2010 前期

確率論 III（４年）・確率論概論 III（大学院）　講義メモ

洞　彰人　（大学院多元数理科学研究科）

PART I　測度と積分の基礎

1　可測関数列の収束の階層

***Definition* 1.1**　可算 (完全, σ-) 加法族, 部分可算加法族, 可測空間, 測度空間, Borel(ボレル) 集合族, 有界測度, 準 (σ-) 有界測度

▶ $(M, \mathcal{F}, \mu)$： 測度空間,　$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$： Borel 可測空間

***Definition* 1.2**　可測関数列の概収束 (μ-a.e.), 測度収束 (in μ), 平均収束 (in $L^1(\mu)$).

Theorem 1.3 (Lebesgue の収束定理)　$\lim_{n\to\infty} f_n = f$ μ-a.e. かつ

$$\exists g \in L^1(\mu) \quad \text{such that} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in M,\ |f_n(x)| \leqq g(x) \qquad (\text{一様可積分}) \tag{1.1}$$

ならば, $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in $L^1(\mu)$.

Proposition 1.4　μ が有界測度のとき, 可測関数列が概収束すれば測度収束.

***Example* 1.5**　μ が有界測度でないときの Proposition 1.4 の反例. つまり, 概収束するが測度収束しない例.

***Example* 1.6**　Proposition 1.4 の逆の反例. つまり, 測度収束するが概収束しない例.

Proposition 1.7　可測関数列が平均収束すれば測度収束.

Proposition 1.8 (Borel–Cantelli の補題)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty \quad \text{ならば} \quad \mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Big) = 0.$$

Proposition 1.9　可測関数列が測度収束すれば, 概収束する部分列が存在.

Lemma 1.10　位相空間内の点列 $\{x_n\}$ が x に収束するための必要十分条件は, $\{x_n\}$ の任意の部分列 $\{x_{n_k}\}$ に対して x に収束するそのまた部分列 $\{x_{n_{k_l}}\}$ が存在すること.

Proposition 1.11 (Lebesgue の収束定理)　Theorem 1.3 で, μ-a.e. を in μ に替えても OK.

Proposition 1.12　μ が有界測度のとき, $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in μ かつ (1.1) より弱い一様可積分性

$$\lim_{a\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{x\in M \,|\, |f_n(x)|>a\}} |f_n(x)|\mu(dx) = 0 \tag{1.2}$$

が成り立てば, $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ in $L^1(\mu)$.

***Definition* 1.13**　μ が有界測度のとき, 測度収束の位相を記述する距離空間 $L^0(M,\mathcal{F},\mu)$:

$$d(f,g)=\int_M \phi(|f(x)-g(x)|)\mu(dx)$$

(ϕ は $\mathbb{R}_{\geqq 0}$ 上で有界連続非減少, 0 の近傍で真に増加, $\phi(0)=0$, $\phi(x)/x$ が $\mathbb{R}_{\geqq 0}$ 上で非増加).

Proposition 1.14　(1) d は距離.　(2) 可測関数列について, 距離 d に関する収束 $\Longleftrightarrow$ 測度収束.

***Remark* 1.15**　可測関数列の概収束は何らかの位相に関する収束ではない.

2　測度の拡張定理

集合上に測度を構成したり, その測度がある特定の性質をみたすことを示したりするのに, 測度の拡張定理（有限加法性から可算加法性への拡張）が必要になる.

▶ 部分集合族 $\mathcal{A}$ に対して, $\mathcal{A}$ が生成する (を含む最小の) 可算加法族 $\sigma[\mathcal{A}]$

***Definition* 2.1** 集合 M の部分集合族 $\mathcal{P}$ が

(i) $M\in\mathcal{P}$

(ii) $A,B\in\mathcal{P}\Longrightarrow A\cap B\in\mathcal{P}$

をみたすとき, $\mathcal{P}$ を乗法族という. また, 部分集合族 $\mathcal{D}$ が

(I) $M\in\mathcal{D}$

(II) $A,B\in\mathcal{D}, A\subset B\Longrightarrow B\setminus A\in\mathcal{D}$

(III) $A_n\in\mathcal{D}\ (n\in\mathbb{N}), A_n\nearrow A$ (すなわち $A_n\subset A_{n+1}$ かつ $A=\bigcup_{n=1}^\infty A_n$) $\Longrightarrow A\in\mathcal{D}$

をみたすとき, $\mathcal{D}$ を Dynkin 族という. 部分集合族 $\mathcal{A}$ を含む最小の Dynkin 族を $\delta[\mathcal{A}]$ で表す.

Lemma 2.2 集合 M の部分集合族 $\mathcal{B}$ に対し，　乗法族かつ Dynkin 族 $\Longleftrightarrow$ 可算加法族.

Theorem 2.3 (Dynkin 族定理)　乗法族 $\mathcal{P}$ を含む Dynkin 族は $\sigma[\mathcal{P}]$ も含む.

Corollary 2.4 乗法族 $\mathcal{P}$ に対し，　$\delta[\mathcal{P}]=\sigma[\mathcal{P}]$.

Theorem 2.5 (Carathéodory の外測度を使う方法) $A\in 2^M$ (M の部分集合全体) $\longmapsto \nu(A)\in[0,\infty]$ が

(i) $\nu(\varnothing)=0$

(ii) 単調性　$A_1\subset A_2\Longrightarrow \nu(A_1)\leqq\nu(A_2)$

(iii) 可算劣加法性　$\nu(\bigcup_{k=1}^\infty A_k)\leqq\sum_{k=1}^\infty \nu(A_k)$

をみたせば, ν に関して可測な集合全体 $\mathcal{B}$ は可算加法族であり, ν を $\mathcal{B}$ 上に制限すれば測度になる.

ただし, B が ν に関して可測であることの定義は

$$\nu(B\cap A)+\nu(B^c\cap A)=\nu(A),\qquad \forall A\subset M.$$

Theorem 2.6 (Hopf の拡張定理) M の有限加法族 $\mathcal{A}$ 上の有限加法的有界測度 μ について次の条件が同値.

(ア) $\mathcal{B}=\sigma[\mathcal{A}]$ 上の有界測度 $\tilde{\mu}$ に拡張可能

(イ) $\bigcap_{k=1}^\infty A_k=\varnothing$ なる $\mathcal{A}$ の任意の非増加列 $A_1\supset A_2\supset\cdots$ に対して $\lim_{k\to\infty}\mu(A_k)=0$ が成立.

このとき, $\mathcal{B}$ の距離 $d(B_1,B_2)=\tilde{\mu}(B_1\triangle B_2)$ に関して $\mathcal{A}$ は稠密になり, μ の $\mathcal{B}$ への拡張は一意的である.

3 Hahn 分解, Jordan 分解

***Definition* 3.1** 可測空間 $(M, \mathcal{F})$ 上の実測度 ($\mathbb{R}$-値測度, 符号つき測度) $\Phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$

Theorem 3.2 (実測度に関する Hahn 分解) 可測空間 $(M, \mathcal{F})$ 上の実測度 Φ に対し,

- $\Phi(A \cap P) \geqq 0, \quad A \in \mathcal{F} \qquad$ (P が Φ に関する正値集合)
- $\Phi(A \cap P^c) \leqq 0, \quad A \in \mathcal{F} \qquad$ (P^c が Φ に関する負値集合).

をみたす $P \in \mathcal{F}$ が存在. $M = P \sqcup P^c$ を Φ に関する M の Hahn 分解という.

▶ $|\Phi|(A) = \sup\{\sum_i |\Phi(A_i)| \mid A = \bigsqcup_i A_i$ (有限和) $\}, \quad A \in \mathcal{F}$

Lemma 3.3 実測度 Φ に関する Hahn 分解 $M = P \sqcup P^c$ において

(1) $|\Phi|(A) = \Phi(A \cap P) - \Phi(A \cap P^c), \quad A \in \mathcal{F}$.

(2) $|\Phi|$ は有界測度で, $|\Phi(A)| \leqq |\Phi|(A), \quad A \in \mathcal{F}$. $|\Phi|$ は Φ の全変動と呼ばれる.

Proposition 3.4 (Hahn 分解の一意性) 実測度 Φ に関する M の Hahn 分解において

$$M = P_1 \sqcup P_1^c = P_2 \sqcup P_2^c \quad \Longrightarrow \quad |\Phi|(P_1 \triangle P_2) = |\Phi|(P_1^c \triangle P_2^c) = 0.$$

ただし, $\triangle$ は集合の対称差: $A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$.

Proposition 3.5 実測度は最大値・最小値をもつ:

$$\Phi(P) = \sup\{\Phi(A) \mid A \in \mathcal{F}\}, \quad \Phi(P^c) = \inf\{\Phi(A) \mid A \in \mathcal{F}\}.$$

***Definition* 3.6 (実測度の Jordan 分解)** 実測度 Φ に関する Hahn 分解 $P \sqcup P^c$ のもとで

$$\Phi^+(B) = \Phi(B \cap P), \quad \Phi^-(B) = -\Phi(B \cap P^c), \qquad B \in \mathcal{F}$$

とおくと, Φ^+, Φ^- は有界測度であり, $\Phi = \Phi^+ - \Phi^-$, $|\Phi| = \Phi^+ + \Phi^-$.

Proposition 3.7 (Jordan 分解の一意性) 実測度 Φ に関する Hahn 分解 $M = P_1 \sqcup P_1^c = P_2 \sqcup P_2^c$ に応じて $\Phi = \Phi_1^+ - \Phi_1^- = \Phi_2^+ - \Phi_2^-$ とすると, $\Phi_1^+ = \Phi_2^+$, $\Phi_1^- = \Phi_2^-$.

4 Radon–Nikodym の定理

***Definition* 4.1** 測度の絶対連続性 ($\nu \lesssim \mu$), 特異性 ($\nu \perp \mu$), 同値性 ($\nu \sim \mu$). 実測度 Φ と測度 μ の絶対連続性 ($\Phi \lesssim \mu$).

Lemma 4.2 測度 μ に関する測度 ν の分解

$$\nu = \nu_1 + \nu_2 \qquad \text{where} \qquad \nu_1 \lesssim \mu, \quad \nu_2 \perp \mu \tag{4.1}$$

は存在すれば一意的.

Lemma 4.3 任意の準有界測度 ν に対し, ν と同値な有界測度 ν' が存在.

Proposition 4.4 ν が準有界ならば, ν の分解 (4.1) が存在.

Lemma 4.5 測度 μ と非負値可測関数 f に対して

$$\nu(B) = \int_B f(x)\mu(dx), \qquad B \in \mathcal{F}$$

とおくと, ν は測度で $\nu \lesssim \mu$ (このとき $\nu(dx) = f(x)\mu(dx)$ または $\nu = f\mu$ と略記). さらに結合法則が成立する: $(gf)\mu = g(f\mu)$.

Theorem 4.6 (Radon–Nikodym の定理) 測度 μ, ν がともに準有界で絶対連続性 $\nu \lesssim \mu$ が成り立てば,

$$\nu(B) = \int_B f(x)\mu(dx), \qquad B \in \mathcal{F}$$

をみたす非負値可測関数 f が μ-a.e. に一意的に存在. この f を Radon–Nikodym 導関数 (または密度) という.

Lemma 4.7 実測度 Φ の Jordan 分解 $\Phi = \Phi^+ - \Phi^-$ において, $\Phi \lesssim \mu$ ならば $\Phi^+ \lesssim \mu$ かつ $\Phi^- \lesssim \mu$.

Theorem 4.8 実測度 Φ と準有界測度 μ についても $\Phi \lesssim \mu$ ならば Radon–Nikodym の定理が成り立ち, Radon–Nikodym 導関数 $\in L^1(\mu; \mathbb{R})$.

***Example* 4.9** Radon–Nikodym の定理で準有界性の仮定をはずした場合の反例の考察. 極端な場合として, 個数測度や 0 と ∞ しか値をとらない測度などを考えてみるとよい.

***Remark* 4.10** この節の結果の多くは「最大法」(かくかくしかじかの性質をみたす最大の可測集合や可測関数の存在を確認すること) によって示される.

***Remark* 4.11** Radon–Nikodym の定理が登場する例

- 実測度全体のなす空間の完備性
- L^p の双対空間を関数空間として実現 ($1 \leqq p < \infty$)
- Lebesgue 積分版の微積分の基本定理
- 条件つき平均の定義
- $\cdots$

5 Riesz–Markov の表現定理

***Definition* 5.1**

- 位相空間 E の Borel 集合族を $\mathcal{B}(E)$ とするとき, 可測空間 $(E, \mathcal{B}(E))$ 上の測度を E 上の Borel 測度という.
- $C(E) = C(E;\mathbb{C})$：E 上の $\mathbb{C}$-値連続関数全体, $\qquad C(E;\mathbb{R})$：E 上の $\mathbb{R}$-値連続関数全体.
- $C_c(E) = \{f \in C(E) \,|\, \mathrm{supp} f$ がコンパクト $\}$, $\quad C_c(E;\mathbb{R}) = \{f \in C(E;\mathbb{R}) \,|\, \mathrm{supp} f$ がコンパクト $\}$
  (E 上の関数 f のサポート：$\mathrm{supp} f = \overline{\{x \in E \,|\, f(x) \neq 0\}}$).
- $C(E)$(または $C(E;\mathbb{R})$) 上の汎関数 ψ について
  - 線型: $\psi(\alpha f + \beta g) = \alpha\psi(f) + \beta\psi(g), \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ (または $\mathbb{R}$),
  - 正値: $f \geqq 0 \implies \psi(f) \geqq 0$.

***Definition* 5.2** 位相空間 E 上の測度 μ が正則であるとは, 次の 2 条件をみたすこと

- 内正則性： 任意の開集合 O に対して, $\mu(O) = \sup\{\mu(K) \,|\, K \subset O, K$ はコンパクト集合 $\}$
- 外正則性： 任意の Borel 集合 B に対して, $\mu(B) = \inf\{\mu(O) \,|\, O \supset B, O$ は開集合 $\}$.

コンパクト集合には有限値を与える正則な Borel 測度を Radon 測度と呼ぶ.

Lemma 5.3 コンパクト距離空間 K 上の有界 Borel 測度は必然的に正則, したがって有界 Radon 測度.

Lemma 5.4 局所コンパクト空間 X の中で, コンパクト集合 $C \subset$ 開集合 O とする.
(1) $C \subset G \subset \overline{G} \subset O$ かつ $\overline{G}$ がコンパクトになるような開集合 G が存在する.
(2) X 上の連続関数 f で, $0 \leqq f \leqq 1$, C 上では $f = 1$, $\mathrm{supp} f \subset O$ となるものが存在する.

***Remark* 5.5** X がコンパクト距離空間ならば, この補題の証明はやさしい.

Theorem 5.6 (Riesz–Markov の表現定理) K をコンパクト距離空間とする. $C(K;\mathbb{R})$ 上の正値線形汎関数 ψ と K 上の有界 Borel 測度 μ とは, 次の関係によって全単射的に対応する:

$$\psi(f) = \int_K f(x)\mu(dx), \qquad f \in C(K;\mathbb{R}). \tag{5.1}$$

***Remark* 5.7** 土台の空間がコンパクトでない場合や距離づけ可能でない場合は, もっと事情が複雑になる.

Theorem 5.8 (Riesz–Markov の表現定理) $C_c(\mathbb{R};\mathbb{R})$ 上の正値線形汎関数 ψ と $\mathbb{R}$ 上の Radon 測度 μ とは全単射的に対応する:

$$\psi(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(dx), \qquad f \in C_c(\mathbb{R};\mathbb{R}). \tag{5.2}$$

***Remark* 5.9** $\mathbb{C}$-値関数の空間で考えるときは, まず汎関数 ψ を $\mathbb{R}$-値関数のなす実線型部分空間に制限して測度 μ をとらえる. $f = \mathrm{Re} f + i\mathrm{Im} f$ として, $\mathrm{Re} f$ と $\mathrm{Im} f$ に (5.1) や (5.2) を適用すれば, 同じ式が f に対しても成り立つことがわかる.

レポート問題１

問題 [**1**] 実数全体 $\mathbb{R}$ に可測構造として Borel 集合族を考える.

(1) 集合 M 上の実数値関数の族 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ が与えられたとき, f_α をすべて可測にする M の最小の可算加法族を記述 (つまり, 存在と一意性を証明) しなさい. ただし, A は任意濃度の添字集合.

(2) $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}$ への第 k 射影を f_k とおく: $f_k(x_1,\cdots,x_n)=x_k$. このとき, f_k をすべて可測にする $\mathbb{R}^n$ の最小の可算加法族は $\mathbb{R}^n$ の Borel 集合族に一致することを証明しなさい.

問題 [**2**] 集合 M 上に２つの同値でない位相があってそれぞれに関する Borel 集合族が一致するということがありうる. このような場合の例を挙げなさい.

問題 [**3**] 講義中に述べた定理, 命題, 補題などで, 仮定を適当に緩めた場合の反例について考察しなさい. なるべく意味のある例を挙げてください.

▶ **注 意**　提出は講義時に限定 (レポート提出ボックスは設けません). 提出期限は６月１０日 (木) です.

PART II　確率論入門

6　基本用語

***Definition* 6.1**

- 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$
- 確率変数 $X : \Omega \longrightarrow S$,　ただし $(S, \mathcal{S})$ は可測空間.
- 確率変数 $X : \Omega \longrightarrow S$ による P の像測度 $X_* P = P^X$ を X の分布という.
- 実確率変数 $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ の分布関数 $F(x) = P^X((-\infty, x]) = P(X \leqq x)$
- 実確率変数 $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ の分布 P^X が Lebesgue 測度に関して絶対連続のとき, その Radon–Nikodym 導関数 f_X を X の密度関数という.
- 確率変数 $X, Y : \Omega \longrightarrow S$ の結合分布（同時分布）$(X, Y)_* P = P^{(X,Y)}$ $(S \times S$ 上の確率測度$)$.
- 実確率変数 $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ の平均（期待値）$E[X]$:

$$E[X] = \int_\Omega X(\omega) P(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} x P^X(dx).$$

ただし, X が可積分 $(E[|X|] < \infty)$ のとき.

Theorem 6.2 (変数変換, 置換積分)　確率変数 $X : \Omega \longrightarrow S$, 可測関数 $f : S \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqq 0}$ に対して

$$E[f(X)] = \int_S f(x) P^X(dx).$$

***Remark* 6.3**　適当な可積分条件のもと, f は $\mathbb{C}$-値関数に拡張される.

Proposition 6.4　非負値確率変数 Z に対して

$$E[Z] = \int_0^\infty P(Z > t) dt.$$

7　分布族の位相, Prokhorov の定理

***Definition* 7.1**　距離空間における用語の復習：　相対コンパクト, 全有界, 完備, 可分, $\cdots$

Lemma 7.2　$\mathbb{R}$ は通常の距離に関して全有界でないが, 位相を変えずに全有界にするような $\mathbb{R}$ 上の距離がある. 一般に, (S, d) が可分距離空間ならば, $(S, \tilde{d})$ が全有界で (S, d) と同相になる距離 $\tilde{d}$ が存在する.

Lemma 7.3　K がコンパクト距離空間ならば, Banach 空間 $C(K)$ は可分である.

Lemma 7.4 (1 の分割)　K の有限開被覆 $K = U_1 \cup \cdots \cup U_n$ に対して, 次をみたす連続関数列 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n \in C(K)$ が存在する.

(i) $0 \leqq \varphi_k(x) \leqq 1$,　$\mathrm{supp}\varphi_k \subset U_k$　$(k = 1, \ldots, n)$,

(ii) $\varphi_1(x) + \cdots + \varphi_n(x) = 1$　$(x \in K)$.

***Example* 7.5** 数列空間 ℓ^∞ は sup-ノルムに関して可分でない.

***Definition* 7.6** 距離空間 S 上の確率測度の列の弱収束 $\mu_n \longrightarrow \mu \ \ (n \to \infty)$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_S f(x)\mu_n(dx) = \int_S f(x)\mu(dx), \qquad f \in C_b(S).$$

Theorem 7.7 K がコンパクト距離空間ならば, $(K, \mathcal{B}(K))$ 上の確率測度全体 $\mathcal{P}(K)$ は弱収束の位相でコンパクト距離空間になる.

Theorem 7.8 (確率測度の弱収束の特徴づけ) $\mathbb{R}$ 上の有界連続関数全体, 一様連続関数全体をそれぞれ $C_b(\mathbb{R})$, $C_u(\mathbb{R})$ で表す. $\mu_n, \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ に対して次は同値である.

(i) $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu_n(dx) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(dx), \qquad f \in C_b(\mathbb{R})$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu_n(dx) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(dx), \qquad f \in C_b(\mathbb{R}) \cap C_u(\mathbb{R})$.

(iii) $\limsup_{n\to\infty} \mu_n(F) \leqq \mu(F), \qquad F$: $\mathbb{R}$ の閉集合.

(iv) $\liminf_{n\to\infty} \mu_n(O) \geqq \mu(O), \qquad O$: $\mathbb{R}$ の開集合.

(v) $\lim_{n\to\infty} \mu_n(B) = \mu(B), \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$: $\mu(\partial B) = 0$.

(vi) $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x), \qquad x \in \mathbb{R}$: F の連続点. ただし, F_n, F はそれぞれ μ_n, μ の分布関数.

***Remark* 7.9** Theorem 7.8 において, (ii) 以外の条件は $\mathbb{R}$ に入れる距離によらない (同相であれば). (ii) の一様連続性の概念は距離に依存するが, この定理では同相であればどんな距離を入れても OK.

***Definition* 7.10** 実確率変数列の収束の階層： 概収束, 平均収束, 確率収束, 法則収束.

Corollary 7.11 実確率変数列について, 確率収束 $\Longrightarrow$ 法則収束.

***Example* 7.12** 実数列 $\{x_n\}$ が x に収束すれば, デルタ測度 δ_{x_n} が δ_x に弱収束する. この例により, Theorem 7.8 において (iii), (iv) で真に不等号になる場合を確認せよ.

***Definition* 7.13** 距離空間 S の完備化 $\widehat{S}$, コンパクト化.

***Remark* 7.14** $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ における弱収束を記述する距離. $\mathbb{R}$ を全有界にする距離 $\tilde{d}$ に関する完備化 $(\widehat{\mathbb{R}}, \tilde{d})$ はコンパクトである. Lemma 7.3 によって $C_u(\mathbb{R}, \tilde{d}) \cong C(\widehat{\mathbb{R}}, \tilde{d})$ の稠密可算部分集合 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ がとれ,

$$\tau(\mu, \nu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\Big(\Big|\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\mu(dx) - \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\nu(dx)\Big| \wedge 1\Big), \qquad \mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

とおくと, Theorem 7.8 により, 距離 τ に関する収束と弱収束とが同値である.

Theorem 7.15 (Prokhorov の定理) $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ の部分集合 $\mathcal{Q}$ に対する次の 2 つの条件は同値である.

(C) $\mathcal{Q}$ が $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ で相対コンパクト.

(T) $\mathcal{Q}$ が**緊密 (tight)**, すなわち $\forall \epsilon > 0, \quad \exists C$: $\mathbb{R}$ のコンパクト部分集合, $\quad \forall \mu \in \mathcal{Q}, \quad \mu(C) \geqq 1 - \epsilon$.

***Remark* 7.16** Brown 運動の構成において, $\mathbb{R}$ のかわりに $C([0, \infty); \mathbb{R})$ のときに Prokhorov の定理が適用される.

8　独立確率変数列と無限直積測度

***Definition* 8.1** 可測空間の (無限) 直積, 準有界測度の直積 (Fubini の定理)

***Definition* 8.2** 独立性（事象, 部分可算加法族, 確率変数）

Theorem 8.3　2 つの実確率変数 X, Y について次は同値.

(i) X, Y が独立

(ii) $E[f(X)g(Y)] = E[f(X)]E[g(Y)] \qquad (\forall f, g \in C_b(\mathbb{R}))$

(iii) $E[e^{i(sX+tY)}] = E[e^{isX}]E[e^{itY}] \qquad (\forall s, t \in \mathbb{R})$

(iv) $P^{(X,Y)} = P^X \times P^Y$

Theorem 8.4 可測空間 $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$ 上の確率測度 μ_n の無限直積 $\mu = \prod_{n=1}^{\infty} \mu_n$ が可測空間 $(\Omega, \mathcal{F}) = (\prod_{n=1}^{\infty} \Omega_n, \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n)$ 上に一意的に存在する.

***Remark* 8.5**　確率的な性質を論じる上で, 次の 2 つの設定は等価である:

- 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, 可測空間 $(S, \mathcal{S})$, S-値確率変数列 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathcal{F}$ の部分可算加法族 $\mathcal{G} = \sigma[X_n \,|\, n \in \mathbb{N}]$,
- 直積可測空間 $(S^\infty, \mathcal{S}^\infty)$ 上の確率測度 μ, 第 n 成分への射影 $X_n : S^\infty \longrightarrow S$ の列.

Theorem 8.6 (Borel–Cantelli の (第 2) 補題)　$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が独立な事象列のとき,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \quad \Longrightarrow \quad P\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Big) = P\big(A_k \text{ i.o. }\big) = 1.$$

***Definition* 8.7**　確率変数列 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に付随する $\sigma[X_1, X_2, \cdots]$ の 2 つの部分可算加法族

- 末尾事象 (tail event) の族：$\mathcal{T} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma[X_n, X_{n+1}, \cdots] =$ 任意有限個の $X_1, \cdots, X_n$ に依存しない事象全体.
- 入れかえ可能な事象 (exchangeable event) の族：$\mathcal{E} =$ 任意有限個の $X_1, \cdots, X_n$ の置換に関して不変な事象全体.

***Remark* 8.8**　$\mathcal{T} \subset \mathcal{E}$ が成立. $\mathcal{E} \setminus \mathcal{T}$ に属する事象の例をつくるには, $X_1 + \cdots + X_n$ の極限値を考えるとよい.

Theorem 8.9 (Kolmogorov の 0-1 法則)　$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が独立のとき, $A \in \mathcal{T} \Longrightarrow P(A) = 0$ or 1.

Theorem 8.10 (Hewitt–Savage の 0-1 法則)　$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が独立同分布のとき, $A \in \mathcal{E} \Longrightarrow P(A) = 0$ or 1.

Theorem 8.11 (角谷の二分律 (dichotomy))　可測空間 $(\Omega_n, \mathcal{F}_n)$ 上の 2 つの同値な確率測度 $\mu_n \sim \nu_n$ の無限直積をそれぞれ $\mu = \prod_{n=1}^{\infty} \mu_n, \nu = \prod_{n=1}^{\infty} \nu_n$ とするとき, $\mu \sim \nu$ または $\mu \perp \nu$ のどちらかが成り立ち,

$$\mu \sim \nu \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \int_{\Omega_n} \sqrt{\frac{d\nu_n}{d\mu_n}} d\mu_n\Big) < \infty.$$

9　独立確率変数列の和に対する極限定理

▶ 本節では, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の**独立な**実確率変数とし, $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ とおく.

Proposition 9.1　S_n は a.s. に収束するか a.s. に収束しないかのどちらかである. すなわち, S_n が収束する確率は 1 または 0.

Theorem 9.2 (Kolmogorov の不等式)　$E[X_n] = 0$, $V(X_n) < \infty$ とすれば,

$$P\big(\max_{k=1,\dots n} |S_k| \geqq a\big) \leqq \frac{1}{a^2} V(S_n), \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall a > 0.$$

Theorem 9.3 (Kolmogorov の大数の強法則: strong Law of Large Numbers)
(I) $\{X_n\}$ が同分布で $E[|X_1|] < \infty$,　または　(II) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} V(X_n) < \infty$ ならば,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n - E[S_n]}{n} = 0 \quad \text{a.s.}$$

***Remark* 9.4**　$\{X_n\}$ が同分布で $E[X_1^4] < \infty$ をみたせば, 簡単な個数の処理と Borel–Cantelli の補題によって大数の強法則が示される.

***Remark* 9.5**　$\{X_n\}$ が同分布で $E[X_1^2] < \infty$ をみたせば, 確率収束を主張する大数の弱 (weak) 法則は, 分散の評価と Chebyshev の不等式から直ちに示される.

Theorem 9.6 (中心極限定理: Central Limit Theorem)
$\{X_n\}$ が同分布で $m = E[X_1]$, $v = V(X_1)$ をもてば,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n - E[S_n]}{\sqrt{n}} = Z \quad (\text{法則収束}).$$

ここで, Z は平均 0 分散 v の正規分布 $N(0, v)$ にしたがう確率変数.

レポート問題２

問題 [**1**] 集合 M 上に２つの同値でない Hausdorff 位相があってそれぞれに関する Borel 集合族が一致するということがありうる．このような場合の例を挙げなさい.

問題 [**2**] 実確率変数列が確率収束すれば法則収束すること (Corollary7.11) を示しなさい.

問題 [**3**] ２つの実確率変数 X, Y について次の (ア), (イ) が同値であることを示しなさい.

(ア) $E[f(X)g(Y)] = E[f(X)]E[g(Y)] \qquad (\forall f, g \in C_b(\mathbb{R}))$

(イ) $P^{(X,Y)} = P^X \times P^Y$

問題 [**4**] 公平なコインを３回投げる試行を記述する確率空間を考え, 次の条件をみたす事象 A, B, C の例を挙げなさい.

(条件) A, B, C のうちどの２つの事象も独立であるが, A, B, C は独立でない.

問題 [**5**] 講義中に述べた定理, 命題, 補題などで, 仮定を適当に緩めた場合の反例について考察しなさい．なるべく意味のある例を挙げてください.

▶ **注 意**　提出期限は７月３０日 (金) 午後１時です (レポート提出ボックスを設けます).