の電圧，電流の関係は次のように与えられる。

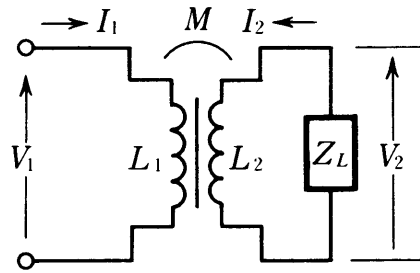


図 3.4:

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt} \\ V_2 &= M \frac{dI_1}{dt} + L_2 \frac{dI_2}{dt} = Z_L I_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

この式に複素表現を用いると

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 \\ V_2 &= j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2 = Z_L I_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

上式から入力インピーダンス Z_i を求めると

$$Z_i = \frac{V_1}{I_1} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{j\omega L_2 - Z_L} \quad (3.17)$$

が得られ， $+M$ の場合も $-M$ の場合も同じ Z_i になる。

式 (3.17) で $Z_L \rightarrow \infty$ にすると

$$Z_i = j\omega L_1 \quad (3.18)$$

が得られるが，この L_1 を変成器の励磁インダクタンス (magnetizing inductance) と呼ぶ。

次に $Z_L \rightarrow 0$ とすると

$$Z_i = j\omega L_1 \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} \right) = j\omega L_1 (1 - k^2) = j\omega \sigma \quad (3.19)$$

この σ を漏れインダクタンス (leakage inductance) と呼び，二次コイルと鎖交しない磁束によるインダクタンスである。密結合変成器の場合は $k = 1$ であるから， $\sigma = 0$ となる。

3.2 理想変成器

式 (3.12) に対して，複素表現を用いると

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= j\omega L_1 I_1 \mp j\omega M I_2 \\ V_2 &= \pm j\omega M I_1 - j\omega L_2 I_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

が得られる。ただし，ここでは図 3.5 に示すように，変成器二次側の電流の向きが図 3.3 と反対になっている。

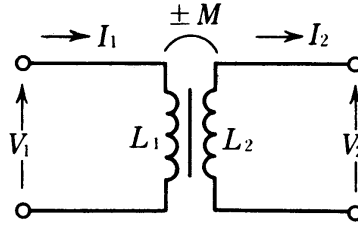


図 3.5: 変成器

これを， V_1, I_1 が式の左辺にくるように変形する。すなわち，式 (3.20) では， V_1, V_2 が I_1, I_2 で制御される形になっているが，これを V_1, I_1 が V_2, I_2 で制御される形に変更すると次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \pm \frac{L_1}{M} V_2 \pm j\omega \frac{L_1 L_2 (1 - k^2)}{M} I_2 \\ I_1 &= \pm \frac{1}{j\omega M} V_2 \pm \frac{L_2}{M} I_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

ここで，結合係数 $k = 1$ ，励磁インダクタンス $L_1, L_2 \rightarrow \infty$ とおくと

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \pm \frac{L_1}{M} V_2 = \pm \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} V_2 \\ I_1 &= \pm \frac{L_2}{M} I_2 = \pm \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} I_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

インダクタンス L_1, L_2 はコイルの巻数 N_1, N_2 の二乗に比例するので，図 3.6 の変成器において次式が成り立つ。

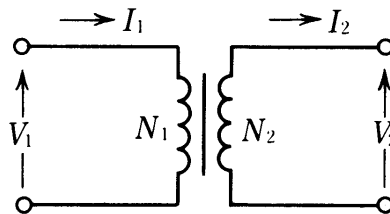


図 3.6: 理想変成器

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \pm \frac{N_1}{N_2} V_2 \\ I_1 &= \pm \frac{N_2}{N_1} I_2 \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

このような理想化された変成器を理想変成器 (ideal transformer) と呼ぶ。式 (3.23) から

$$V_1 I_1 = V_2 I_2 \quad (3.24)$$

が得られる。これは変成器の一次側と二次側の電力 (ベクトル電力) が等しいことを表している。

3.3 理想変成器のインピーダンス変換作用

式 (3.23) をみると, 電圧と電流が独立である。実は, 電圧と電流の関係は負荷に依存して定められる。図 3.7 において, 次の関係式が成り立つ。

$$V_2 = Z_L I_2 \quad (3.25)$$

上式を式 (3.23) に代入して

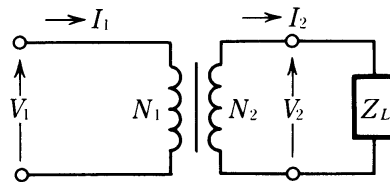


図 3.7: 理想変成器

$$V_1 = \pm \frac{N_1}{N_2} Z_L I_2 \quad (3.26)$$

$$I_1 = \pm \frac{N_2}{N_1} I_2 \quad (3.27)$$

この両式より

$$Z_i = \frac{V_1}{I_1} = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 Z_L \quad (3.28)$$

すなわち, 変成器の一次側から見込んだ入力インピーダンス Z_i は負荷インピーダンス Z_L に巻数比 N_1/N_2 の二乗を掛けたものになっている。

なお, 簡単のため理想変成器を図 3.8 のように巻数比 n で表す。

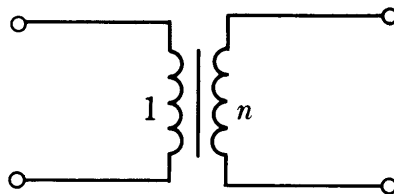


図 3.8:

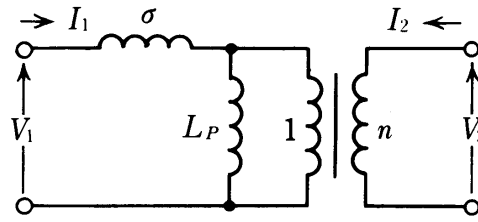


図 3.9: 変成器の等価回路

3.4 一般の変成器の理想変成器による表現

理想変成器では，出力を短絡すると入力も短絡される。しかし，一般の変成器では出力を短絡しても漏れインダクタンス σ が残る。したがって，図 3.9 の等価回路が予想される。

先に示したように

$$\sigma = L_1(1 - k^2) \quad (3.29)$$

である。出力を開放したときの一次インダクタンスは L_1 であるから

$$L_p = L_1 - \sigma = k^2 L_1 \quad (3.30)$$

一方，二次側から見たインダクタンスは，一次側を開放したとき L_2 になるべきであるから

$$L_2 = n^2 L_p = n^2 k^2 L_1 \quad (3.31)$$

$$\therefore n = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{L_2}{M} \quad (3.32)$$

となり，一般の変成器の等価回路が得られる。。

3.5 最大電力伝送定理

電源の内部インピーダンス Z_0 が一定の場合，負荷インピーダンス Z_L を変化させて， Z_L で消費される有効電力 P を最大にする方法について考える。

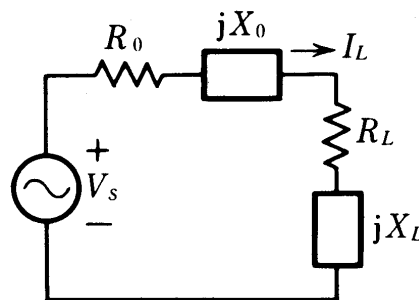


図 3.10: 電圧源型回路

図 3.10 の回路の場合，次式が成り立つ。

$$I_L = \frac{V_s}{R_0 + R_L + j(X_0 + X_L)} \quad (3.33)$$

$$\therefore |I_L|^2 = \frac{|V_s|^2}{(R_0 + R_L)^2 + (X_0 + X_L)^2} \quad (3.34)$$

これより, R_L で消費される有効電力は

$$P = R_L |I_L|^2 = \frac{R_L |V_s|^2}{(R_0 + R_L)^2 + (X_0 + X_L)^2} \quad (3.35)$$

負荷インピーダンスの変化の仕方には, R_L と X_L を独立に変化させる場合と, R_L と X_L の比を一定にしたままで変化させる場合の二通りがある。

3.5.1 R_L と X_L を独立に変化させる場合

式 (3.35) より直ちに

$$X_{L\text{opt}} = -X_0 \quad (3.36)$$

残りの部分については, 直流の場合と同じであるから

$$R_{L\text{opt}} = R_0 \quad (3.37)$$

この二つの条件を共役整合 (conjugate matching) と呼ぶ。このとき, 次式の最大電力が得られる。

$$P_{\max} = \frac{|V_s|^2}{4R_0} \quad (3.38)$$

3.5.2 $X_L/R_L = \text{一定}$ で変化させる場合

この場合は, 図 3.11 に示すように, 変成器のインピーダンス変換作用を用いて, Z_L を固定し, 巻数比 n を変化させて R_L で消費される電力を最大にすることを考える。

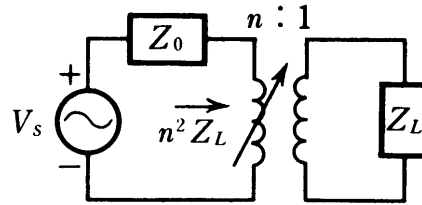


図 3.11:

変成器の一次側から見たインピーダンスは $n^2 Z_L$ であるから

$$P = \frac{n^2 R_L |V_s|^2}{(R_0 + n^2 R_L)^2 + (X_0 + n^2 X_L)^2} \quad (3.39)$$

上式の分母分子を n^2 で割ると

$$P = \frac{R_L |V_s|^2}{\left(\frac{R_0}{n} + n R_L\right)^2 + \left(\frac{X_0}{n} + n X_L\right)^2} \quad (3.40)$$

分母を n について整理すると

$$P = \frac{R_L |V_s|^2}{\frac{1}{n^2}(R_0^2 + X_0^2) + n^2(R_L^2 + X_L^2) + 2(R_0 R_L + X_0 X_L)} \quad (3.41)$$

P が最大になるのは、上式の分母の n についての微分が零になるときである。

$$-\frac{2}{n^3}(R_0^2 + X_0^2) + 2n(R_L^2 + X_L^2) = 0 \quad (3.42)$$

$$\therefore (R_0^2 + X_0^2) = n^4(R_L^2 + X_L^2) \quad (3.43)$$

したがって、最大電力伝送の条件は

$$n^2 |Z_L| = |Z_0| \quad (3.44)$$

すなわち、 Z_0 が固定されているとき、 Z_L を X_L/R_L 一定のまま変化させて R_L に最大電力を得るためには $|Z_L|$ を $|Z_0|$ に等しくすればよい。特に、 $X_L = 0$ の抵抗負荷の場合は

$$R_L = |Z_0| \quad (3.45)$$

にとればよい。