L'émergence de la notion de groupe d'homologie

Nicolas Basbois

L'introduction de concepts algébriques en topologie au début du vingtième siècle a, on le sait, été déterminante pour le devenir de la discipline. Elle a conduit à la formulation de nouveaux résultats[1] et à la mise en œuvre de calculs[2] pour la détermination explicite d'invariants topologiques, et a par la suite donné naissance à une nouvelle branche des mathématiques ; l'algèbre homologique (cf. [44] pour un survol de l'histoire de l'algèbre homologique et [13] pour un tour d'horizon, entre autres, de la topologie algébrique). Il s'agit d'un moment-clé du développement des mathématiques au même titre, par exemple, que l'algébrisation de la géométrie par Descartes, caractérisé par le transfert de notions entre des domaines traditionnellement séparés des mathématiques. En effet, la topologie, qui était jusque là traitée d'un point de vue combinatoire et faisait appel à une intuition de nature géométrique, se vit alors investie par des outils de théorie des groupes et des concepts abstraits difficilement interprétables en termes géométriques.

Ce tournant du développement de la topologie est traditionnellement associé à l'introduction de la notion de groupe d'homologie : les groupes d'homologie vinrent supplanter à partir de la fin des années 1920 les nombres (de Betti, de torsion) jusqu'alors utilisés par les topologues pour décrire leurs principaux objets d'étude (les polyèdres ou "complexes"), et furent ainsi le point de départ de l'utilisation de concepts algébriques en topologie. L'introduction de la notion de groupe d'homologie est, elle, généralement attribuée à Emmy Noether (ou, tout du moins, son influence est considérée comme prépondérante), figure de proue du courant de l'algèbre moderne de par sa volonté constante, à compter de 1920, d'axiomatisation et d'abstraction[3],

[1] cf. [16] p. 64 : "The sensational new concepts and results would have been impossible even to formulate without algebraic objects."

[2] cf. [44] p. 797 : "A 1925 observation of Emmy Noether (...) shifted the attention to the "homology groups" of a space, and algebraic techniques were developed for computational purposes in the 1930's."

[3] On pourra trouver des détails sur ces aspects du travail d'Emmy Noether dans [2], [45] ou encore dans le chapitre 5 de [10].

transmise au travers d'articles qui firent date (comme [31] ou [33]), et de par son influence sur ses élèves et collègues. Pourtant, comme l'explique Saunders Mac Lane dans [26], le développement de la notion de groupe d'homologie à Göttingen, dès 1926, sous l'influence d'Emmy Noether, revêt un aspect "légendaire", et plusieurs versions en ont été véhiculées[4]. On peut en outre relever la présence des groupes d'homologie en 1927 dans un article de Leopold Vietoris[5] - a priori indépendant des idées de Noether - et en 1929 dans un article de Walther Mayer, alors tous deux en poste à Vienne.

Des zones d'ombre entourent donc la genèse de la notion de groupe d'homologie, que ce soit par l'aspect "légendaire" de l'influence d'Emmy Noether ou la question de la priorité entre Noether et Vietoris sur cette genèse, et le but premier de notre étude est d'essayer d'élucider du mieux possible ces zones d'ombre. L'analyse d'articles d'époque et de témoignages des principaux acteurs de la mutation de la topologie à la fin des années 20 fera par ailleurs apparaître des approches différentes de la notion de groupe d'homologie et permettra d'orienter principalement notre propos sur les innovations conceptuelles ayant permis ce tournant majeur des mathématiques du vingtième siècle qu'est l'algébrisation de la topologie.

Trois articles apparaissent comme pionniers dans la définition et l'utilisation des groupes d'homologie : une communication de Vietoris (publiée en 1927) aux *Mathematische Annalen* faisant suite à l'article de 1926 [37], l'article "Eine Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel" de Heinz Hopf [19] et "Über abstrakte Topologie" de Walther Mayer [28]. Ceux-ci feront l'objet, au cours des paragraphes 3, 4 et 5, d'une analyse spécifique, puis seront confrontés entre eux et comparés à l'approche d'Emmy Noether dans le sixième et dernier paragraphe, qui sera ainsi également l'occasion d'une réflexion sur le rôle des traditions et de la culture mathématiques de chaque mathématicien dans sa propre production et dans son appréciation des autres contributions. En particulier, ayant mis en évidence auparavant l'influence de L. E .J. Brouwer sur le travail de Vietoris, nous aurons l'occasion d'analyser le regard porté par Brouwer sur les idées de Noether.

En conclusion nous procéderons à une synthèse historique et mentionnerons les conséquences qui peuvent en être tirées quant au mode de fontionnement de la communauté mathématique et à ses modes de communication et de diffusion du savoir.

A titre préliminaire, le premier paragraphe rappellera brièvement le cadre

[4]p. 12 : "A folk tale has it that homology groups first appeared in Göttingen (...) the 1935 book of Alexandroff and Hopf gives credit in the Preface to the advice of Emmy Noether."

[5]Il semble bien d'ailleurs, comme le dit Mac Lane dans [27], qu'il n'existe aucune publication antérieure à celle de Vietoris où apparaissent les groupes d'homologie.

d'étude de la topologie dans les années 20. Le deuxième, propédeutique, s'intéressera à une communication d'Emmy Noether datant de 1925, qui porte en germe la notion de groupe d'homologie et nous donnera une base de réflexion pour l'étude des textes analysés dans les paragraphes suivants.

1 Arrière-plan conceptuel : la topologie combinatoire dans les années 1920

Un rappel des notions utilisées de façon courante dans les textes étudiés ci-après est nécessaire non seulement pour la compréhension du propos mais aussi parce qu'il permet de repérer les différences et variations dues à des innovations conceptuelles. Sans entrer dans le détail des terminologies diverses ni dans une description historique du développement de la topologie depuis les travaux de Poincaré, nous pouvons néanmoins donner un socle de définitions commun aux topologues des années 20. Plusieurs définitions des différents objets, se recoupant les unes les autres, ont cohabité, et nous privilégions ici la plupart du temps la version de J. W. Alexander dans [1]. Ce choix est motivé par l'importance des travaux d'Alexander en topologie, par le fait que son article est contemporain de ceux étudiés dans les paragraphes suivants, et parce que Hopf semble reprendre en partie sa terminologie dans [19] (ce point sera détaillé plus loin). La seule exception concernera la définition de "complexe" qui, dans [1] (selon Alexander lui-même, p. 302), est plus restrictive que les définitions habituelles.

Nous devons tout d'abord rappeler la définition d'un "simplexe" : un k-simplexe est, selon les propres termes d'Alexander, l'analogue k-dimensionnel d'une région tétraédrique (un 1-simplexe est donc un segment, un 2-simplexe un triangle plein, un 3-simplexe un tétraèdre plein, etc.). Tout k-simplexe possède un "bord" défini comme l'ensemble de ses sous-simplexes (aussi appelés "faces") de dimension 0 à $k-1$ (le bord d'un 0-simplexe est le vide). Ainsi défini, un simplexe est entièrement déterminé par la donnée de ses sommets (les 0-faces).

On peut se représenter un "complexe" comme un agrégat de simplexes éventuellement soudés entre eux selon certaines de leurs faces. Rigoureusement, un complexe peut être défini comme un ensemble fini de simplexes, vérifiant les propriétés :

1. deux simplexes quelconques de l'ensemble ne peuvent s'intersecter que selon une de leurs faces[6].

[6]Dans [1], Alexander donne pour son propos une définition plus restrictive que celle énoncée ici. La définition ici proposée est plus représentative des définitions alors usuelles des complexes.

2. toute face d'un simplexe de l'ensemble est elle-même un simplexe de l'ensemble.

Les simplexes d'un complexe Φ sont aussi appelés "cellules".

Une "i-chaîne élémentaire" d'un complexe Φ est une expression symbolique de la forme

$$\pm V_0 V_1 ... V_i,$$

les V_j désignant les sommets d'une i-cellule de Φ. Deux expressions de la forme précédente sont identiques si elles coïncident par permutation paire des sommets qui les composent, opposées sinon. On peut exprimer cette propriété en disant qu'une i-cellule $|V_0 V_1 ... V_i|$ admet deux orientations distinctes, celle définie par la suite de symboles $V_0 V_1 V_2 ... V_i$ et celle définie par la suite de symboles $V_1 V_0 V_2 ... V_i$ par exemple[7]. Si l'on désigne les i-chaînes élémentaires par E_s^i, est appelée i-chaîne de Φ toute combinaison linéaire de la forme

$$K^i = \sum_{s=1}^{\alpha^i} x^s E_s^i,$$

où les x^s sont des entiers et où α^i désigne le nombre de i-chaînes élémentaires de Φ.

Le bord, défini précédemment ensemblistement sur les simplexes, peut également être défini algébriquement sur les chaînes : le bord de la i-chaîne élémentaire $V_0 V_1 ... V_i$ est défini comme la $(i-1)$-chaîne

$$\sum_{s=0}^{i} (-1)^s V_0 ... V_{s-1} V_{s+1} ... V_i.$$

La définition du bord est ensuite étendue aux chaînes quelconques par linéarité.

Une chaîne est dite fermée ou est appelée "cycle"[8] si son bord est nul. Il est important de noter que tout bord est un cycle (ce qui traduit l'idée intuitive qu'un bord n'a pas de bord). La relation d'homologie s'introduit alors de la

[7]Au sujet de l'orientation, la remarque suivante d'Alexander mérite l'attention ([1] p. 311) : "We prefer, however, to treat the expressions $\pm V_0 V_1 ... V_i$ as purely symbolical, so as not to go into the question of just what is meant by an oriented cell." Alexander procède ici volontairement de façon abstraite en considérant une expression symbolique sans chercher à en donner une représentation géométrique ou une quelconque intuition. Cette démarche se distingue de la volonté d'Alexander de définir un simplexe (analogue d'un tétraèdre) par recours à l'intuition géométrique. Nous reviendrons sur la question de l'orientation au cours du troisième paragraphe.

[8]Dans [1] Alexander désigne ce concept par l'expression "chaîne fermée" mais la terminologie usuelle est celle de "cycle".

façon suivante : un cycle K est dit "homologue à 0" et on note $K \sim 0$ s'il est le bord d'une chaîne de Φ. Deux chaînes quelconques K et K' de Φ sont dites homologues, et on note $K \sim K'$, si leur différence est homologue à 0 ($K - K' \sim 0$).

Il est maintenant possible d'introduire les nombres alors associés par les topologues aux complexes, et qui furent remplacés plus tard par les groupes d'homologie. Est appelé "i-ème nombre de connexité" (ou également "i-ème nombre de Betti") du complexe Φ, et est noté P^i, le nombre maximal de i-cycles linéairement indépendants de Φ, relativement à la relation d'homologie.

Les nombres de Betti peuvent être calculés à l'aide d'un des outils primordiaux des topologues avant l'introduction des groupes d'homologie : les "matrices d'incidence". Si les bords des α^i i-chaînes élémentaires E^i_s s'écrivent sous la forme

$$\sum_{j=1}^{\alpha^{i-1}} \mu^j_s E^{i-1}_j,$$

alors la matrice d'incidence en dimension i de Φ est la matrice des coefficients μ^j_s, $1 \leq s \leq \alpha^i$, $1 \leq j \leq \alpha^{i-1}$. Les matrices d'incidence donnent une description complète des complexes en traduisant les relations d'incidence entre les $(i-1)$-chaînes élémentaires et les i-chaînes élémentaires. Si l'on note ρ^i le rang de cette matrice alors on peut montrer (comme le mentionne Alexander dans [1] p. 316) que le i-ème nombre de Betti de Φ vérifie :

$$P^i = \alpha^i - \rho^i - \rho^{i+1}.$$

Le calcul du rang des matrices d'incidence permet donc de déterminer les nombres de Betti de Φ. En outre, depuis les travaux de Poincaré, d'autres nombres étaient considérés comme importants pour la description des complexes : il s'agit des diviseurs élémentaires[9] distincts de ± 1 des matrices d'incidence, appelés "nombres de torsion".

2 Emmy Noether

Emmy Noether, fille du célèbre mathématicien Max Noether, est née à Erlangen en 1882. Ayant mené la quasi-totalité de ses études jusqu'à ses premières recherches en théorie des invariants à Erlangen, elle s'est ensuite établie à Göttingen en 1915, ayant répondu à l'invitation de David Hilbert et

[9] On trouvera plus de détails au sujet des diviseurs élémentaires dans le paragraphe suivant.

de Felix Klein. Initialement ses compétences dans le domaine des invariants différentiels devaient amener Noether à assister Hilbert dans ses recherches en physique mathématique, mais elle se tourna peu à peu vers l'algèbre. Ses travaux à partir de 1920 en firent progressivement le chef de file de l'algèbre au sein de l'Institut mathématique de Göttingen. De par l'influence d'Emmy Noether, relayée notamment par l'ouvrage "Moderne Algebra" de van der Waerden, Göttingen est considérée comme le berceau de l'algèbre moderne. Elle a même pu être considérée, de 1920 au début des années 30, comme la capitale mondiale des mathématiques, de par la réussite des mathématiques allemandes et la présence à l'Institut des plus grands mathématiciens allemands de l'époque, au premier rang desquels Hilbert, Courant, Klein et bien sûr Noether.

Si Emmy Noether est connue pour son rôle prépondérant dans l'avènement de l'algèbre moderne, son influence en topologie semble beaucoup moins évidente car elle n'a jamais publié d'article de topologie (c'est ce que semble indiquer en tout cas sa bibliographie, cf. "Verzeichnis der Veröffentlichungen Emmy Noethers" [40] pp. 475-476). Pour autant, la littérature mathématique contient une de ses remarques sur le sujet et celle-ci va faire l'objet de ce paragraphe. Cette remarque se trouve dans une communication (résultat d'une conférence donnée par Noether lors d'une réunion de la Göttinger Mathematische Gesellschaft), sous forme d'une note très courte, datant du 27 janvier 1925 (parue en 1926) [32].

Voici le point de départ des réflexions d'Emmy Noether : il est d'usage d'établir le théorème de décomposition des groupes abéliens de génération finie en utilisant la théorie des modules et notamment la théorie des diviseurs élémentaires (appelés encore facteurs invariants)[10]. La méthode consiste à considérer les groupes abéliens comme des $\mathbb{Z}$-modules, tout groupe abélien de génération finie pouvant ainsi être vu comme quotient d'un $\mathbb{Z}$-module libre de type fini. L'utilisation des diviseurs élémentaires[11] permet finalement de montrer que tout groupe abélien de type fini est isomorphe à un produit de

[10] C'est par exemple comme cela que ce théorème ("der Haupsatz über Abelsche Gruppen") est prouvé par van der Waerden dans [39]. C'est également la méthode employée par Bourbaki dans [5].

[11] La proposition des diviseurs élémentaires ("Elementarteilersatz"), telle qu'énoncée par van der Waerden dans [39] p. 122, affirme : si N est un sous-A-module d'un A-module libre de type fini M, alors il existe une base $(u_1, ..., u_m)$ de M et une base $(v_1, ..., v_n)$ de N, avec $n \leq m$, et des entiers ϵ_1,...,$\epsilon_n$tels que :

- $v_i = \epsilon_i u_i$ $(i = 1, ..., n)$.
- $\epsilon_{i+1} \equiv 0$ (ϵ_i).

Cette proposition est valable dans le cas où A est un anneau euclidien, ou encore si A est un anneau principal.

la forme :

$$\mathbb{Z}^r \times \frac{\mathbb{Z}}{(a_1)} \times \frac{\mathbb{Z}}{(a_2)} \times ... \times \frac{\mathbb{Z}}{(a_p)},$$

r et p étant des entiers positifs, a_1, a_2, ..., a_p des entiers différents de 0 et ± 1 tels que :

$$\forall i \in 1, ..., p-1 \ a_i | a_{i+1}.$$[12]

Mais, ce qui est important, Noether fait remarquer que l'on peut très bien se passer de la théorie des modules pour prouver ce théorème et l'obtenir directement avec les seuls outils de la théorie des groupes en généralisant la preuve pour les groupes abéliens finis[13], et ainsi en déduire la théorie des diviseurs élémentaires. Noether considère même qu'il est plus simple de procéder de la sorte. Ce constat l'amène à la conclusion suivante : "in den Anwendungen des Gruppensatzes - z. B. Bettische und Torsionszahlen in der Topologie - ist somit ein Zurückgehen auf die Elementarteilertheorie nicht erforderlich."[14]

Malgré la brièveté de la communication et l'absence d'explications de sa part, on peut identifier avec une grande certitude - de par la méthodologie propre à Noether et grâce à des indices et témoignages ultérieurs (qui seront étudiés dans la suite de cet article) - les idées sous-jacentes aux propos de Noether. Il est clair, au vu de l'affirmation précédente, qu'elle a identifié la présence de modules parmi les objets alors considérés en topologie. Ainsi l'ensemble des i-chaînes d'un complexe Φ, pour une dimension i fixée, forme un $\mathbb{Z}$-module (cela vient de la définition même d'une i-chaîne, cf. paragraphe 1). C'est un fait probablement trivial pour les topologues des années 20 mais loin d'être mis en évidence[15]. L'ensemble des i-cycles de Φ forme également un $\mathbb{Z}$-module et l'ensemble des i-cycles homologues à 0 en est un sous-$\mathbb{Z}$-module. Le i-ème nombre de Betti de Φ peut par conséquent être vu comme le nombre maximal d'éléments linéairement indépendants du $\mathbb{Z}$-module obtenu comme

---

[12]On notera également que r, p et $\pm a_1$, $\pm a_2$, ..., $\pm a_p$ sont caractéristiques du groupe considéré.

[13]Le théorème de décomposition pour les groupes abéliens finis a, selon Van der Waerden (cf. [41] p. 150), été prouvé pour la première fois par Kronecker [22].

[14]"dans la mise en oeuvre du théorème pour les groupes - par exemple pour les nombres de Betti ou les nombres de torsion en topologie - un retour par la théorie des diviseurs élémentaires n'est donc pas nécessaire."

[15]A titre d'exemple, Alexander parle continuellement dans [1] de l'ensemble des i-chaînes de Φ, sans en préciser la structure de module. La phrase suivante (p. 316) est révélatrice de cet état d'esprit : "The elementary i-chains E_s^i of a complex Φ are a *minimal base* of the set of all i-chains of Φ". Alors qu'Alexander parle ici d'une base d'un ensemble, le lecteur actuel ressent le besoin de préciser qu'il s'agit d'une base d'un ensemble en tant que $\mathbb{Z}$-module. Alexander considère probablement une telle remarque à la fois triviale et superflue.

quotient du module des i-cycles par le module des i-cycles homologues à 0, ou encore comme le rang de la partie libre de ce module quotient. Les coefficients de torsion, définis comme les diviseurs élémentaires de la matrice d'incidence en dimension i, sont eux obtenus pratiquement à l'aide d'un algorithme, mettant en œuvre des opérations matricielles, utilisé dans la preuve de l'Elementarteilersatz. Ils correspondent donc en fin de compte aux diviseurs élémentaires donnés par l'Elementarteilersatz lorsqu'on l'applique au $\mathbb{Z}$-module des i-cycles et à son sous-$\mathbb{Z}$-module formé par les i-cycles homologues à 0.

Les $\mathbb{Z}$-modules pouvant être vus comme des groupes, les propos de Noether (cf. note 14) invitent à considérer les ensembles des i-cycles et des i-cycles homologues à 0 comme des groupes. Le théorème de décomposition des groupes abéliens de génération finie appliqué au quotient du groupe des i-cycles par le groupe des i-cycles homologues à 0 fait apparaître le i-ème nombre de Betti et les coefficients de torsion (il s'agit respectivement de r et de a_1, a_2, ..., a_p, selon la notation utilisée plus haut). Emmy Noether semble justifier ce point de vue par une mise en œuvre du théorème de décomposition des groupes de génération finie plus aisée que la mise en œuvre des diviseurs élémentaires. En outre, bien que la brièveté de la communication de Noether ne nous donne qu'un accès restreint à ses idées, on peut supposer qu'elle envisageait un gain conceptuel avec l'introduction en topologie des outils de théorie des groupes par le biais des groupes de cycles, etc.

Rétrospectivement, on peut s'étonner de ce qu'entre les travaux de Poincaré (datant de la fin du XIX$^\circ$ siècle), qui contenaient déjà l'outillage des matrices d'incidence et la définition des nombres de Betti et de torsion, et le milieu des années 1920, personne n'ait considéré les ensembles des i-cycles, etc. comme des groupes. Ce phénomène peut s'expliquer d'une part par l'utilité pratique peu évidente de l'introduction de la théorie des groupes en topologie - question qui sera abordée dans la suite de notre étude - et d'autre part par le statut même de la théorie des groupes. En effet, autant l'intérêt des groupes avait été reconnu depuis au moins la moitié du XIX$^\circ$ siècle, autant ils furent longtemps considérés comme auxilliaires[16] dans l'étude de certains problèmes et non comme objets d'intérêt intrinsèque. La considération de groupes autres que des groupes de permutations ou de transformations géométriques fut elle aussi tardive.

Sans entrer dans le détail de l'évolution du statut de la théorie des groupes au sein de l'algèbre, nous pouvons cependant donner quelques repères. Le concept de groupe est d'abord apparu sous la forme de groupe de permu-

[16] cf. le chapitre 1 de [10].

tations dans le problème de la résolubilité des équations algébriques puis a été étendu à l'idée de groupe de transformations[17]. Cette vision des groupes comme groupes de transformations semble d'ailleurs avoir profondément influencé la terminologie, les éléments d'un groupe étant souvent appelés "Operationen", et ce, aussi bien dans un des premiers travaux contenant une tentative d'axiomatisation des groupes[18] que dans des études systématiques de groupes abstraits soumis à certaines conditions (il en va ainsi des articles [29] de 1917 et [30] de 1918 de Jakob Nielsen).

Cependant, un article de 1893, traitant entre autres de groupes, préfigure l'esprit de l'algèbre moderne. Il s'agit de l'article [42] de Heinrich Weber[19]. Les groupes et les corps y sont considérés de façon abstraite, et la théorie de Galois y est présentée non plus seulement comme un moyen commode d'étudier le problème de la résolubilité des équations algébriques mais comme une correspondance entre des propriétés des groupes et des corps. L'article contient également l'idée fondamentale, certes déjà exprimée auparavant, que deux groupes isomorphes peuvent être considérés comme deux mêmes objets. Cette idée englobe en particulier celle selon laquelle la nature des éléments des groupes peut être éludée, ce qui est confirmé par le fait que Weber désigne un élément d'un groupe par le terme "Element" et non par celui, "Operation", utilisé plus fréquemment alors (et encore souvent par la suite).

Mais l'avant-gardisme de l'article de Weber en a beaucoup limité l'influence et d'ailleurs, le *Lehrbuch der Algebra* (1895), de Weber lui-même, présente une vision de l'algèbre quelque peu différente de celle sous-jacente à l'article de 1893 (peut-être parce qu'il s'adresse à un public moins pointu). En effet, bien que le deuxième volume du *Lehrbuch* reprenne la présentation des groupes selon les idées de l'article de 1893 et semble indiquer l'intérêt de l'étude des groupes en eux-mêmes, le premier volume a pour principal objet la question de la résolubilité des équations algébriques, les groupes n'étant introduits qu'au bout de plus de 500 pages, et uniquement comme outil pour répondre à cette question. L'importance de la correspondance entre corps et groupes fournie par la théorie de Galois, relevée dans l'article de 1893, n'est donc plus soulignée - peut-être car le *Lehrbuch* se veut un manuel, et non un article de recherche.

Le *Lehrbuch* fut la référence allemande des manuels d'algèbre jusqu'au début des années 1930 et la parution du *Moderne Algebra* de van der Waer-

[17]On pense notamment ici à l'idée-phare du *programme d'Erlangen* de Felix Klein selon laquelle la géométrie doit être l'étude des êtres invariants sous l'action de groupes de transformations donnés.

[18]cf. l'article [17] de Hölder, datant de 1889.

[19]Le lecteur désireux de plus de détails est ici invité à consulter la section 1.2 de [10], dont on reprend ici le propos dans ses grandes lignes.

den. Si un traitement abstrait des groupes est proposé dans le second volume du manuel de Weber, il semble bien que l'intérêt de l'étude des groupes en eux-mêmes, visible notamment grâce à l'article de 1893, n'ait pas été décelé par la majeure partie de la communauté mathématique, qui en est restée à une approche utilitaire de la théorie des groupes. Les premières études systématiques de groupes abstraits (comme les travaux de 1917 et 1918 de Nielsen) furent plus tardives et il en va de même de manière général des études des structures algébriques (la première notable étant celle des corps par Steinitz en 1910 [35]).

Ainsi, Emmy Noether franchit un pas en introduisant des structures algébriques en topologie. Tout d'abord elle remarque que les ensembles des i-chaînes pour une dimension donnée sont des $\mathbb{Z}$-modules puis conseille de les voir plutôt comme des groupes, espérant un gain pratique. C'est probablement cette conviction d'un gain réel à introduire les groupes en topologie et l'habitude de manipuler des objets abstraits et d'en étudier les propriétés de manière systématique qui lui permirent de formuler cette remarque, qui avait échappé à d'autres mathématiciens pourtant au fait des notions de module et de groupe mais moins sensibles à l'approche de l'algèbre moderne et à un intérêt à introduire des concepts algébriques abstraits en topologie, et peut-être avec encore ancrée en eux l'idée que la notion de "groupe" ne renferme que celle de "groupe de transformations".

L'analyse de cette remarque de Noether nous ayant en particulier permis d'appréhender les notions de groupe des chaînes, des cycles, etc. et l'utilisation de ces notions pour calculer les nombres de Betti et de torsion, nous allons maintenant pouvoir aborder l'étude des textes cités en introduction. Nous procéderons de façon chronologique en commençant par l'étude de l'article [37] de Vietoris, première publication où figure une définition des groupes d'homologie.

3 Leopold Vietoris

Leopold Vietoris, mathématicien autrichien né en 1891, a partagé l'essentiel de sa scolarité et de sa carrière entre Vienne, Graz et Innsbruck. Son activité mathématique, d'abord concentrée sur la topologie générale, s'orienta à partir de 1925 vers la topologie combinatoire, à l'occasion d'un séjour en tant que "Rockefeller fellow" chez L. E. J. Brouwer à Amsterdam. Les résultats de ses recherches d'alors parurent via les articles [36], [37] (soumis le 28 juin 1926) et firent l'objet de sa conférence du 24 septembre 1926 devant la Deutschen Mathematiker-Vereinigung intitulée "Über den höheren

Zusammenhang kompakter Raüme" (cf. [38]). Ces travaux furent réalisés intégralement lors du séjour de Vietoris chez Brouwer, au carrefour des années 1925 et 1926 et l'influence de ce dernier y est très perceptible. Vietoris précise notamment dans la première note de [37] que ses recherches sont nées d'une remarque orale de Brouwer[20] et, à la lecture de l'article, on peut constater qu'il a repris les concepts et la terminologie de l'article [8] de Brouwer.

Dans [8], Brouwer prouve un résultat plus général que ne l'annonce le titre ("Invariance de la courbe fermée") ; il établit que le nombre de domaines délimités par un ensemble plan, borné, connexe, parfait (i.e. fermé et sans point isolé) est invariant par bijection continue (donc est un invariant topologique). Considérant un ensemble π comme ci-dessus et $(h+1)$-connexe[21] et un point P de π, il montre qu'il existe un système de h lacets dans π d'origine P (mais aucun système de moins de h lacets) tel que tout lacet dans π ayant pour origine P est homotope à la composée d'un nombre fini de lacets (et de leurs inverses) de ce système. Pour ce faire, il considère à la place des lacets des ensembles finis de points, invariants par permutation cyclique, et tels que la distance entre deux points consécutifs est inférieure à ϵ, qu'il nomme ϵ-chaînes[22] ("ϵ-Ketten"). L'homotopie sur les lacets est, elle, traduite par des ϵ-modifications ("ϵ-Abänderungen") consistant à modifier légèrement les ϵ-chaînes par ajout, élimination ou déplacement de points.

L'article [37] est proche sur de nombreux points de [8]. Vietoris y définit les groupes de connexité et d'homologie d'une partie quelconque M d'un espace métrique sans s'en remettre à l'existence d'une décomposition de M en cellules. A cet effet, il commence par considérer des complexes combinatoires, et donne des définitions assez proches de celles d'Alexander, quoique sans faire appel à la notion de tétraèdre et, de manière plus générale, sans faire référence à des objets ou des intuitions de nature géométrique.

Ainsi, un n-simplexe est défini par Vietoris comme l'ensemble formé de $n+1$ points, ainsi que de toutes les paires, triplets, ..., n-uplets formés à partir de ces points. Cette définition est analogue à celle utilisée par Alexander dans [1] si l'on considère la donnée d'une paire de points comme équivalente à celle du segment reliant ces deux points, la donnée d'un triplet de points comme équivalente à celle du triangle plein ayant ces trois points pour sommets, etc.

[20] cf. [37] Note 1 p. 454 :"Diese Untersuchungen gehen von einer mündlichen Bemerkung Brouwers aus, dass diese Invarianz (...) auch für die von ihm (...) eingeführte Vielfachheit der Basis der Zyklosis gilt."

[21] Cette terminologie n'est pas à prendre au sens actuel mais en un sens plus ancien, signifiant "délimitant un nombre $h+1$ de domaines" ; cf. [13], note p. 341.

[22] Cette discrétisation des lacets consiste en fait en une approximation linéaire, si l'on considère à la place d'un lacet la courbe obtenue comme réunion des segments reliant deux points consécutifs de la chaîne.

La définition de complexe introduite par Vietoris est identique à celle que nous avons donnée dans le premier paragraphe, bien qu'exprimée différemment. Il précise notamment que les sous-simplexes[23] d'un complexe donné apparaissent avec une certaine multiplicité - qui correspond au fait qu'un même simplexe peut être face de plusieurs simplexes différents. Le bord d'un complexe C "k-dimensionnel homogène" (i.e. dont les simplexes - qui ne sont faces d'aucun autre - sont tous de dimension k) est défini comme le complexe formé à partir des simplexes $(k-1)$-dimensionnels qui sont faces d'un nombre impair de simplexes de C. Cette définition peut sembler curieuse mais résulte en fait de ce que Vietoris considère des simplexes non orientés : en effet, considérer des simplexes non orientés revient à considérer des complexes modulo 2.[24] Vietoris écrit d'ailleurs, pour deux complexes donnés K_1, K_2, la relation $K_1 = K_2$ (mod 2), lorsque les multiplicités de leurs sous-simplexes sont égales modulo 2. Un n-cycle est un complexe n-dimensionnel homogène sans bord.

Enfin, Vietoris introduit l'opération somme sur les complexes (la somme de deux complexes K_1, K_2 est l'ensemble des sous-simplexes de K_1 et de K_2, munis de la somme de leurs multiplicités respectives dans K_1 et K_2) puis introduit la relation d'homologie :

$R^{(k-1)} \sim 0$ dans C si $R^{(k-1)}$ est le bord d'un simplexe k-dimensionnel $S^{(k)}$ du complexe C.

Ayant précisé la compatibilité de la somme avec la considération des complexes modulo 2, il définit le n-ième groupe de connexité ("n-te Zusammenhangsgruppe") d'un complexe K comme étant le groupe des cycles n-dimensionnels non orientés de K modulo la relation d'homogie[25]. Est appelé k-ième nombre de connexité ("Zusammenhangszahl") d'un complexe C le nombre maximal s de k-cycles de C entre lesquels il n'existe aucune relation d'homologie $\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + ... + \alpha_s C_s \sim 0$ (ici les cycles ne sont pas considérés modulo 2 ; le nombre de connexité est donc identique au nombre de Betti).

---

[23] Vietoris considère un complexe comme un ensemble fini de simplexes donc aucun n'est la face d'un autre, puis y ajoute les faces (sous-simplexes) de ces simplexes.

[24] L'intuition géométrique sous-jacente peut être éclairée par l'exemple suivant : si l'on se donne deux triangles pleins dans le plan ayant une arête $[ab]$ en commun, le complexe obtenu comme l'ensemble de ces deux triangles peut être représenté par la réunion de ces deux triangles. Cette réunion donne un quadrilatère dans lequel l'arête $[ab]$ a disparu car elle était le lieu de soudure des deux triangles. L'arête apparaissait deux fois, une fois dans chacun des triangles, et sa disparition lors de la formation du complexe peut être traduite par le fait que le complexe est considéré modulo 2.

[25] [37] p. 456 : "Wir betrachten nun für $K_1 \sim K_2$ die Operationen "$+K_1$" und "$+K_2$" als dieselbe Operation."

Vietoris reprend ensuite ces définitions dans le cas de simplexes orientés[26]. Le bord d'un complexe K n-dimensionnel homogène est défini comme le complexe $(n-1)$-dimensionnel contenant l'ensemble des $(n-1)$-faces de K $(p-q)$ fois, si celles-ci appartiennent au bord de p n-faces de K orientées positivement et au bord de q n-faces de K orientées négativement. Le n-ième groupe d'homologie ("n-te Homologiegruppe") d'un complexe C est alors défini comme le groupe des cycles n-dimensionnels orientés de K modulo la relation d'homologie.

Dans un deuxième temps, Vietoris effectue le transfert des notions sur les complexes combinatoires aux parties d'un espace métrique (son intérêt se concentrant finalement sur les parties compactes). Il commence par définir très généralement un complexe C dans un ensemble M comme étant un complexe au sens combinatoire défini précédemment dont les sommets appartiennent à M. Il introduit ensuite une notion d'homologie lorsqu'une distance est donnée sur M :

un cycle C dans M est dit ϵ-homologue à 0 dans M (noté $C \sim_\epsilon 0$) s'il est homologue au sens combinatoire à une somme de bords de simplexes (dans M) de diamètre strictement inférieur à ϵ.

La même vision géométrique que celle présente dans [8] guide les définitions. Par exemple, l'addition du bord $R^{(k)}$ d'un simplexe $(k+1)$-dimensionnel $S^{(k+1)}$ dont les arêtes sont toutes de longueur strictement inférieure à ϵ (il note $R^{(k)} \sim_\epsilon 0$) à un cycle k-dimensionnel $C^{(k)}$ est appelée "ϵ-Abänderung" de $C^{(k)}$. Vietoris généralise ainsi en dimension (finie) quelconque les idées liées à l'homotopie présentes dans l'article [8] de Brouwer. D'ailleurs, comme nous allons le voir, Vietoris définit également le groupe d'homotopie d'une partie M d'un espace métrique et ce, de façon totalement analogue au groupe d'homologie.

Vietoris considère des *suites fondamentales*[27] F dans M ; il s'agit de suites de cycles k-dimensionnels $(C_m)_{m=1\ldots+\infty}$ dont les longueurs des arêtes tendent vers 0 avec m et tels que :

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_\epsilon \ \forall n_1, n_2 > n_\epsilon \ C_{n_1} \sim_\epsilon C_{n_2}.$$

[26]Le principe de l'orientation a été donné dans le premier paragraphe pour les chaînes élémentaires. Il s'applique de la même façon aux simplexes considérés par Vietoris car ils sont entièrement déterminés par la donnée de leurs sommets.

[27]La terminologie employée est "*Fundamentalfolge*" ; on aurait également pu traduire par *suite de Cauchy* car la condition exprimée équivaut à une condition de Cauchy selon la métrique définie par Vietoris. En outre Felix Hausdorff, à la même époque, utilise le terme "*Fundamentalfolge*" pour désigner une suite de Cauchy dans son "Grunzüge der Mengenlehre", cf. [15] p. 414.

Une suite fondamentale est dite ϵ-homologue à 0 s'il existe n_ϵ tel que $C_n \sim_\epsilon 0$ pour tout $n > n_\epsilon$. Une suite fondamentale F est appelée *suite nulle* ("Nullfolge") si elle est ϵ-homologue à 0 pour tout ϵ ; on écrit alors $F \sim 0$.

Ayant alors précisé que les suites fondamentales formaient un groupe pour l'addition et les suites nulles un sous-groupe, il définit les n-ièmes groupes de connexité et d'homologie de M comme étant les groupes des suites fondamentales modulo la relation d'homologie sur les suites (ce qui revient à faire le quotient par le sous-groupe des suites nulles - ce que ne précise pas Vietoris). La distinction entre groupe d'homologie et groupe de connexité vient comme précédemment de ce que l'on considère les cycles orientés ou non.

Vietoris procède de façon analogue pour définir le groupe fondamental de M. Il prend comme chemins dans un complexe les chemins d'arêtes et introduit l'équivalence (comme analogue à l'homotopie) en disant qu'un chemin fermé W (de sommets initial et final identiques) est équivalent à 0 (noté $W \equiv 0$) dans un complexe C s'il est inclus dans une face de C, ou est somme de tels chemins. Pour un chemin fermé W dans M il écrit $W \equiv_\epsilon 0$ s'il est inclus dans un simplexe de M dont les arêtes sont de longueur strictement inférieure à ϵ. Il définit alors les suites fondamentales de chemins de façon totalement analogue aux suites fondamentales de cycles et définit l'équivalence sur les suites fondamentales de chemins en mimant l'homotopie sur les suites fondamentales de cycles. Une fois fixé un point o de M, il définit le groupe fondamental de M par rapport à o comme le groupe des suites fondamentales de chemins de points initial et final o modulo la relation d'équivalence.

La suite de l'article est révélatrice de la conception qu'avait Vietoris des objets qu'il manipulait. Les groupes (de connexité, d'homologie, fondamentaux) qu'il a introduits sont étudiés en partie du point de vue de leurs propriétés topologiques : il montre qu'on peut les munir d'une distance qui en fait des espaces métriques complets et prouve que si M est compact alors le groupe de connexité de M l'est également. Toujours pour M compact, il montre que ces groupes possèdent chacun une famille génératrice (il emploie le mot "Basis") compacte et définit la multiplicité ("Vielfachheit") de ces groupes comme le plus petit nombre d'éléments d'une famille génératrice (qui peut être infinie dénombrable). La multiplicité des groupes de connexité et d'homologie est pour lui l'analogue des nombres de connexité et de Betti dans les complexes combinatoires. Reprenant la terminologie "Zyklosis"[28] employée par Brouwer dans [8], il fait le lien avec ses définitions (ce qui les justifie) en montrant que la multiplicité des "Zyklosis" non orientés est égale

[28] Il s'agit d'une terminologie très particulière, semblant provenir de [25]. Elle désigne les lacets employés par Listing pour mesurer la connexité. On trouvera des détails dans [6] p. 920.

à la multiplicité du groupe de connexité de la dimension correspondante[29].

Tout ceci confirme l'importance des idées de Brouwer et la prépondérance des intuitions géométriques et des notions topologiques dans le travail de Vietoris. Dans [37] Vietoris n'utilise aucun outil de théorie des groupes, évite la terminologie des groupes quotients et travaille toujours sur les cycles ou les chemins et non sur leurs représentants à homologie ou équivalence près. Ainsi, si Vietoris introduit les groupes en topologie, c'est tout simplement parce qu'il ne peut pas faire autrement (ce constat sera d'ailleurs confirmé si besoin l'était, dans le paragraphe suivant, par l'étude de [28]). Comme l'explique Mac Lane dans [27], l'intérêt de Vietoris se portant sur les espaces métriques compacts - qui peuvent avoir une infinité de trous, comme l'ensemble triadique de Cantor par exemple - leur homologie ne peut plus s'exprimer à l'aide des nombres de Betti ou de torsion[30] et demande donc l'introduction de la structure de groupe[31] afin de définir l'analogue du nombre de Betti : la multiplicité. Cette innovation de Vietoris perd tout son aspect exceptionnel, et apparaît au contraire presque naturelle, si l'on en croit Vietoris lui-même lorsqu'il écrit dans une lettre à Puppe ([16] p. 62-63) : "Selbstverständlich wussten die Topologen schon vor diesen Arbeiten, dass sie es bei der Addition von Zykelklassen mit Abelschen Gruppen zu tun hatten. Weil sie aber wussten, dass diese Gruppen durch Rang- und Elementarteiler (Torsionszahlen) charakterisiert sind, hielten sie die Beschäftigung mit den Gruppen für überflussig."[32] Ainsi "tous" les topologues savaient à l'époque qu'il existait une structure de groupe sur les classes de cycles mais aucun ne voyait le gain à l'introduire vu que les complexes considérés alors étaient tels qu'il ne donnaient lieu qu'à des groupes d'homologie de type fini

[29] [37] p. 464 : "Die Vielfachheit der nicht orientierten Zyklosis ist gleich der Vielfachheit der Zusammenhangsgruppe derselben Dimension."

[30] On a vu dans le premier paragraphe que les nombres de torsion étaient définis à partir des matrices d'incidence, elles-mêmes attachées à un complexe. Pour définir les nombres de torsion d'un espace métrique compact, il aurait donc fallu que Vietoris trouve comment associer un complexe simplicial (qui est un ensemble fini) à un espace métrique compact tout en en conservant les propriétés topologiques - ce qui semble une entreprise vaine. Les nombres de Betti peuvent, eux, être définis sans le recours aux matrices d'incidence (cf. la définition donnée dans le premier paragraphe) mais on peut facilement obtenir des nombres de Betti infinis pour les espaces métriques compacts. En effet, si l'on considère un espace avec une infinité de trous, on obtient une famille infinie de 1-cycles indépendants en se donnant pour chaque trou de l'espace considéré un 1-cycle entourant ce trou.

[31] Cette explication de Mac Lane est d'ailleurs confirmée par Vietoris lui-même dans une lettre à Friedrich Hirzebruch, citée dans [16], p. 62.

[32] "Bien sûr, les topologues savaient déjà avant ce travail qu'ils avaient affaire à des groupes abéliens via l'addition de classes de cycles. Mais comme ils savaient que ces groupes sont caractérisés par le rang et les diviseurs élémentaires (nombres de torsion), ils considéraient cet emploi des groupes superflu."

(donc caractérisés par leurs nombres de Betti et de torsion). L'introduction des groupes d'homologie par Vietoris vient en fin de compte de ce que ses objets d'étude (les espaces métriques compacts) l'y contraignaient, de par l'absence de restriction au cadre des groupes abéliens de type fini, caractéristiques des objets topologiques alors couramment utilisés.

En adoptant une approche géométrique inspirée par Brouwer, Vietoris a pu étudier l'homologie d'objets plus riches que les complexes simpliciaux. Une démarche plus classique aurait été de fournir un procédé général permettant d'associer un complexe simplicial à un espace métrique compact et de définir ensuite l'homologie de cet espace comme étant l'homologie du complexe associé. Mais la voie empruntée par Vietoris lui a permis justement de contourner la difficulté de l'affectation d'un complexe simplicial pertinent à un espace métrique compact quelconque, ce qui explique qu'il ait été le premier à définir la notion de groupe d'homologie.

On peut cependant légitimement se demander pourquoi le problème de la définition d'une homologie pour des objets plus complexes que les complexes simpliciaux n'a pas rencontré une réponse antérieure à celle de Vietoris. Sans entrer dans les détails, il semble que cela soit lié au problème de la définition même d'une variété[33]. En effet, dans ses premiers articles sur l'*analysis situs*, Poincaré considéra des variétés différentiables, définies par exemple à l'aide de conditions sur des paramétrisations locales. La relation d'homologie était ainsi présentée :

$V_1 + V_2 + ... + V_k \sim 0$ *si les sous-variétés de dimension* m V_1,V_2,...,V_k *de la variété* M *forment le bord d'une sous-variété de dimension* $m+1$ *de* M.

Poincaré proposa également ensuite de représenter les variétés via une décomposition en cellules (donc de les représenter par des complexes cellulaires), affirmant semble-t-il que toute variété admet une triangulation. Il put ainsi introduire les matrices d'incidence et fournir un algorithme de calcul des nombres de Betti et définir les nombres de torsion. Mais la démarche de Poincaré souleva bon nombre de problèmes auxquels peu de réponses avaient été apportées au milieu des années 1920. On peut citer principalement le problème de l'existence d'une décomposition en cellules pour une variété donnée, l'invariance des nombres de Betti et de torsion pour deux triangulations d'une même variété, l'invariance de l'homologie ainsi définie pour deux variétés homéomorphes, etc. Ces problèmes sont en fin de compte liés à celui de la définition elle-même d'une variété. Soit on adoptait le premier point de vue de Poincaré et tentait de montrer des théorèmes d'existence de triangulation pour de telles variétés, soit on partait du principe qu'une variété

[33]Pour plus de détails, on pourra consulter [34].

était un complexe cellulaire, et on cherchait des conditions de nature combinatoire pour qu'une variété vérifie certaines propriétés comme la dualité de Poincaré. Etant donné la commodité des complexes cellulaires pour les calculs des nombres de Betti et de torsion et la difficulté à prouver l'existence de triangulations pour les variétés en général (l'existence de triangulations pour les variétés 2-dimensionnelles, par exemple, ne fut prouvée qu'en 1925 par T. Radó), on peut comprendre aisément que les topologues aient en général pris, jusqu'à Vietoris, les complexes simpliciaux comme base de leurs réflexions.

4 Walther Mayer

Le travail de Vietoris a une filiation directe et immédiate via celui de Walther Mayer (Vienne) et en particulier par le biais de l'article [28]. La première partie de [28], soumise le 16 novembre 1927, voit Mayer préciser en introduction : "In die Topologie wurde ich durch meinen Kollegen Vietoris eingeführt, dessen Vorlesung 1926/27 ich an der hiesigen Universität besuchte."[34] Mayer se place d'un point de vue abstrait et donne un système d'axiomes pour les complexes[35]. Pour notre propos, nous nous limiterons à l'étude de la première partie, qui concerne essentiellement les définitions et l'axiomatique.

Les complexes sont vus comme objets d'un module[36] des complexes Σ et à chaque complexe est associé un entier - appelé dimension - compris entre 0 et un certain entier n qui est la dimension du module Σ. La notion de simplexe disparaît ainsi, de même que la notion de face, et en particulier celle de sommet, qui était jusque-là nécessaire pour déterminer la dimension d'un simplexe. Les axiomes introduits par Mayer sont les suivants :

1. il existe une opération entre les complexes de Σ qui fait de l'ensemble des complexes $\{K^{(\rho)}\}$ d'une dimension donnée ρ un groupe abélien.
2. il n'y a aucun élément d'ordre fini dans $\{K^{(\rho)}\}$.
3. pour tout ρ il existe une famille finie de complexes ρ-dimensionnels $a_1^{(\rho)}$, ..., $a_\tau^{(\rho)}$ telle que tout complexe ρ-dimensionnel de $\{K^{(\rho)}\}$ est inclus dans

[34] "J'ai été initié à la topologie par mon collègue Vietoris dont j'ai fréquenté le cours 1926/27 à notre Université."

[35] Mayer renforce d'ailleurs ce point de vue abstrait en précisant que les complexes sont des objets qu'il ne faut pas forcément considérer comme représentant des entités géométriques.

[36] Le mot employé par Mayer est "Ring" mais comme il ne s'agit pas d'un anneau au sens actuel (la multiplication entre complexes n'est pas définie) nous préférons utiliser le terme "module" avec son sens actuel afin d'éviter toute confusion.

$$\left\{\sum_{i=1}^{\tau} p_i a_i^{(\rho)}, p_i \in \mathbb{Z}\right\}.$$

4. il existe une opération R, dite "bord", qui à tout complexe ρ-dimensionnel $K^{(\rho)}$ de Σ $(1 \leq \rho \leq n)$ associe un complexe $(\rho - 1)$-dimensionnel de Σ noté $R(K^{(\rho)})$.
5. R est $\mathbb{Z}$-linéaire.
6. $R \circ R = 0$.

Mayer en arrive ensuite très rapidement à définir les groupes d'homologie (juste après l'introduction des cycles, des nombres de torsion et des cycles homologues à 0). Il y a une avancée notable : alors que chez Vietoris le concept de groupe d'homologie pouvait apparaître forcé par les circonstances, il est ici pleinement assumé. Rien en effet dans ses axiomes n'obligeait Mayer à l'introduire et ce d'autant plus que d'après l'axiome 3 les groupes de complexes sont de génération finie - donc entièrement caractérisés par les nombres de Betti et de torsion - au contraire de ceux utilisés par Vietoris pour les espaces métriques compacts.

Pourtant l'importance des outils de la théorie des groupes ne semble toujours pas décelée chez Mayer. On pourrait croire le contraire vu que, à la différence de Vietoris, il commence par définir le ρ-ième groupe d'homologie comme le groupe obtenu comme quotient du groupe des cycles ρ-dimensionnels par le sous-groupe des cycles ρ-dimensionnels homologues à 0 ; mais il ressent le besoin de montrer par la suite que les classes de cycles modulo la relation d'homologie se comportent bien comme un groupe additif (cf [28] pp. 7-8 : il vérifie que l'addition entre classes est bien définie, qu'elle est commutative, que la classe des cycles d'homologie nulle est le neutre pour cette addition, etc.), comme si la définition par passage au quotient n'était pas totalement satisfaisante. En outre, la vision matricielle guide la plupart des calculs. Mayer raisonne continuellement à l'aide des matrices d'incidence et, avant toute considération, se donne une base des complexes (les facteurs invariants sont, de ce fait, toujours mis en évidence via des changements de base), s'obligeant dans la plupart des cas à montrer que les résultats qu'il obtient sont indépendants de la base considérée. On peut rétrospectivement d'autant plus s'étonner que Mayer ne se soit pas affranchi des matrices que l'article [37] de Vietoris semblait aller dans ce sens, cf. p. 456, Vietoris parlant des nombres de connexité : "Wir haben nur die Definition derselben von der Darstellung durch Matrizes losgelöst." Il y a d'ailleurs à ce sujet une opposition très nette entre l'article [37] de Vietoris et celui de Mayer : Vietoris n'a aucun usage de l'algèbre linéaire dans [37] alors qu'elle est omniprésente chez Mayer.

5 Heinz Hopf

Le dernier article que nous étudierons est l'article [19] de Heinz Hopf. Il faut rappeler que Hopf est venu pour la première fois à Göttingen en 1926, y rencontrant Paul Alexandroff - avec qui il écrivit plus tard un célèbre manuel de topologie, cf. [4] - et bien sûr Emmy Noether, puis y est retourné à plusieurs reprises entre 1926 et 1928. Dans cet article [19] de 1928, Hopf reprend, d'une manière différente, la preuve[37] d'une généralisation de la formule d'Euler-Poincaré[38]. Entrons plus avant dans le détail de cet article : celui-ci se divise en trois paragraphes.

Le premier paragraphe énumère des propriétés classiques de théorie des groupes, en particulier des groupes abéliens de génération finie. Hopf s'intéresse notamment aux groupes quotients et à la trace ("Spur") d'un endomorphisme d'un groupe abélien libre de rang fini et établit la relation

$$SG = SH + S\frac{G}{H},$$

où G est un groupe abélien libre de rang fini n, H un sous-groupe de G stable par un endomorphisme f de G et tel que le quotient $\dfrac{G}{H}$ soit lui aussi libre (il prouve qu'un tel quotient est obligatoirement abélien et de génération finie), SG désignant la trace de f en tant qu'endomorphisme de G, SH la trace de f en tant qu'endomorphisme de H et $S\dfrac{G}{H}$ la trace de l'endomorphisme induit par f sur $\dfrac{G}{H}$.

Le deuxième paragraphe traite notamment des définitions liées aux complexes. Considérant un complexe C^n de dimension n (la définition d'un "complexe" n'est pas rappelée mais il faut certainement entendre ici "complexe" au sens d'Alexander dans [1] car Hopf y fait référence dans l'article [18]), il désigne par T^i_j, $j = 1,...,a^i$, ses simplexes orientés (l'orientation étant définie selon l'ordre des sommets de T^i_j) et nomme "complexe i-dimensionnel dans C^n" toute combinaison linéaire à coefficients entiers des simplexes T^i_j [39]. Ainsi Hopf emploie le mot "complexe" pour deux choses différentes, le complexe C^n étant un complexe au sens d'Alexander et les complexes i-dimensionnels dans C^n étant les i-chaînes au sens d'Alexander dans [1]. Il introduit l'application

[37] Sa preuve originelle fait l'objet d'un article précédent [18].

[38] La formule d'Euler-Poincaré est une généralisation de la célèbre formule d'Euler pour les polyèdres (S-A+F=2). Elle est notamment donnée par Alexander dans [1], p. 316. Selon les notations du premier paragraphe, cette formule est : $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i P^i = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \alpha^i$. Elle est au coeur du débat dans [23].

[39] "Für jedes i nennen wir die Linearformen in den T^i_j mit beliebigen ganzzahligen Koeffizienten "die in C^n liegenden i-dimensionalen Komplexe.""

de bord ρ par sa valeur sur les simplexes et en la prolongeant par linéarité, puis la notion de cycle (complexe annulant le bord). Il définit enfin un "diviseur de bord" ("Randteiler") comme un complexe dont un multiple est un bord et introduit les groupes commutatifs $\mathfrak{L}^i \supset \mathfrak{Z}^i \supset \overline{\mathfrak{R}^i} \supset \mathfrak{R}^i$, respectivement groupe des complexes, groupe des cycles, groupe des diviseurs de bord et groupe des bords i-dimensionnels (les trois derniers ensembles sont bien des groupes pour l'addition d'après les propriétés de ρ). Il en arrive ainsi à définir le i-ème groupe de Betti $\mathfrak{B}^i$ comme étant le quotient $\frac{\mathfrak{Z}^i}{\overline{\mathfrak{R}^i}}$, prouve qu'il s'agit d'un groupe (abélien) libre, et appelle i-ème nombre de Betti (noté p^i) le rang de $\mathfrak{B}^i$. Il montre enfin que ρ induit un isomorphisme entre $\frac{\mathfrak{L}^i}{\mathfrak{Z}^i}$ et $\mathfrak{R}^{i-1}$.

Dans le troisième paragraphe il ne reste plus à Hopf, avant de débuter la preuve, qu'à introduire la notion d'application simpliciale entre deux complexes n-dimensionnels C^n et K^n. Il s'agit d'une application de l'ensemble des sommets de C^n dans l'ensemble des sommets de K^n, telle que les images des sommets d'un simplexe de C^n soient les sommets d'un simplexe de K^n. Il montre que toute application simpliciale commute avec ρ puis en déduit que toute application simpliciale induit un homomorphisme entre chacun des groupes $\mathfrak{L}^i$, $\mathfrak{Z}^i$, $\overline{\mathfrak{R}^i}$, $\mathfrak{R}^i$ des complexes respectifs et, en utilisant les résultats des paragraphes précédents, établit la relation

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i S\mathfrak{B}^i = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i S\mathfrak{L}^i$$

comme généralisation de la formule d'Euler-Poincaré (S désignant la trace comme endomorphisme d'une application simpliciale f de C^n dans K^n, où C^n est une subdivision simpliciale de K^n). Il obtient cette dernière dans le cas particulier où f est l'identité de C^n dans lui-même.

Cette brève étude terminée se posent deux questions :

– en quoi l'influence d'Emmy Noether est-elle notable dans cet article de Hopf ?
– en quoi l'article de Hopf est-il original du point de vue de la naissance des groupes d'homologie (et notamment en quoi se distingue-t-il des articles de Vietoris et de Mayer) ?

Nous répondrons à la deuxième question au cours du prochain paragraphe mais nous pouvons d'ores et déjà répondre à la première question. Citons Hopf lui-même, dans son introduction : "Meinen ursprünglichen Beweis dieser Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel konnte ich im Verlauf einer im Sommer 1928 in Göttingen von mir gehaltenen Vorlesung durch Heranziehung gruppentheoretischer Begriffe unter dem Einfluss von Fräulein E.

Noether wesentlich durchsichtiger und einfacher gestalten."[40] L'idée d'introduire des concepts de théorie des groupes lui a donc été fournie par Emmy Noether. Ceci se traduit dans son article par un premier paragraphe totalement dédié à des propriétés de théorie des groupes et définissant les outils lui permettant de simplifier sa première preuve. L'efficacité de cette démarche est telle qu'il n'y a en fin de compte qu'un seul résultat intermédiaire non trivial qui ne provienne pas de propriétés sur les groupes (il s'agit du fait qu'une application simpliciale commute avec le bord). Il est d'ailleurs intéressant de noter que Hopf n'a pas introduit la notion de groupe d'homologie dans cet article mais celle de groupe de Betti, le groupe de Betti représentant la partie sans torsion du groupe d'homologie (en quotientant par le groupe des diviseurs de bord, non par le groupe des bords, la torsion est enlevée). Les groupes de Betti suffisent au but de l'article de Hopf et, qui plus est, lui permettent de rester dans le cadre simple des groupes abéliens libres de génération finie. Le caractère novateur de cet article de Hopf vient donc moins de la présence des groupes d'homologie que de l'utilisation systématique de la théorie des groupes et, corollairement, de l'abandon des matrices d'incidence.

D'autres témoignages nous permettent d'étayer les propos de Hopf en confirmant l'importance de Noether dans la genèse de l'article de 1928. Tout d'abord Hopf lui-même, bien des années plus tard, précise dans [21] (p. 12) ce qu'Emmy Noether lui a appris, et l'on peut se rendre compte que l'on retrouve les concepts formulés par Noether presque mot pour mot dans l'article [19] de Hopf[41], à la différence près que dans cet article Hopf considère les groupes de Betti, obtenus en quotientant les groupes des cycles par les groupes des diviseurs de bord, et non les groupes d'homologie, obtenus en quotientant les groupes des cycles par les groupes des bords. Alexandroff, topologue russe, ami de Hopf et de Noether et visiteur régulier de Göttingen de 1923 à 1929, explique quant à lui, dans son éloge d'Emmy Noether [2], que Noether a assisté à ses cours et à ceux de Hopf des étés 1926 et 1927, et insiste sur le fait qu'elle a *immédiatement* remarqué tout le bénéfice qu'il y aurait à introduire les groupes (de complexes, de cycles etc.) en topologie et proposé de définir les groupes de Betti ; Alexandroff ajoute qu'Hopf et lui se rallièrent

[40] "J'ai pu, lors d'un de mes cours de l'été 1928 à Göttingen, réécrire de manière bien plus limpide et plus simple ma preuve originelle de cette généralisation de la formule d'Euler-Poincaré en utilisant, sous l'influence d'Emmy Noether, des notions de théorie des groupes."

[41] "Es seien X^r die r-dimensionalen Kettengruppen, ∂ die durch die Randbildung bewirkten Homomorphismen $X^{r+1} \to X^r$; dann ist, wie man leicht an einem einzelnen Simplex verifiziert, $\partial\partial = 0$; das bedeutet : das Bild ∂X^{r+1} ist in dem Kern Z^r der Abbildung $\partial : X^r \to X^{r-1}$ enthalten ; die Faktorgruppe $H^r = Z^r/\partial X^{r+1}$ ist die r-te Homologiegruppe".

sans délai à ses propositions et que l'article [19] de Hopf est entièrement basé sur les remarques de Noether[42]. Alexandroff va donc peut-être encore plus loin que Hopf en attribuant absolument toutes les nouveautés conceptuelles de [19] à Emmy Noether et ce, du fait de remarques datant de 1926 ou 1927. A ce propos, Alexandroff affirme aussi dans son autobiographie [3] se souvenir d'un repas chez Brouwer en décembre 1925 au cours duquel Emmy Noether aurait donné la définition des groupes de Betti de complexes[43]. Qu'Alexandroff lui-même donne deux versions différentes d'un seul et même évènement (la définition des groupes de Betti par Noether) peut sembler étrange et explique très certainement l'aspect "légendaire" mentionné par Mac Lane de la conception des groupes de Betti. Nous pouvons cependant proposer une explication vraisemblable de l'émergence de cette notion.

La courte note d'Emmy Noether, étudiée dans le deuxième paragraphe, laisse imaginer assez aisément que Noether avait déjà en sa possession l'idée de la définition des groupes de Betti au début de l'année 1925. L'article [19] de Hopf met en oeuvre les idées en germe dans la note de Noether : laisser de côté les modules sur les anneaux principaux et placer à la base de la théorie des complexes la notion de groupe. Il peut paraître surprenant que Noether ait réfléchi à un tel sujet sans avoir pour autant semblé s'intéresser à la topologie. Mais les visites régulières d'Alexandroff à Göttingen à partir de mai 1923 furent accompagnées de nombreuses discussions avec Noether, qui sembla montrer un réel intérêt et en sut vraisemblablement dès l'été 1924 assez sur la topologie et les travaux d'Alexandroff pour commencer à bâtir sa théorie des groupes de Betti[44].

Dès lors, on peut penser qu'Emmy Noether a répété ses remarques à plusieurs reprises, le temps que certains topologues se persuadent de leur intérêt. Peu d'occasions se sont présentées à elle vu que la topologie n'était

[42]cf. [2] p. 9 : "In the summers 1926 and 1927 she went to the courses on topology which Hopf and I gave at Göttingen. (...) she immediately observed that it would be worthwile to study directly the groups of algebraic complexes and cycles (...), she suggested immediately defining the Betti group (...) she noticed how simple and transparent the proof of Euler-Poincaré formula becomes if one makes systematic use of the concept of a Betti group."

[43]"In the middle of December Emmy Noether came to spend a month in Blaricum. (...) I remember a dinner at Brouwer's in her honour during which she explained the definition of the Betti groups of complexes, which spread around quickly and completely transformed the whole of topology", [3] p. 324.

[44]cf. [3] p. 299 : "We [Alexandroff et Urysohn] constantly met Emmy Noether on a relaxed basis and very often talked to her, about topics both in ideal theory, and in our work, which had caught her interest at once." et p. 316 : "We were constantly meeting Emmy Noether on her famous walks, which were first called algebraic and after our arrival came to be called topological algebraic."

pas un sujet d'étude de Göttingen. Il y eut d'abord le séjour[45] chez Brouwer lors des vacances de Noël 1925, avec une présence importante de topologues (Alexandroff, Brouwer, Menger, Vietoris... [3] p. 323), puis les visites de Hopf à Göttingen à partir de l'été 1926 et les cours donnés dès lors par Alexandroff et Hopf furent pour Noether l'occasion d'appliquer ses idées en situation. On comprend mieux ainsi que Noether ait pu faire des remarques *immédiatement* - comme le fait remarquer de façon insistante Alexandroff dans [2] - à l'occasion de leurs cours vu qu'elle ne faisait que leur expliquer des concepts qu'elle avait déjà formulés depuis plus d'un an. Alexandroff les avait manifestement déjà entendues mais probablement sans en sentir alors toute la portée tandis que pour Hopf il s'agissait d'une totale découverte.

6 Approches conceptuelles sous-jacentes aux articles de Vietoris, Mayer et Hopf

On a pu relever de fortes distinctions lors de l'étude, au cours des paragraphes 3, 4 et 5, des articles de Vietoris, Mayer et Hopf. Ainsi l'article [37] de Vietoris, première occurrence dans la littérature mathématique de la notion de groupe d'homologie, a pour idée directrice la généralisation en dimension finie quelconque des concepts de Brouwer dans [8] sur l'homotopie. De ce fait l'intuition géométrique mène les réflexions et les matrices d'incidence sont abandonnées car ne pouvant décrire les objets considérés par Vietoris. Les nombres de Betti et de torsion n'ayant en général pas d'existence pour les objets considérés par Vietoris, il leur faut un substitut, et la notion de groupe d'homologie s'impose alors naturellement. Il n'y a cependant aucune utilisation d'outils de théorie des groupes, et même une présence très faible d'une terminologie propre aux groupes, l'usage de la notion de quotient, par exemple, étant inexistant.

L'influence de Brouwer sur l'article [37] de Vietoris étant prépondérante, on peut mentionner quelques aspects du travail de Brouwer afin d'expliquer la démarche de Vietoris et ce qui la distingue de celle de Noether et de Hopf.

L. E. J. Brouwer écrivit entre 1910 et 1913 une série d'articles qui firent date autant par les résultats qu'ils contiennent que par la nouveauté des méthodes mises en œuvre - qui purent être réemployées efficacement par la suite par d'autres topologues. Il fut notamment le premier à considérer ce qu'on appelle maintenant des applications homotopes (cf. [9]), d'ailleurs présentes dans l'article [8] mentionné plus haut. Dans ses travaux, l'importance de

[45] cf. note 43 plus haut.

l'intuition géométrique et même de l'approche géométrique est absolument manifeste, et confirmée par ses propres paroles : "It was my main intention to demonstrate that it is possible and desirable to give priority to the geometrical method also in parts of mathematics where this has not yet been realized."[46]

Cet attachement à un traitement géométrique des problèmes mathématiques ainsi qu'une méconnaissance ou un désintéressement volontaire ont fait que Brouwer ne s'est pas consacré à l'homologie alors même que les outils qu'il avait introduits ont ensuite permis un traitement satisfaisant de questions soulevées par Poincaré[47]. En fait, Brouwer s'est peu à peu détourné de la topologie à compter de 1913 du fait tout d'abord de la première guerre mondiale puis surtout de son intérêt grandissant pour les questions des fondations des mathématiques et le développement de l'intuitionnisme. Ce n'est finalement qu'en 1923 que Brouwer retrouva - mais seulement pour un temps et surtout indirectement, en dirigeant les travaux de Menger, Alexandroff et Vietoris - un attrait supérieur à la topologie, relancé, semble-t-il, par les résultats d'un jeune topologue russe prometteur - mais décédé peu après - Pavel Urysohn.

Il est difficile d'évaluer ce que Brouwer connaissait et pensait des travaux d'Emmy Noether. On sait cependant qu'il l'a rencontrée en 1912 et l'a très probablement revue plusieurs fois par la suite car il se rendait régulièrement à Göttingen[48]. En outre, l'invitation à séjourner chez lui lors de l'hiver 1925 lancée à Noether indique qu'ils étaient certainement en bons termes.

Etant donné les propos de Noether (cf. note 38) lors du repas chez Brouwer, il peut paraître assez surprenant que les méthodes développées par Vietoris et celles encouragées par Noether soient si éloignées l'une de l'autre. On peut l'expliquer notamment par la fidélité de Brouwer à ses propres conceptions : l'esprit de l'intuitionnisme et celui de l'algèbre moderne sont pour le moins inconciliables. En outre, le travail de Brouwer au début des années 1910 montre bien que l'idée de l'introduction de concepts algébriques lui était alors étrangère[49] et si l'on part du principe que l'activité de Brouwer fut assez

[46]cf. [7] p. 120.

[47]Selon Dirk van Dalen, dans [11] p. 956 : "Brouwer stubbornly stuck to his geometrical approach, either unaware of the potential of homology as initiated by Poincaré, or just preferring the geometric attack." Voir aussi le jugement de Dieudonné, cf. [13] p. 161 : "nobody understands why Brouwer never mentionned these papers [of Poincaré], nor tried to apply his fundamental discovery of simplicial approximation to bring to life the theorems guessed by Poincaré (as Alexander did a little later)."

[48]cf. [14] p. XIII : "In the summer of 1909 he seems to have met Hilbert, and from 1911 onwards he made regular visits to Göttingen."

[49]L'article [8] mentionné dans le troisième paragraphe, notamment, se prêtait parfaitement à l'introduction du langage des groupes, chaque lacet ainsi que tous ceux qui lui sont

éloignée de la topologie à partir de 1913 et que l'algèbre n'a jamais été un de ses domaines de recherche, on peut aisément comprendre son manque de sensibilité aux innovations de Noether.

L'article [28] de Mayer se trouve lui aussi assez éloigné des idées de Noether et de la concrétisation qu'en a donnée Hopf. Son principal intérêt est de fournir la première axiomatisation des groupes d'homologie, affirmant ainsi l'importance de ce concept. Mais, par certains traits, cet article est un retour en arrière par rapport aux avancées de Vietoris. Les groupes d'homologie définis par Mayer sont moins généraux que ceux considérés par Vietoris car il considère uniquement des complexes de type fini. Alors que l'outil matriciel avait été, certes probablement par obligation, abandonné par Vietoris, il est chez Mayer essentiel. Enfin, l'utilisation de méthodes de théorie des groupes est à peu près totalement absente.

Les motivations de Vietoris et de Mayer sont donc bien différentes de celles de Hopf et Noether. Noether procède à une réévaluation de l'ordonnancement des notions et considère que la théorie des groupes doit être placée à la base de la théorie des complexes et doit ainsi fournir les outils permettant de remplacer dans les calculs les matrices d'incidence peu commodes. L'article [19] de Hopf concrétise les idées de Noether : il isole les définitions et propriétés propres à la théorie des groupes qui lui seront utiles et définit les complexes de façon à pouvoir utiliser facilement les concepts ainsi introduits. Il démontre ainsi l'intérêt pratique de l'introduction de la théorie des groupes en topologie, alors qu'elle pouvait jusqu'alors être seulement considérée comme un choix esthétique ou philosophique.

7 Conclusion

Nous allons effectuer une brève synthèse des faits mentionnés jusqu'alors, qui sera ainsi l'occasion de signaler quelques traits historiques de la genèse de la notion de groupe d'homologie dont la portée excède cette genèse proprement dite : les oppositions entre différentes traditions mathématiques, leur influence sur l'appréciation du travail d'autrui, les problèmes de diffusion du savoir mathématique et les échanges informels entre membres de la communauté mathématique sont autant de facettes de la communication des idées en mathématique dont certains traits caractéristiques sont bien illustrés par la confrontation entre Noether et Vietoris.

homotopes représentant un seul et même élément du groupe fondamental, mais il en est pourtant totalement absent.

Comme cela a déjà été dit, c'est probablement lors de ses discussions avec Alexandroff au cours des rituelles "promenades de topologie algébrique" à Göttingen qu'Emmy Noether a développé une nouvelle conception de la topologie, modifiant son caractère combinatoire en un caractère algébrique, en plaçant la théorie des groupes à la base des investigations, et a défini les groupes de Betti, d'homologie, etc. Outre sa conférence de janvier 1925 devant la Göttinger Mathematische Gesellschaft, où ses idées n'étaient peut-être pas encore totalement formulées, elle a fait part de ses conceptions nouvelles lors du repas de décembre 1925 chez Brouwer puis lors des cours d'Alexandroff et Hopf à Göttingen à partir de l'été 1926. L'aspect légendaire de la conception des groupes d'homologie mentionné au début de l'article provient vraisemblablement d'une confusion entre la première définition "publique" qu'elle en a donnée chez Brouwer, et la première fois où elle l'a communiquée à Hopf.

Vietoris est le premier à avoir donné une définition noir sur blanc des groupes d'homologie et Mayer, toujours avant l'article [19] de Hopf, l'a reprise dans le cadre moins général des complexes de type fini, en proposant une axiomatisation et en affirmant l'intérêt. Quoique Vietoris affirme n'avoir pas été au courant des développements de Noether en topologie algébrique (et confirme la même ignorance de la part de Mayer), sa présence lors du repas chez Brouwer (et même probablement lors de l'ensemble du séjour de Noether) remet en cause cette affirmation. Cependant, à part peut-être en ce qui concerne la notion de groupe d'homologie elle-même, on a pu voir que Noether n'a pas eu d'influence sur le travail de Vietoris, qui est resté fidèle aux idées de Brouwer. Ceci illustre, entre autres, la résistance palpable à l'époque à l'introduction de concepts abstraits, dans l'esprit de l'algèbre moderne, en topologie. A quoi bon en effet introduire la notion de groupe d'homologie avant cet article de Vietoris vu que les complexes jusqu'alors considérés avaient pour groupes d'homologie des groupes abéliens de type fini, donc caractérisés par leurs nombres de Betti et nombres de torsion ? Pourquoi introduire des structures comme les groupes ou les modules, si ce ne sont que des abstractions dépourvues d'utilité ? Ces interrogations, rarement explicites d'ailleurs, ont certainement freiné l'apparition de concepts algébriques en topologie.

Nous possédons également des traces de l'appréciation des travaux de Vietoris et de Mayer par Alexandroff et Hopf. L'article [37] de Vietoris et l'article [28] de Mayer ont été relus respectivement par Alexandroff et Hopf pour le Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik (de 1927 et 1929 respectivement). Le commentaire d'Alexandroff au sujet de l'article de Vietoris est surprenant : il ne fait que mentionner la généralisation des notions de l'article [8] de Brouwer et le résultat principal de l'article sans même relever l'introduction des groupes d'homologie. Hopf semble, lui, trouver plus d'intérêt dans le travail de Mayer. Il note que les complexes y sont considérés de façon abstraite et que les ensembles de complexes, de cycles, de classes d'homologie, y sont considérés comme des groupes abéliens, mais il ne souligne pas l'introduction des groupes d'homologie. Hopf considère donc la présence de la théorie des groupes dans l'article de Mayer comme un fait important, bien plus que la seule définition des groupes d'homologie. L'introduction des groupes d'homologie dans l'article de Mayer semble d'ailleurs l'avoir tellement peu marqué qu'il écrira en 1964 dans [21], p. 12 : "ich weiss nicht einmal, ob der Begriff der "Homologiegruppe" schon irgendwo schwarz auf weiss in der Literatur vorgekommen war. Ich selbst habe sie zum ersten Mal in meiner Note "Eine Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel" (...) benutzt."[50], ce qu'il nuancera en note de [19] dans ses Selecta : "Die obige Note ist wohl die erste Publikation gewesen, in der die heute geläufige, von EMMY NOETHER stammende gruppentheoretische Auffassung der Homologietheorie zur Geltung kommt"[51].

Si l'on a pu rapprocher les articles de Vietoris, Mayer, Hopf et les idées de Noether, c'est parce qu'ils avaient un point commun : la présence des groupes d'homologie (ou de Betti). Mais nous avons pu constater que les démarches de Vietoris, de Mayer et de Hopf sont bien distinctes. La notion de groupe d'homologie a donc cela de remarquable qu'elle a été conçue quasi simultanément par deux courants de pensée mathématique distincts. Nous avons d'ailleurs déjà souligné les difficultés de communication entre les tenants respectifs de ces deux visions différentes.

Aux difficultés de communication inhérentes à l'opposition de deux traditions mathématiques s'est ajoutée une difficulté d'ordre matériel, due au fait que les articles n'accédaient pas toujours à une grande diffusion par-delà les frontières. Ainsi on ne peut être d'accord avec Jean Dieudonné qui, s'étonnant de la précocité de l'article de Mayer, pense, en dépit du fait qu'aucune référence à Noether n'y est faite, qu'"à cette époque l'esprit de 'l'algèbre moderne' s'était propagé à plusieurs universités allemandes grâce aux efforts de E. Artin, R. Baer, R. Brauer, H. Hasse, W. Krull and J. Von Neumann"[52]

[50]"je ne sais pas si la notion de "groupe d'homologie" était déjà apparue noir sur blanc dans la littérature. Je l'ai moi-même employée pour la première fois dans ma note "Eine Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel"".

[51]"La note ci-dessus est bien la première publication dans laquelle le point de vue de la théorie des groupes, aujourd'hui familier, est mis en valeur", cf. [20] p. 183. Par cette phrase, Hopf ne se prononce plus comme c'était le cas dans la citation précédente sur la première apparition de la notion de groupe d'homologie mais souligne le fait que son article [19] est le premier à privilégier et à utiliser efficacement les concepts de théorie des groupes en topologie, ce qu'on ne peut contester.

[52]"by that time the spirit of 'modern algebra' had spread to many German universities under the efforts of E. Artin, R. Baer, R. Brauer, H. Hasse, W. Krull and J. Von Neumann",

et qu'"il n'est pas impossible qu'il ait aussi atteint Vienne"[53] ? Ce point de vue est en effet contesté par Mac Lane [27] et surtout par Vietoris lui-même (cf. [16] pp. 61-62) qui souligne au contraire la difficulté que les résultats de Vienne avaient à atteindre l'Allemagne et le fait que ni lui ni Mayer n'étaient au courant des idées de Noether sur la topologie algébrique[54].

Au vu de ce qui a déjà été dit, l'importance du rôle des échanges informels dans l'adoption progressive des concepts de théorie des groupes en topologie est indéniable. En effet, les discussions lors des "promenades de topologie algébrique" entre Noether et Alexandroff et les remarques de Noether lors des cours de Hopf et d'Alexandroff sont autant de moments cruciaux dans l'émergence de cette nouvelle conception de la topologie.

Enfin, pour que l'introduction de concepts algébriques en topologie devienne plus qu'un simple choix de terminologie[55] et surmonte peu à peu le scepticisme, exprimé notamment par Weyl encore en 1931 au sujet des méthodes abstraites[56], une étape décisive est franchie par Hopf au travers de l'article de 1928. Ayant repris sa propre démonstration de la généralisation de la formule d'Euler-Poincaré et pouvant ainsi constater mieux que quiconque l'économie de moyens et le gain conceptuel offerts par les conseils d'Emmy Noether, il a écrit un article qui est une illustration de l'utilité du langage des groupes en homologie, et marque probablement le premier succès de la topologie algébrique.

---

[12] p. 6.

[53] "it is not unlikely that it could also have reached Vienna", [12] p. 6.

[54] Cette dernière affirmation est comme nous l'avons vu, à nuancer, mais néanmoins nous n'avons trouvé aucune trace d'une rencontre entre Noether et Vietoris, du moins au cours de la période qui nous intéresse, si ce n'est en décembre 1925, chez Brouwer.

[55] On fait référence par cette remarque aux propos de Lefschetz en 1930 : [24] : "Indeed everything that follows in this section can be, and frequently is, translated into the theory of groups. It is of course a mere question of a different terminology".

[56] cité par Alexandroff dans [2] p. 4 : "I should not pass over in silence the fact that today the feeling among mathematicians is beginning to spread that the fertility of these abstracting methods is approaching exhaustion."

Références

[1] J. W. Alexander, *Combinatorial analysis situs*, Trans. Amer. Math. Soc. **28** (1926), 301-329.

[2] P. S. Alexandroff, *In Memory of Emmy Noether, Address delivered by the President of the Moscow Mathematical Society P. S. Alexandrov on September 5. 1935*, EMMY NOETHER, Gesammelte Abhandlungen, Collected Papers, Springer-Verlag, 1983, 1-11.

[3] P.S. Alexandroff, *Pages from an autobiography*, Russian Math. Surveys **34** (6) (1979), 267-302 ; **35** (3) (1980), 315-358.

[4] P. S. Alexandroff et H. Hopf, *Topologie*, Springer, Berlin, 1935.

[5] N. Bourbaki, *Algèbre*, Chap. 6 et 7, 2° edition, Hermann, 1964.

[6] E. Breitenberger, *Johann Benedikt Listing*, History of topology, 909-924, North-Holland, Amsterdam, 1999.

[7] L. E. J. Brouwer, *The Nature of Geometry*, Collected Works, Vol. 1. Philosophy and Foundations of Mathematics, 112-120, North-Holland, Amsterdam (1975).

[8] L. E. J. Brouwer, *Beweis der Invarianz der geschlossenen Kurve*, Mathematische Annalen **72** (1912), 422-425.

[9] L. E. J. Brouwer, *Continuous one-one transformations of surfaces in themselves*, Proceedings of Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen **15** (1912), 352-360. Egalement dans *Collected works*, Vol. 2, 527-535.

[10] L. Corry, *Modern Algebra and the rise of Mathematical Structures*, Birkhaüser, 1996.

[11] D. van Dalen, *Luitzen Egbertus Jan Brouwer. 27.2.1881 Overschie - 2.12.1966 Blaricum*, History of topology, 947-964, North-Holland, Amsterdam, 1999.

[12] J. Dieudonné, *Emmy Noether and algebraic topology*, Journal of Pure and Applied Algebra **31** (1984), 5-6.

[13] J. Dieudonné, *A History of Algebraic and Differential Topology 1900-1960*, Birkhaüser, 1989.

[14] H. Freudenthal et A. Heyting, *The Life of L. E. J. Brouwer (27 February 1881 - 2 December 1966)*, Brouwer Collected Works, Vol 2., X-XV.

[15] F. Hausdorff, *Gesammelte Werke*, Band II, Springer, 2002.

[16] F. Hirzebruch, *Emmy Noether and Topology*, The heritage of Emmy Noether (Ramat-Gan, 1996), 57-65, Israel Math. Conf. Proc., 12, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1999.

[17] O. Hölder, *Zurückführung einer beliebigen algebraischen Gleichung auf eine Kette von Gleichungen*, Mathematische Annalen **34** (1889), 26-56.

[18] H. Hopf, *A New Proof of the Lefschetz Formula on Invariant Points*, Proc. Nat. Acad. of Sciences USA **14** (1928), 149-153.

[19] H. Hopf, *Eine Verallgemeinerung der Euler-Poincaréschen Formel*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse (1928), 127-136.

[20] H. Hopf, *Selecta* , Springer-Verlag, 1964.

[21] H. Hopf, *Einige persönliche Erinnerungen aus der Vorgeschichte der heutigen Topologie*, Colloque de Topologie, CBRM Bruxelles (1966), 9-20.

[22] L. Kronecker, *Auseinandersetzung einiger Eigenschaften der Klassenzahl idealer complexer Zahlen* [Gelesen in der Akademie der Wissenschaften am 1. Decbr 1870.] ; *Leopold Kronecker's Werke* 1, Chelsea, 1968.

[23] I. Lakatos, *Preuves et réfutations*, Paris, Hermann, 1984.

[24] S. Lefschetz, *Topology*, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1930).

[25] J. B. Listing, *Vorstudien zur Topologie*, Göttinger Studien (1847), Göttingen 1848.

[26] S. Mac Lane, *Origins of the cohomology of groups*, Enseignement Mathématique (2) **24** (1978), no. 1-2, 1-29.

[27] S. Mac Lane, *Topology becomes algebraic with Vietoris and Noether*, Journal of Pure and Applied Algebra **39** (1986), 305-307.

[28] W. Mayer, *Über abstrakte Topologie*, Monatschefte für Mathematik und Physik **36** (1929), 1-42, 219-258.

[29] J. Nielsen, *Die Isomorphismen der allgemeinen, unendlichen Gruppe mit zwei Erzeugenden*, Mathematische Annalen **78** (1917), 385-397.

[30] J. Nielsen, *Über die Isomorphismen unendlicher Gruppen ohne relation*, Mathematische Annalen **79** (1918), 269-272.

[31] E. Noether, *Idealtheorie in Ringbereichen*, Math. Annalen **83** (1921), 24-66.

[32] E. Noether, *Ableitung der Elementarteilertheorie aus der Gruppentheorie*, Nachrichten der 27 Januar 1925, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (2. Abteilung) **34** (1926), 104.

[33] E. Noether, *Hyperkomplexe Grössen und Darstellungstheorie*, Math. Zeitschr. **30** (1929), 641-692.

[34] E. Scholz, *The Concept of Manifold, 1850-1950*, History of Topology, 25-64, North-Holland, Amsterdam, 1999.

[35] E. Steinitz, *Algebraische Theorie der Körpern*, JRAM **137** (1910), 167-309.

[36] L. Vietoris, *Über den höheren Zusammenhang von Kompakten Räume und eine Klasse von Abbildungen, welche ihn ungeändert lässt*, Proc. Amsterdam **29** (1926), 1008-1013.

[37] L. Vietoris, *Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen*, Mathematische Annalen **97** (1927), 454-472.

[38] L. Vietoris, *Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (2. Abt.) **36** (1927), 28-29.

[39] B. L. van der Waerden, *Moderne Algebra* 2, Berlin, 1931.

[40] B. L. van der Waerden, *Nachruf auf Emmy Noether*, Mathematische Annalen **111** (1935), 469-476.

[41] B.L. van der Waerden, *A History of Algebra, From al-Khwarizmi to Emmy Noether*, Springer, Berlin, 1985.

[42] H. Weber, *Die allgemeinen Grundlagen der Galois'schen Gleichungstheorie*, Mathematische Annalen **43** (1893), 521-549.

[43] H. Weber, *Lehrbuch der Algebra*, Vol. 1 (1895) ; Vol. 2 (1896), Braunschweig.

[44] C.A. Weibel, *History of Homological Algebra*, History of topology, 797-836, North-Holland, Amsterdam, 1999.

[45] H. Weyl, *Emmy Noether*, Scripta Mathematica **3** (1935), 201-220 ; *Hermann Weyl's Gesammelte Abhandlungen* Vol. 3, Springer, 424-444.