可積分系と代数幾何学の入り口

井上 玲 (鈴鹿医療科学大学)

まずはじめに…

私の研究分野 — 数理物理学 … 数学と物理学の境界領域

代数幾何や表現論の手法を使った可積分系の研究

経緯 —

だいぶ昔… 東京大学理学系研究科物理学専攻 卒業

その後…

東京大学総合文化研究科物理教室 学振 PD

京都大学数理解析研究所 研究機関研究員

東京大学理学系研究科物理学専攻 CREST 研究員

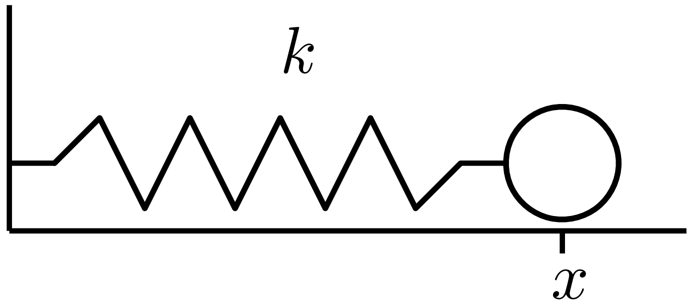
鈴鹿医療科学大学 数学教員

… 現在に至る

1　可積分系とは？

- **線形バネ**

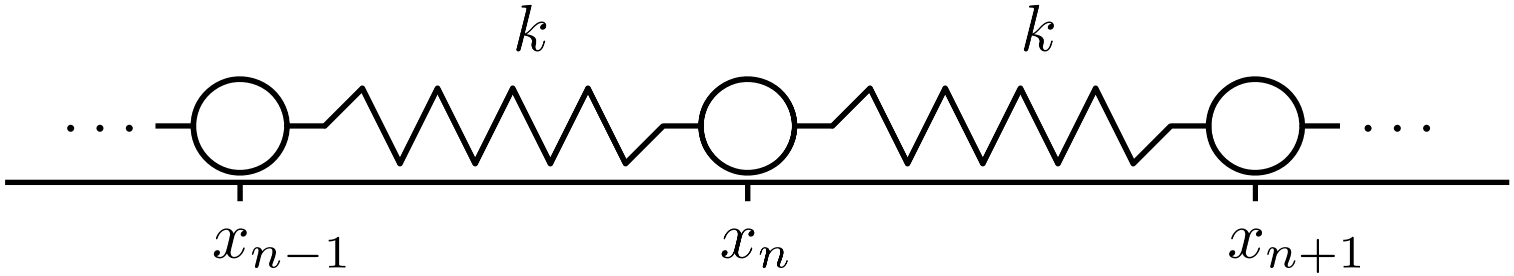
$$(1) \quad x'' = -kx \quad (k > 0)$$



$$x(t) = A\sin(wt + \theta) \quad (w^2 = k): \text{ 一般解}$$

A, θ は初期値 $x(0), x'(0)$ から決まる

(2) $x_n'' = -k(x_{n+1} - x_n) + k(x_n - x_{n-1})$　$(p$: **周期**, $x_{n+p} = x_n)$



$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ \vdots \\ x_p'' \end{pmatrix} = k \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & & -1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{対角化可能}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \textbf{一般解 (三角関数)}$$

可積分系 (積分可能系):
四則演算，微分，不定積分，逆関数を取る，代数方程式を解く操作を有限回合成して一般解を求められる系．
(微分方程式を解く $=$ 積分する)

線形微分方程式を解くのは易しい．

可積分な**非線形**微分方程式はあるか？

- **戸田格子方程式** [**戸田** 1960'] — **可積分な非線形バネ**

$$\text{(3)}\ \ x_n'' = \mathrm{e}^{-k(x_{n+1}-x_n)} - \mathrm{e}^{-k(x_n-x_{n-1})} \quad (p : \textbf{周期},\ x_{n+p} = x_n)$$

$$\stackrel{k\ll 1}{\Longrightarrow}\ \text{(2)}\ \ x_n'' = -k(x_{n+1}-x_n) + k(x_n - x_{n-1})$$

どうやって解くのか？ どんな解を持つのか？

- **保存量と等位集合**

視点を変えて初めの系 (1) **を見直してみよう**.

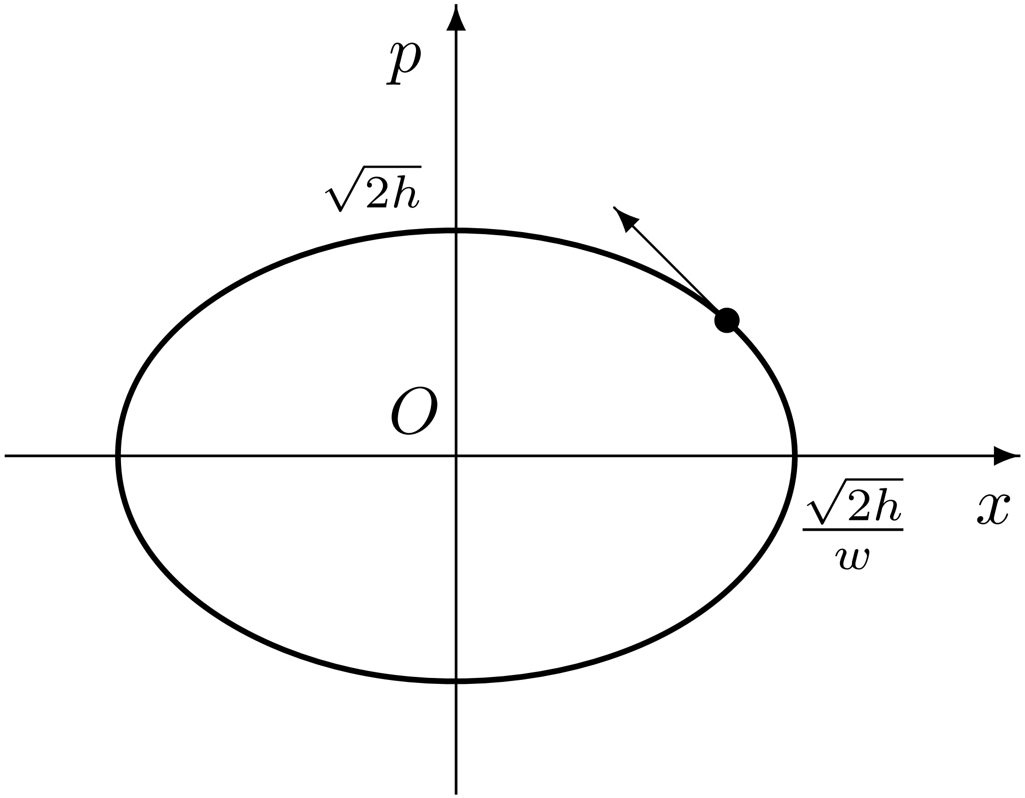
$$x'' = -kx \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} x' = p \\ p' = -kx \end{cases}$$

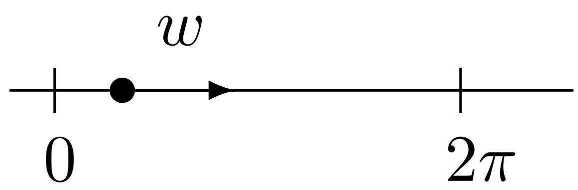
$$\mathcal{M} = \{(x,p)\} \simeq \mathbb{R}^2 \quad : \quad \textbf{相空間}$$

$$H(x,p) = \frac{1}{2}(p^2 + kx^2) \quad : \quad \textbf{保存量}\ (H' = 0)$$

$$\mathcal{M}_h = \{(x,p) \in \mathcal{M} \mid H(x,p) = h\} \quad : \quad \textbf{等位集合}$$

$h > 0$ **のとき** $\mathcal{M}_h$ **は** xp **平面内の楕円**:





解は楕円上の周期関数: $(x, p) = \sqrt{2h}\left(\frac{1}{w}\sin(wt+\theta), \cos(wt+\theta)\right)$

角変数で見た時間発展は $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ **上の直線運動になる**

2　戸田格子

- **準備 — 変数変換** $a_n = x_n', b_n = \mathrm{e}^{x_{n+1}-x_n}$ **で書き換える**:

$$x_n'' = \mathrm{e}^{x_{n+1}-x_n} - \mathrm{e}^{x_n - x_{n-1}} \longrightarrow \begin{cases} a_n' = b_n - b_{n-1} \\ b_n' = b_n(a_{n+1} - a_n) \end{cases}$$

$$\mathcal{M} = \{m = (a_n, b_n)_{n=1,\ldots,p} \mid \prod_{n=1}^{p} b_n = 1\} \subset \mathbb{C}^{2p}$$: **相空間**

戸田格子はたくさんの保存量を持っている:

$$c_0(m), c_1(m), \ldots, c_{p-1}(m), d(m) = \prod_{n=1}^{p} b_n$$

$\mathcal{M}$ **上の独立な** $(p+1)$ **個の多項式関数**

$p=2$ の場合

$$\mathcal{M} = \{m = (a_1, a_2, b_1, b_2) \mid b_1 b_2 = 1\} \subset \mathbb{C}^4$$

$$\begin{cases} c_1(m) = a_1 + a_2, \quad c_0(m) = a_1 a_2 - b_1 - b_2 \\ d(m) = b_1 b_2 (= 1) \end{cases} \quad : \ \text{保存量}$$

$c = (c_0, c_1) \in \mathbb{C}^2$ **を固定する**.

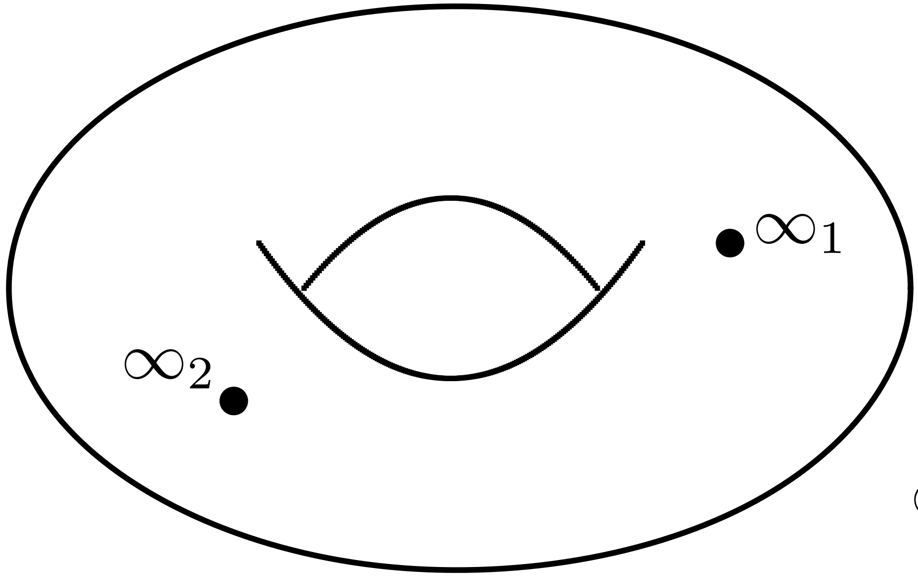
(a) $\mathcal{M}_c = \{m \in \mathcal{M} \mid c_0(m) = c_0, c_1(m) = c_1\}$: **等位集合**

(b) **保存量を使って** a_2, b_1 **を消去する**:

$$b_2^2 + b_2(a_1^2 - a_1 c_1 + c_0) + 1 = 0 \quad (a_2 = c_1 - a_1,\ b_1 = \frac{1}{b_2})$$

$\gamma_c :\ y^2 + y(x^2 + x c_1 + c_0) + 1 = 0$ **が定める (完備) 代数曲線とすると** $(x, y) = (-a_1, b_2) \in \gamma_c$

γ_c **は滑らかなとき楕円曲線になる**:



$\infty_1, \infty_2 \in \gamma_c$: **無限遠点**

$$(-a_1, b_2) \in \gamma_c \setminus \{\infty_1, \infty_2\} \;\Rightarrow\; \mathcal{M}_c \simeq \gamma_c \setminus \{\infty_1, \infty_2\}$$

解は $\gamma_c \setminus \{\infty_1, \infty_2\}$ **上の正則関数で書ける**

$p \geq 2$ の場合

$c = (c_0, \cdots, c_{p-1}) \in \mathbb{C}^p$ を固定する.

(a) $\mathcal{M}_c = \{m \in \mathcal{M} \mid c_i(m) = c_i\}$: 等位集合

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{M}_c = (2p-1) - p = p - 1$$

(b) $\gamma_c \ : y^2 + y(x^p + c_{p-1}x^{p-1} + \cdots + c_0) + 1 = 0$

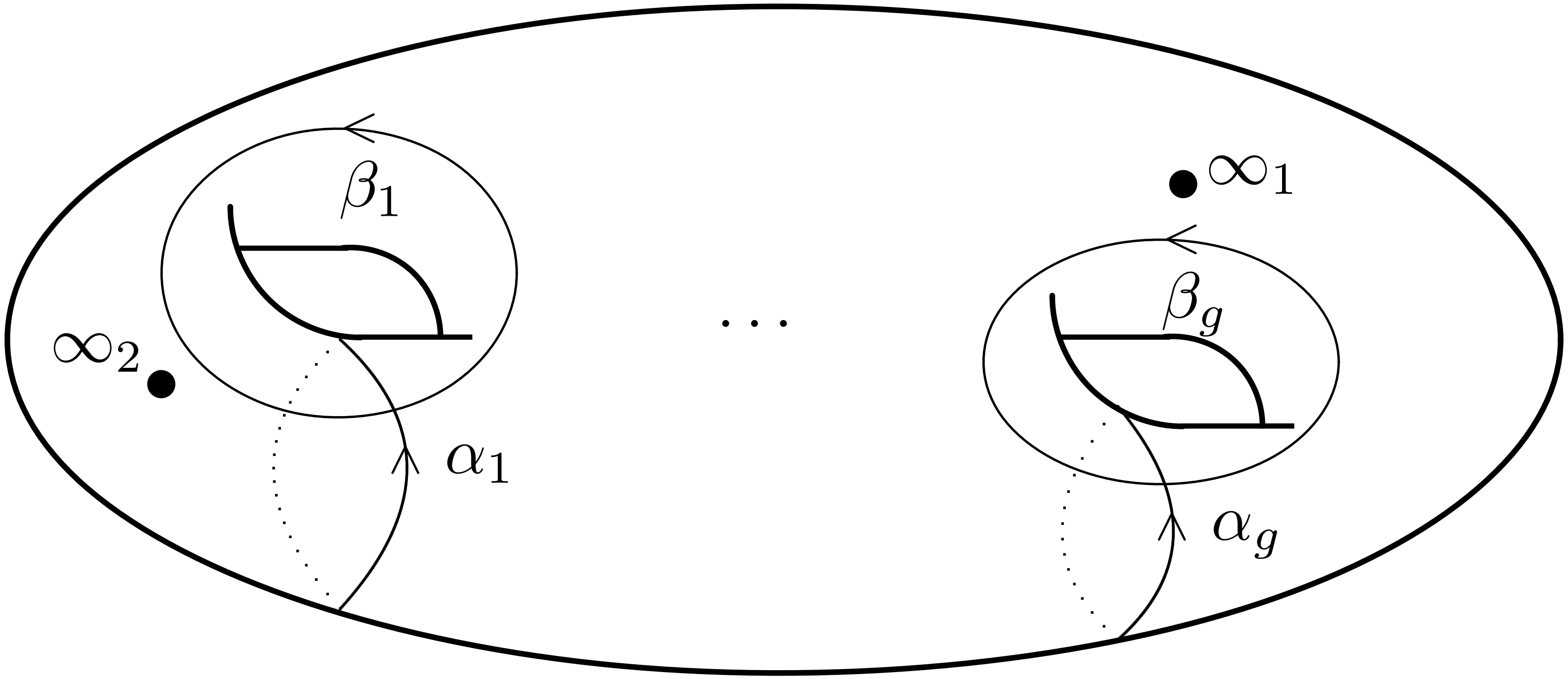
が定める (完備) 代数曲線 : スペクトル曲線

$p = 2$ では $\mathcal{M}_c \simeq \gamma_c \setminus \{\infty_1, \infty_2\}$.

$p > 2$ のとき γ_c を使って等位集合 $\mathcal{M}_c$ を記述できるか？

- **代数幾何の準備**

γ_c **は滑らかなとき超楕円曲線と呼ばれる複素** 1 **次元の多様体**:



種数 (穴の数) : $g = p - 1$

γ_c **上のサイクル** : $\alpha_k, \beta_k \ (k = 1, \ldots, g)$

γ_c 上のサイクル $\alpha_k, \beta_k \ (k = 1, \ldots, g)$

$$\downarrow$$

周期行列：$\Omega_c \in M_g(\mathbb{C})$

γ_c の Jacobi **多様体** — g 次元複素トーラス

$$\mathrm{Jac}(\gamma_c) = \mathbb{C}^g / (\mathbb{Z}^g + \Omega_c \mathbb{Z}^g)$$

Riemann **テータ関数** — $z \in \mathbb{C}^g$ の擬周期関数

$$\theta(z; \Omega_c) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \mathrm{e}^{\pi\sqrt{-1} n \cdot (\Omega_c n + 2z)}$$

$$\begin{cases} \theta(z + m) = \theta(z) \\ \theta(z + \Omega_c m) = \mathrm{e}^{-\pi\sqrt{-1} m \cdot (\Omega_c m + 2z)} \theta(z) \end{cases} \qquad (m \in \mathbb{Z}^g)$$

- **解と等位集合**

$$\begin{cases} a_n(t) = a^* - \dfrac{d}{dt}\log \dfrac{\theta(-\eta n - vt + \delta)}{\theta(-\eta(n+1) - vt + \delta)} \\ b_n(t) = b_n^* \dfrac{\theta(-\eta n - vt + \delta)\theta(-\eta(n+2) - vt + \delta)}{\theta(-\eta(n+1) - vt + \delta)^2} \end{cases}$$

$\eta, v, \delta \in \mathbb{C}^g, a^*, b_n^* \in \mathbb{C}$ **は初期値から決まる**

- **この解は** " $\mathcal{M}_c \leftrightarrow \mathrm{Jac}(\gamma_c)(= \mathbb{C}^g/(\mathbb{Z}^g + \mathbb{Z}^g\Omega_c))$ " **を与える**
- $\theta(-\eta n - vt + \delta) = 0 \ \Rightarrow \ a_{n-1}(t), a_n(t), b_{n-1}(t)$ **が発散する**

定理 [**伊達-田中**, van Moerbeke-Mumford **など** 1970']

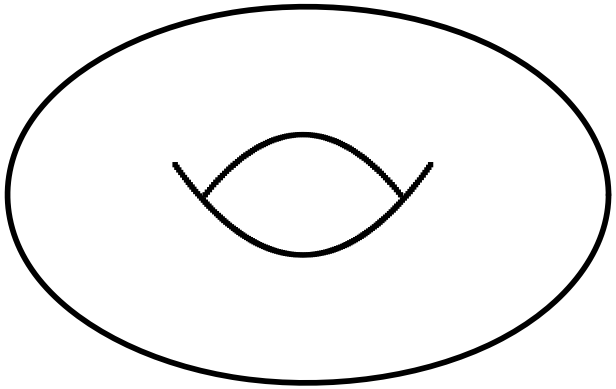
(i) $\mathcal{M}_c \simeq \mathrm{Jac}(\gamma_c) \setminus \{a_n(t), b_n(t)$ **のどれかが発散する部分** $\}$

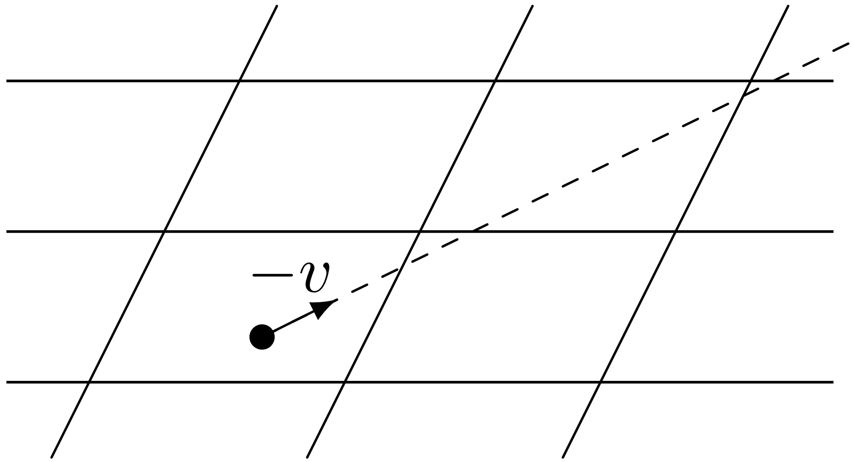
(ii) $\mathcal{M}_c$ **上の時間発展は** $\mathrm{Jac}(\gamma_c)$ **上の速度** $-v$ **の直線運動になる**

再び $p=2$ の場合

周期行列 $\Omega_c = \tau \in \mathbb{C}$

$\gamma_c \simeq \mathrm{Jac}(\gamma_c) = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \tau\mathbb{Z})$

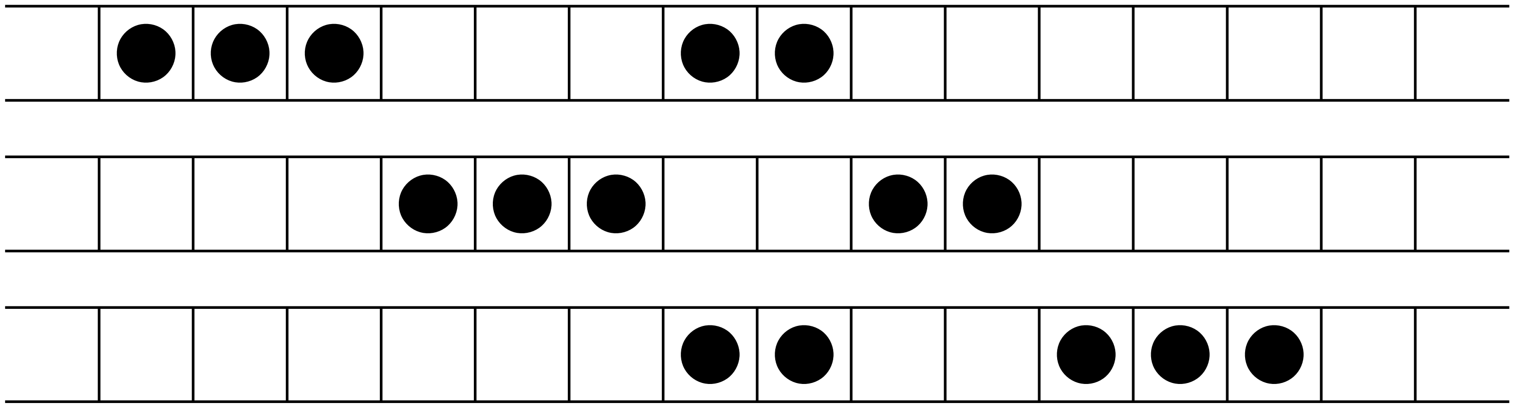




等位集合 $\mathcal{M}_c \simeq \gamma_c \setminus \{\infty_1, \infty_2\} \simeq \mathrm{Jac}(\gamma_c) \setminus \{2\ \textbf{点}\}$

3　箱玉系

- **箱玉系** [高橋-薩摩 1990]



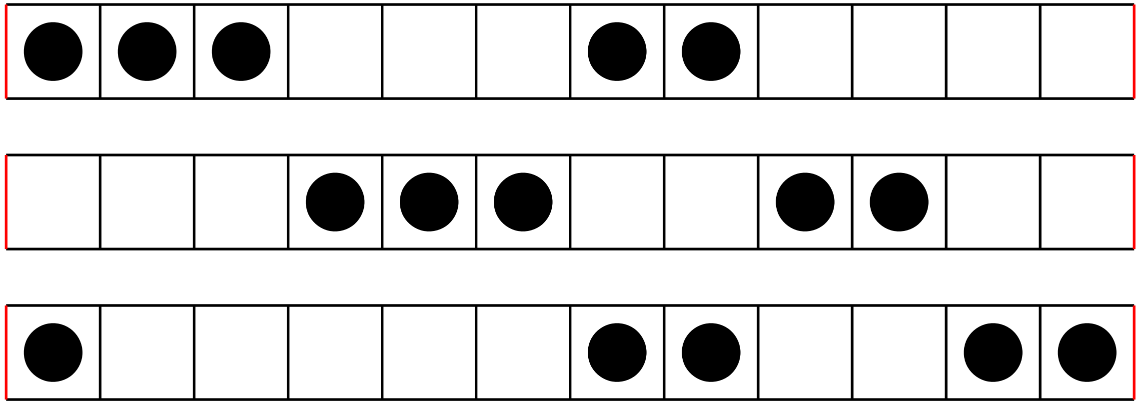
$$\downarrow$$

$$
\begin{array}{lll}
t = & 0 & \cdots 011100011000000000000 \cdots \\
 & 1 & \cdots 000011100110000000000 \cdots \\
 & 2 & \cdots 000000011001110000000 \cdots \\
 & 3 & \cdots 000000000110001110000 \cdots \\
 & 4 & \cdots 000000000001100001110 \cdots
\end{array}
$$

ソリトン = **玉の連なり**

ソリトンの速さ = **連なりの長さ**

- **周期箱玉系** [由良-時弘 2002]



$$\downarrow$$

$$\begin{array}{lll} t = & 0 & 111000110000 \\ & 1 & 000111001100 \\ & 2 & 100000110011 \\ & 3 & 011100001100 \\ & 4 & 000011100011 \end{array}$$

L : **周期**, $\quad B_L = \{0,1\}^{\times L}$: **相空間**

$T_B : B_L \to B_L$: **時間発展ルール**

周期箱玉系の保存量: **ソリトンが g 個あるとき**

$\lambda = (\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_g) \in (\mathbb{Z}_{>0})^g$: **長さ g の分割**

先の例 $(L = 12)$ **では**...

$$t = \begin{array}{ll} 0 & 111000110000 \\ 1 & 000111001100 \\ 2 & 100000110011 \end{array} \qquad g = 2,\ \lambda = (2,3)$$

$\lambda \in (\mathbb{Z}_{>0})^g$ **を固定する**.

(a) $B_{L,\lambda} \subset B_L$: **等位集合**

(b) **スペクトル曲線は？**

- **組み合せ的方法による解法**

Kerov-Kirillov-Reshetikhin (KKR) **対応** — **組み合せ的な写像**

$\{b \in B_L\} \overset{\text{単射}}{\longrightarrow} \{(\lambda, \mu) \mid \lambda :$ **長さ** g **の分割**$,\ \mu \in \mathbb{Z}^g\}_{g \in \mathbb{Z}_{>0}}$

$$\begin{array}{cccc} & & b & \mapsto & (\lambda, \mu) \\ t = & 0 & 111000110000 & & ((2,3),(4,5)) \\ & 1 & 000111001100 & & ((2,3),(2,0)) \\ & 2 & 100000110011 & & ((2,3),(4,3)) \\ & 3 & 011100001100 & & ((2,3),(2,-2)) \\ & 4 & 000011100011 & & ((2,3),(4,1)) \end{array}$$

λ **は** T_B **の保存量なので，** $B_{L,\lambda} \overset{\text{単射}}{\longrightarrow} \mathbb{Z}^g$ **が定義できる**

写像 $B_{L,\lambda} \to J_{L,\lambda} = \mathbb{R}^g / A\mathbb{Z}^g$ **を考える**

$A \in M_g(\mathbb{Z})$: L **と** λ **から決まる周期行列**

$$
\begin{array}{llccccc}
 & & B_{12,(2,3)} & \longrightarrow & J_{12,(2,3)} = \mathbb{R}^2/A\mathbb{Z}^2, & A = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \\
 & & b & \longmapsto & \mu & \\
t = & 0 & 111000110000 & & (4,5) & \\
 & 1 & 000111001100 & & (2,0) & \sim (6,8) \mathrm{mod} A \\
 & 2 & 100000110011 & & (4,3) & \\
 & 3 & 011100001100 & & (2,-2) & \sim (6,6) \mathrm{mod} A \\
 & 4 & 000011100011 & & (4,1) &
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ $J_{12,(2,3)}$ **上の速度** $\lambda = (2,3)$ **の直線運動**

定理 [国場-高木-竹野内 2006]

$\lambda = (\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_g) \in (\mathbb{Z}_{>0})^g$ のとき

$J_{L,\lambda} = \mathbb{R}^g / A\mathbb{Z}^g$: g 次元実トーラス

($A \in M_g(\mathbb{Z})$: L と λ から決まる)

(i) KKR 対応は次の全単射を与える:

$$B_{L,\lambda} \xrightarrow{1:1} J_{L,\lambda} \cap \mathbb{Z}^g;\ b \mapsto \mu$$

(ii) $B_{L,\lambda}$ 上の時間発展は $J_{L,\lambda}$ 上の速度 λ の直線運動になる

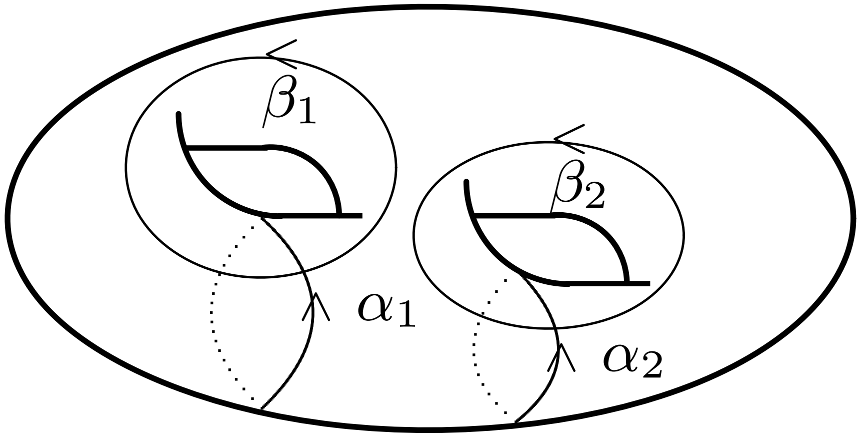
- **戸田格子との比較**

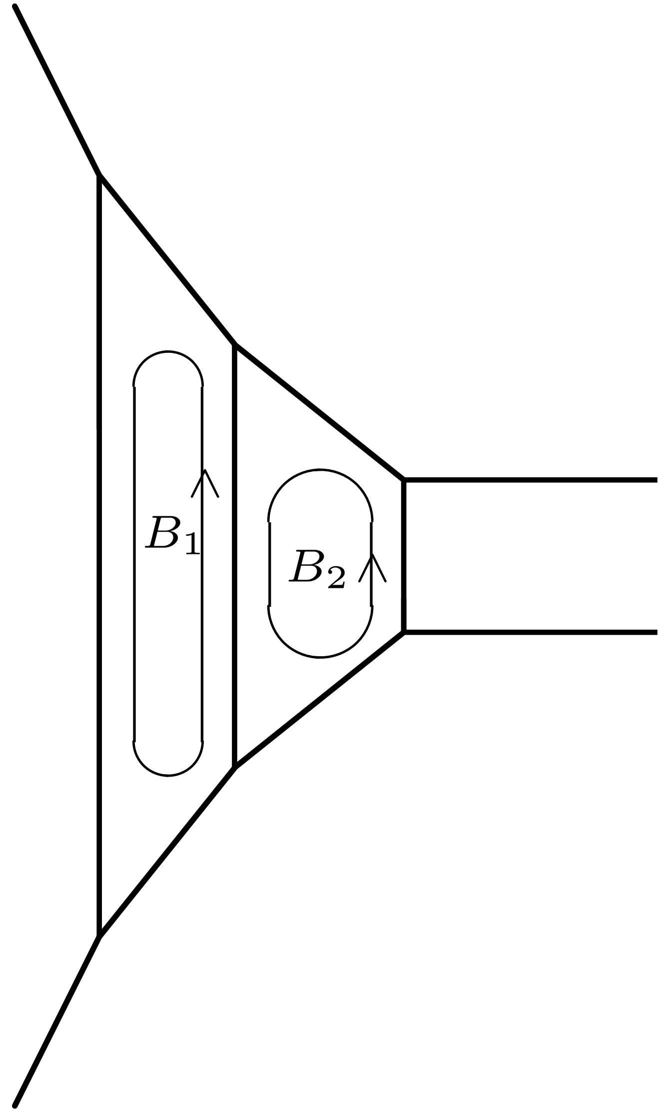
	等位集合	**スペクトル曲線**	**時間発展の線形化**	**解**
戸田格子	$\mathcal{M}_c$	γ_c	$\mathrm{Jac}(\gamma_c)$	$\theta(z;\Omega_c)$
箱玉系	$B_{L,\lambda}$		$J_{L,\lambda}$	

箱玉系の解はどんな関数で書けるのか？

γ_c **に対応するものはあるのか？**

- **トロピカル幾何 — グラフ上の組み合せ的代数幾何 — との関係**





トロピカル曲線 — 実空間内のグラフ

[Mikhalkin-Zharkov 2006]

$K \in M_g(\mathbb{R})$: **周期行列 (正定値実対称行列)**

トロピカル Jacobi 多様体 — g 次元実トーラス:

$$J(K) = \mathbb{R}^g / \mathbb{Z}^g K$$

トロピカルテータ関数 — $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^g$ の擬周期関数:

$$\Theta(\mathbf{Z}; K) = \min_{\mathbf{m} \in \mathbb{Z}^g} \mathbf{m} \cdot \left(\frac{1}{2} \mathbf{m} K + \mathbf{Z} \right)$$

(Cf.) Riemann **テータ関数** $\theta(z; \Omega) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} \mathrm{e}^{\pi \sqrt{-1} m \cdot (m\Omega + 2z)}$

行列 A **は正定値実対称行列**

$\Rightarrow J_{L,\lambda} = \mathbb{R}^g/\mathbb{Z}^g A$ **はトロピカル** Jacobi **多様体** $J(A)$ **である**

定理(続き) [**国場-坂本** 2006]

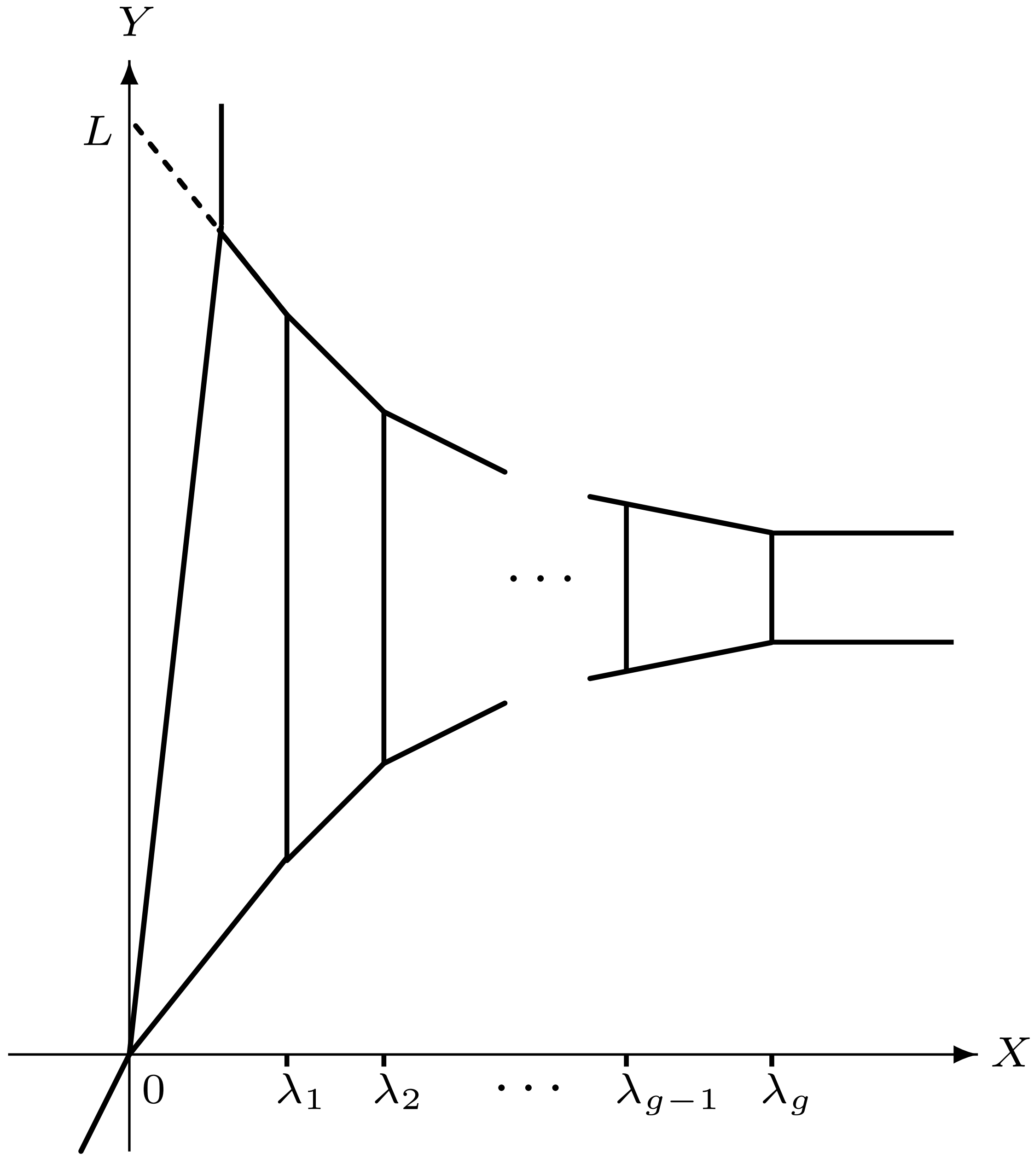
(iii) $\Theta(\mathbf{Z}; A)$ **は** $B_{L,\lambda}$ **上の時間発展** T_B **の解を与える**.

$$x(k,t) = \Theta(\mathbf{Z}_k^t) - \Theta(\mathbf{Z}_{k-1}^t) + \Theta(\mathbf{Z}_k^{t+1}) - \Theta(\mathbf{Z}_{k-1}^{t+1}) \in \{0,1\}$$

$$\mathbf{Z}_k^t = \mathbf{Z}_0 - k\mathbf{h}_1 + t\mathbf{h}_\infty,$$

$$\mathbf{h}_1 = (1,\cdots,1),\ \mathbf{h}_\infty = (\lambda_1,\cdots,\lambda_g) \in \mathbb{Z}^g$$

周期行列 A を与えるトロピカル曲線の例 — $\Gamma_{L,\lambda}$



おわりに

まとめると…

	等位集合	スペクトル曲線	時間発展の線形化	解
戸田格子	$\mathcal{M}_c$	γ_c	$\mathrm{Jac}(\gamma_c)$	$\theta(z;\Omega_c)$
箱玉系	$B_{L,\lambda}$	$\Gamma_{L,\lambda}$	$J_{L,\lambda}$	$\Theta(\mathbf{Z};K)$
線形バネ	$\mathcal{M}_h$	$H(x,p)=h$	$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$	三角関数

$*$ 戸田格子は微分幾何，素粒子物理とも関係がある

$*$ 箱玉系は量子群とも関係がある

$*$ 他にもいろいろな可積分系があり，代数幾何，微分幾何，トポロジー，群や環の表現論 … 様々な数学と関係している

数学と物理の境界で

面白いことをやってみよう！