

Theorie der Parallellinien,

- von

Joh. Heinr. Lambert*).

1) Vorläufige Betrachtungen.

§. 1.

Gegenwärtige Abhandlung betrifft eine Schwierigkeit, die in den ersten Anfängen der Geometrie vorkommt, und schon seit *Euklid's* Zeiten denjenigen anstößig gewesen, welche die Lehren dieser Wissenschaft nicht bloß ändern nachglauben, sondern aus Gründen davon überzeugt seyn, und diejenige Schärfe, die sie in den meisten Beweisen fanden, nirgends missen wollten.

Diese Schwierigkeit fällt Jedem, der *Euklid's* Elemente liest, gleich anfangs in die Augen, weil sie sich nicht erst unter den Lehrsätzen, sondern selbst unter den Grundsätzen findet, die *Euklid* dem ersten Buche vorsetzt. Von diesen Grundsätzen nimmt der 11te als 138 etwas für sich Klares und keines Beweises bedürftiges an,

daß, wenn zwei Linien CD, BD (Fig. I.) von einer dritten BC durchschnitten werden, und die beyden innern Winkel DCB, DBC zusammen genommen, kleiner als zween rechte Winkel sind, die beyden Linien CD, BD gegen

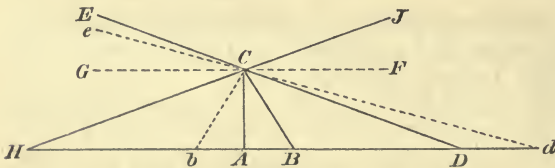


Fig. I.

D, oder auf der Seite, wo diese Winkel sind, zusammen laufen.

§. 2.

Dieser Grundsatz ist unstreitig lange nicht so klar und einleuchtend als die übrigen; und der Eindruck, den er natürlicher Weise

*) Aufgesetzt im Septemb. 1766.

macht, ist, daß man nicht nur einen Beweis davon verlangt, sondern gewissermassen empfindet, daß er eines Beweises fähig sey, oder daß es einen Beweis davon geben müsse.

Dieses ist, soviel ich mir die Sache vorstelle, der *erste* Eindruck. Lieset man aber im *Euklid* weiter fort: so muß man nicht nur die Sorgfalt und Schärfe seiner Beweise, und eine gewisse edle Einfalt in seinem Vortrage bewundern; sondern man wird über seinen 11ten Grundsatz noch um desto mehr stutzig, wenn man sieht, daß *Euklid* Sätze beweist, die man viel leichter würde ohne Beweis zugegeben haben.

Man giebt zwar vor, *Euklid* habe dieses gethan, um seine Lehren auch gegen die spitzfindigsten Einwürfe der damaligen Sophisten in Sicherheit zu setzen*). Allein wenn dieses ist: so gestehe ich, daß ich mir von diesen Sophisten keinen Begriff machen kann, wenn *Euklid* voraussetzen konnte, daß sie ihm seinen 11ten Grundsatz würden unangefochten gelten lassen, weil mit demselben der größte Theil der geometrischen Lehrsätze wegfällt. Man sollte vielmehr gedenken, daß *Euklid* und die Sophisten, wenn je diese zu *Euklid's* Zeiten nichts eingewandt haben, andre Maximen zur Beurtheilung der Grundsätze und des Vortrags der geometrischen Beweise müssen gehabt haben, als verschiedene von denen, die in den folgenden Zeiten über diese Sache gedacht, oder Schwierigkeiten wider die etwan | von andern 139 versuchten Beweise gemacht haben.

Von diesen Schwierigkeiten oder Einwendungen sind mir solche vorgekommen, wobey ordentlich vorausgesetzt werden muß, daß man, um den Euklidischen Grundsatz zu beweisen, oder überhaupt die Geometrie festzusetzen, weder *sehen* noch sich *von der Sache selbst* eine *Vorstellung* machen dürfe. Es ist unstreitig, daß man bey einer solchen Forderung den 12ten Euklidischen Grundsatz, *daß zwei gerade Linien keinen Raum schliessen*, ebenfalls wird anfechten können.

§. 3.

Es ist aber auch eben so unstreitig, daß die Sophisten zu *Euklid's* Zeiten minder strenge gewesen seyn, und die *Vorstellung der Sache* mußten zugegeben haben. Mit dieser Voraussetzung aber läßt sich

*) [*Lambert* denkt wohl an folgende Äußerung von *Clairaut* (*Éléments de Géométrie*, 1741, S. X): Dieser Geometer mußte die hartnäckigen Sophisten überzeugen, die ihren Ruhm darin suchten, die augenscheinlichsten Wahrheiten anzugreifen. Deshalb mußte die Geometrie damals, ebenso wie die Logik, um Böswilligen den Mund zu stopfen, zum schulgerechten Schlussverfahren greifen. Die Sache hat sich aber geändert. Weitläufige Auseinandersetzungen über Dinge, bei denen von vornherein der gesunde Menschenverstand entscheidet, sind durchaus überflüssig und dienen nur dazu, die Wahrheit zu verdunkeln und die Leser abzuschrecken.]

Euklid's Vortrag, wenigstens in Ermangelung eines andern und mindern Schwierigkeiten unterworfenen, ganz ordentlich rechtfertigen.

Man kann nämlich den 11ten Grundsatz aufgeschoben seyn lassen, bis man zu der *Prop.* XXIX des ersten Buchs kömmt. Inzwischen lernt man ganz gewifs die *Sache selbst*, wovon in dem Grundsätze die Rede ist, *kennen*, und das, was an dem Grundsätze und dessen Vorstellung zu mangeln scheint, auch wenn man es nicht mit Worten ausdrücken kann, noch hinzudenken. In den beyden nächst vorhergehenden *Prop.* XXVII und XXVIII lernt man, dafs, wenn die Winkel

$$FCB + CBD = 180 \text{ Gr.}$$

oder die Winkel $FCB = CBA$ sind, die Linien AB , CF weder gegen

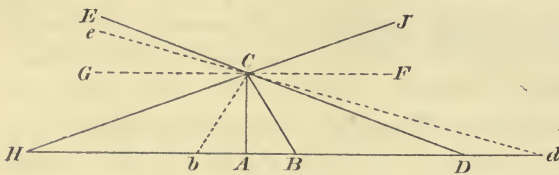


Fig. I.

F noch gegen G zusammen laufen. Man lernt dadurch, dafs die 34ste Definition*) nicht ein Unding oder leeres Hirngespinnst angiebt; sondern dafs nichtzu-

sammenlaufende gerade Linien im Reiche der Wahrheit wirklich vorkommen. Denn bis dahin blieb diese Definition ausgestellt; und bis dahin konnte man auch den Grundsatz ausgestellt seyn lassen, weil derselbe doch mit den Parallellinien in enger Verbindung stehet, und so zu reden | zwischen Parallellinien und zusammenlaufenden Linien die Gränze bezeichnet.

Was man sich nun, um sich von der Richtigkeit und *Gedenkbarkeit* des Grundsatzes zu versichern, noch ferner *vorstellt*, kömmt meines Erachtens darauf an: Man stellt sich CF , AB nach der *Prop.* XXVII oder XXVIII als nichtzusammenlaufend vor, und gedenkt sich eine jede durch den Winkel BCF gezogene *gerade* Linie CD : und so weifs man, dafs, so klein auch der Winkel DCF seyn mag, nothwendig

$$DBC + BCD < 180 \text{ Gr.}$$

ist, und demnach der Bedingung des Grundsatzes Genüge geschieht. Soll man sich nun die Folge, dafs CD , BD zusammen laufen, ebenfalls vorstellen: so wird allerdings erfordert, dafs man sich die Linien CF , CD , AD als *gerade* Linien *vorstelle*. Durch diese Vorstellung erhält man, dafs CD verlängert, sich nicht nur von CF immer weiter entfernt, sondern auch sich gegen AD dergestalt nähert, dafs sie dieselbe nothwendig in irgend einer Entfernung BD durchschneiden muß.

*) [In der Ausgabe von Heiberg ist es die 23ste.]

Wer hiebey den Einwurf macht, CD könnte sich vielleicht gegen AD auf eine asymptotische Art nähern, wie z. E. die Hyperbel und andre asymptotische krumme Linien, der ändert meines Erachtens das, was man in der Vernunftlehre *statum quaestionis* heisst, oder er weicht davon ab, dafs bey *Eukliden* nicht von *Beweisen*, sondern von der *Vorstellung* und der *Gedenkbarkeit der Sache* die Rede ist; weil man es *Eukliden* ganz sicher zutrauen kann, dafs er sonst seinen Satz nicht würde unter die *Grundsätze* gezählt oder gesetzt haben. Kömmt es aber auf die *Vorstellung der Sache* an: so sehe ich nicht, wie sich bey der Vorstellung *gerader* Linien Einwürfe von Hyperbeln hernehmen lassen, weil man auf eine ganz gleiche Art würde anstehen können, ob zwo gerade Linien nicht dergestalt könnten aneinander gelegt werden, dafs sie einen Raum einschliessen; weil es doch mit zween gleich | grossen Cirkelbogen, wenn man ihre Hölung gegen einander 141 kehrt, angeht.

Ich führe dieses nur an, um zu zeigen, dafs sich mit Voraussetzung von der wirklichen Vorstellung der Sache, und wenn man nicht schlechthin nur Worte fordert, *Euklid's* Verfahren rechtfertigen lasse; um so mehr, da sein Vortrag, so viel mir bekannt ist, noch bis dermalen weniger Schwierigkeiten hat, als sich bey allen seit *Euklid's* Zeiten angestellten Versuchen, die Sache anders vorzutragen, gefunden haben. Man kann hierüber eine kurze und sehr bündig geschriebene akademische Dissertation von Hrn. *Klügel* nachlesen, worin die in solchen Versuchen zurücker gebliebenen Mängel und öfters mit untergelaufene logische Cirkel, Lücken, Sprünge, Paralogismen, unrichtig gebrauchte und gratis angenommene Definitionen und Grundsätze mit vielem Scharfsinn und vieler Mäfsigung angezeigt werden.

§. 4.

Ungeachtet, wie es auch in dieser Dissertation erzählt wird, in gegenwärtigem Jahrhundert verschiedene solcher gewagten Versuche im Drucke herausgekommen: so ist doch gar kein Zweifel, dafs es, besonders in Deutschland, nicht viel mehrere sollte gegeben haben, wenn *Wolf*, welcher in einem Zeitraum von 40 und mehr Jahren, in Absicht auf die herausgekommenen geometrischen Schriften, *Dux gregis* war, und es allerdings aus vielen guten Gründen zu seyn verdiente; wenn *Wolf*, sage ich, vorbemeldte Schwierigkeit, theils besser empfunden, vornehmlich aber in seinen Anfangsgründen mehr rüge gemacht hätte. Letzteres hätte aus leicht begreiflichen Gründen eine Menge Schriften darüber zum Vorschein gebracht. Ersteres würde,

so viel ich mir die Sache vorstelle, selbst auf *Wolfens* Weltweisheit einen sehr merklichen Einfluß gehabt haben.

Es liegt nicht an dem, daß *Wolf* nicht ganz ordentlich wufste, daß *willkürlich zusammengesetzte Begriffe müssen erwiesen werden*. Er 142 scharft es in seinen beyden | Vernunftlehren, und selbst auch in seinen Vorberichten von der mathematischen Methode, ein, und erläutert es durch Beyspiele aus der Geometrie. Ich folgere aber daraus, *Wolf* müsse seine Definition von den Parallellinien nicht als einen *willkürlich zusammengesetzten Begriff* angesehen haben, weil ich ihm zutraue, er würde sonst auf einen Beweis ihrer Möglichkeit gedacht, oder wenigstens erinnert haben, daß noch etwas zurück bleibe; oder er hätte *Euklid's* Verfahren beybehalten, und so wäre die Schwierigkeit wie bey *Eukliden* in die Augen gefallen.

Untersuche ich aber, warum *Wolf*, ohne an etwas Willkürliches zu denken, sich begnügt habe, die Parallellinien *aequidistantes* zu nennen: so muß ich voraussetzen, er habe diesen Begriff nach seiner andern Methode Begriffe zu finden, das will sagen, durchs *Abstrahiren aus einzelnen Beyspielen* gefunden. Von solchen Begriffen und Definitionen sagt er, daß sie keines fernern Beweises bedürfen. Ich gebe es zu. Aber im *Vortrage* muß man sodann allerdings auch gegen die Leser die Billigkeit haben, daß man ihnen vorzeige, wie man den Begriff abstrahirt habe. Sonst können sich die Leser das Recht anmassen, zu vermuthen, es möchte ein *Vitium subreptionis* vorgegangen oder mit untergelaufen seyn. Denn Begriffe, die man aus Beyspielen abstrahirt, sind in soferne allemal auch *à posteriori*; und man kann sie nur alsdann *à priori* ansehen, wenn sie, nachdem man sie gefunden, für sich gedenkbar, das will sagen, *einfach* sind. Widrigenfalls muß man die Beyspiele den Lesern vorweisen, und von allen Behutsamkeiten bey dem Abstrahiren Rechnung geben, wenn man allen Verdacht eines *Vitii subreptionis* von sich ablehnen will.

*Bülfinger**) empfand die Nothwendigkeit dieses Verfahrens sehr wohl, und war eben dadurch besser als *Wolf* selbst im Stande, die wider die Wolfische Weltweisheit erregten Schwierigkeiten merklich 143 zu | vermindern. Es wäre aber zu wünschen gewesen, daß *Wolf* selbst in den Hauptstücken seiner beyden Vernunftlehren, wo er theils vom Definiren, theils vom schriftlichen Vortrage dogmatischer Sätze handelt, die Nothwendigkeit und die Art ausführlich und mit allem Nachdrucke gezeigt hätte, wie man den Verdacht des *Vitii subreptionis*

*) [Georg Bernhard Bülfinger (1693—1740), *Dilucidationes philosophicae*, 1725. Vergleiche: Zeller, Geschichte der deutschen Philosophie seit Leibniz, München 1875, S. 231.]

bey Definitionen, die durchs Abstrahiren gefunden worden, im Vortrage derselben von sich ablehnen müsse.

§. 5.

Dieses wäre nun bey der Definition der Parallellinien schlechthin nicht angegangen. Denn so viel man sich auch solche vorzeichnen will: so bleiben doch zwo merkliche Unvollständigkeiten zurück. Einmal fehlt bey dem Vorzeichnen die geometrische Schärfe. Sodann ist es schlechthin unmöglich, sie beyderseits ins Unendliche fortzuziehen. Und so reicht man *à posteriori* und mit dem Abstrahiren nicht aus; und die Definition, oder besser zu sagen, die Möglichkeit der Sache muß aus andern und einfachern Gründen erwiesen werden, die für sich gedenkbar sind.

Wolf hat unstreitig diese Betrachtungen nicht gemacht. Man findet auch bey ihm solche Spuren, woraus sich nicht undeutlich schliessen läßt, daß er den Definitionen zu viel eingeräumt, und aus dem Grunde, daß er sie der Sache gemäß einrichten wollte, die Schwierigkeiten, die in der Sache sind, in die Definitionen gebracht habe*). Daß sie darin mehrentheils versteckter waren, als sonst in der Sache selbst, könnte man, in Absicht auf die Parallellinien, wenigstens daraus schliessen, daß in solchen Zeiten, wo eine allgemeine Demonstrirsucht die herrschendste Mode war, mehr Wesens wäre daraus gemacht worden, wenn *Wolf* in seinen Anfangsgründen der Meßkunst den Euklidischen Vortrag beybehalten hätte.

§. 6.

Ich sagte erst, *Wolf* habe den Definitionen zu viel eingeräumt. Dieses ist nun vielmehr in der That selbst, als mit ausdrücklichen Worten geschehen; und es wurde bey vielen unvermerkt Mode, daß sie *von einer Sache gar keinen Begriff zu haben glaubten, dafern nicht der Name derselben definiert wurde*. Selbst allen Grundsätzen mußten Definitionen vorgehen, ohne welche sie nicht sollten können verstanden werden. Dabey war es nun kein Wunder, wenn der Satz, daß *eine jede Definition, ehe sie bewiesen ist, eine leere Hypothese sey*; wenn dieser Satz, den *Euklid* so genau wußte und so durchgängig beobachtete, darüber, wo nicht verloren gieng, doch sehr vergessen wurde.

Ich merke dieses hier um so mehr an, weil es in Absicht auf den Vortrag der philosophischen Wissenschaften sehr nachtheilige

*) [In einem Briefe *Lamberts* an *Kant* (Februar 1766) heisst es: „*Wolf* nahm Nominaldefinitionen gleichsam gratis an und schob oder versteckte, ohne es zu merken, alle Schwierigkeiten in dieselben“ (*Lamberts Briefwechsel*, Teil I. S. 347.)]

Folgen hatte; ingleichem, weil es eben das ist, worin *Wolf*, als er seine Methode aus *Eukliden* abstrahirte, noch zurück geblieben; und endlich, weil eben die Parallellinien das augenscheinlichste Beyspiel geben, das eine vorausgeschickte Definition, bis sie nicht selbst erwiesen ist, nichts beweise.

§. 7.

Es ist falsch, das *Euklid* irgend eine seiner Definitionen, ehe er die Möglichkeit der Sache erwiesen, anders als eine *blasse Hypothese* gebrauche, oder sie als ein *categoriales Principium demonstrandi* ansehe. Der Ausdruck *per definitionem* gilt bey ihm nicht mehr als der Ausdruck *per hypothesin*. Sieht man auch genauer nach: so nimmt er das *Categoriale* in seinen Lehrsätzen nicht von den *Definitionen*, sondern eigentlich und vornehmlich von den *Postulatis*. Von diesen gilt es eigentlich, wenn *Cicero* sagt: *Si dederis, danda sunt omnia**).

Unter den Grundsätzen finde ich vornehmlich nur den 11ten, der eine positive und die Figuren unmittelbar betreffende Categoric enthält. Aber eben derselbe ist auch der Einzige, den man nicht will gelten lassen. Das Categoriale darin sollte aus den *Postulatis* durch Schlüsse herausgebracht werden. Die übrigen betreffen größtentheils nur den Begriff der *Gleichheit* und *Ungleichheit*, und gehören eben darum, weil sie *Verhältnißbegriffe* betreffen, nicht zu der *Materie*, sondern eigentlich zu der *Form der Schlüsse*, die *Euklid* in seinen Beweisen macht, und in welchen sie immer nur als Obersätze vorkommen. Der 12te Grundsatz, *das zwei gerade Linien keinen Raum schliessen*, ist verneinend, und wird von *Eukliden* eben so wie der 9te, *das das Ganze grösser ist als sein Theil*, da gebraucht, wo der Beweis *apagogisch* ist, oder die Wahrheit des Satzes aus der Unmöglichkeit des Gegentheils erwiesen wird.

§. 8.

Dieses ist nun in einem kurzen Entwurfe der Geist der Euklidischen Methode, und zugleich dasjenige, wovon ich in *Wolfs* Vernunftlehren wenig oder nichts, in seinem Verfahren und Vortrage sehr oft das Gegentheil finde.

So z. E. glaubte *Wolf* mit mehreren andern, das man die Schwierigkeit, die *Euklids* 11ten Grundsatz drückt, dadurch heben könne, wenn man seine Definition der Parallellinien änderte. Sie wird aber

*) [In geometria prima si dederis, danda sunt omnia. De finibus bonorum et malorum, lib. V. 83.]

dadurch weder gehoben, noch vermieden, noch auf eine geschickte Art umgegangen, und gleichsam von hinten her weggehoben. Sie wird vielmehr, wenn auch Alles richtig geht, nur *von dem Grundsatz weg*, und *in die Definition gebracht*; und zwar, so viel ich sehe, ohne daß sie dadurch leichter könnte gehoben werden. In der That auch läßt sich *Euklids* Definition ohne Rücksicht auf seinen 11ten Grundsatz beweisen. *Wolfs* Definition hingegen kann entweder ohne diesen Grundsatz nicht bewiesen werden; oder wenn sie bewiesen werden kann: so ist dieser Grundsatz so gut als zugleich mit erwiesen.

Es kömmt aber eigentlich auf die Definition | gar nicht an. Man ¹⁴⁶ kann sie bey *Eukliden* ganz weglassen; und so wird man in der *Prop.* XXVII und XXVIII von selbst anstatt *parallelæ lineæ* den Ausdruck *lineæ sibi non coincidentes* setzen. Man wird, aus Betrachtung, daß dieses ein merkwürdiger Umstand ist, sodann von selbst darauf verfallen, auf eine kurze und schickliche *Benennung* zu denken, oder solchen Linien, die nicht zusammen laufen, so viel man sie auch auf beyden Seiten verlängert, einen *Namen* zu geben. Und man wird dazu noch mehr verleitet werden, wenn man im Folgenden darauf verfällt, daß eben diese Linien noch überdies durchaus in gleicher Entfernung von einander bleiben.

Dies ist die eigentlich synthetische Art zu verfahren; und man denkt dabey erst dann auf die *Benennung*, wenn die Sache herausgebracht und erheblich genug ist, einen besondern Namen zu verdienen. Beyspiele davon kommen in der Mathematik unzählige vor, und sollen auch in allen denen Wissenschaften, wo man *à priori* gehen kann oder zu gehen gedenkt, nicht selten seyn.

§. 9.

Proklus, welchem *Euklid's* 11ter Grundsatz ebenfalls anstößig war, fordert deswegen einen Beweis davon, *weil derselbe, wenn man ihn umkehrt, erweisbar ist.*

In der That findet sich der umgekehrte Satz in der *Prop.* XVII. *Libr.* I. erwiesen. Mir kömmt es ebenfalls ganz richtig vor, daß es bey einem Grundsatz für sich klar seyn müsse, was es mit demselben gerade oder umgekehrt für eine Bewandtniß habe. Denn, nach aller Schärfe betrachtet, soll ein Grundsatz aus lauter einfachen, und daher für sich gedenkbaren Begriffen bestehen; und es muß, ob und wiefern sie mit einander verbunden werden können, unmittelbar aus der Vorstellung der Begriffe erhellen.

So z. E. ist der achte Euklidische Grundsatz, *daß ausgedehnte Grössen, die auf einander passen, einander gleich | sind; (Quæ sibi* ¹⁴⁷

mutuo congruunt, sunt aequalia) dieser Satz ist für sich gedenkbar. Es ist aber auch eben so für sich gedenkbar, daß er nur bey geraden Linien und Winkeln umgekehrt gilt, bey Figuren aber noch eine Bestimmung, und zwar die von der Aehnlichkeit, hinzu kommen müsse, wenn er dabey umgekehrt anwendbar seyn soll.

§. 10.

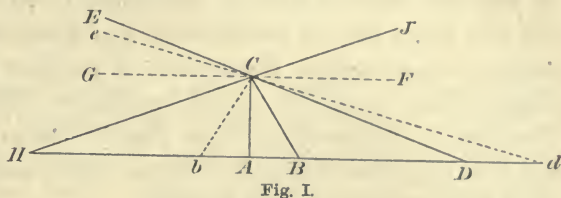
Um nun nach diesen allgemeinen Betrachtungen näher zu der Theorie der Parallellinien zu kommen, wodurch ich sowohl die Schwierigkeiten deutlich zu machen, als auch sie zu heben gedenke: so werde ich vorerst den eigentlichen *statum quaestionis* feste setzen.

Die *Frage selbst* betrifft nemlich erstlich *weder die Wahrheit noch die Gedenkbarkeit des Euklidischen Grundsatzes*. Es hätte um den größten Theil der Geometrie bisher übel ausgesehen, wenn dieses die Frage seyn sollte. Ich habe in Absicht auf die *Gedenkbarkeit* bereits oben (§. 3.) angezeigt, nach welcher Ordnung sie bey dem Durchlesen des *Euklides* entstehe. Daß der Grundsatz dadurch zugleich auch als *wahr* gedacht werde, ist für sich klar. Es wird aber die Wahrheit desselben auch aus allen Folgen, die in allen Absichten daraus gezogen werden, dergestalt erwiesen, einleuchtend und nothwendig, daß man diese Folgen, zusammengenommen, als eine auf vielfache Arten vollständige *Induction* ansehen kann.

Sodann findet sich auch bey vielen Versuchen, die man anstellen kann, um diesen Grundsatz zu beweisen, daß er, um bewiesen zu werden, fast immer sich selbst voraussetzt, und auf sehr vielerley Arten eine Folge von sich selbst ist, auf keine Art aber umgestossen wird.

Dieses mag auch ein Grund mit seyn, warum *Euklid* denselben, in Ermanglung eines Beweises, unter die Grundsätze genommen; zumal da er diejenige Definition gewählt, die ohne Rücksicht auf diesen
148 Grundsatz erweisbar war, und sich mit demselben am | unmittelbarsten verbinden liefs. Denn man sieht ganz offenbar, daß seine *Prop. XXIX*, wo dieser Grundsatz gebraucht wird, vornehmlich nur dient zu beweisen, daß es, ausser denen in den beyden *Prop. XXVII* und *XXVIII* erwiesenen Parallellinien, keine andern mehr gebe. Und in dieser Absicht wird dadurch eine in der That sehr kleine Lücke ausgefüllt, weil man sich ohne Mühe vorstellen kann, daß nur noch solche Linien aus der Zahl der nichtzusammenlaufenden auszuschließen blieben, die mit *CF* (Fig. I.) einen *kleinern* Winkel machen, als alle diejenigen Linien *CD*, *Cd*, deren Durchschnitt *D*, *d* gegeben werden kann, das will sagen, der eine *endliche* Entfernung von *A* hat. Denn,

wenn man CF um den Punkt C herunter gegen D dreht: so merkt Hr. Prof. Kästner mit Recht an, daß sich der erste Durchschnittspunkt nicht angeben lasse, weil, wo man ihn immer auf AD hinaus setzen wollte, noch ein entfernterer genommen werden kann.



Dieses hat aber meines

Erachtens den Erfolg, daß, wo die Winkel DCF , dCF sehr klein sind, die Entfernungen AD , Ad in umgekehrter Verhältniß der Winkel DCF , dCF , oder einer davon nicht viel verschiedenen Funktion derselben, zunehmen müssen. Denn in gerader Verhältniß der Winkel ACD , ACd , oder einer Funktion derselben, können sie deswegen nicht zunehmen, weil sonst CF , auch wo

$$DAC + ACF = 180 \text{ Gr.}$$

oder gar noch grösser ist, die Linie AD in einer endlichen Entfernung von A schneiden müßte; welches der *Prop. XXVIII. Libr. I.* des *Euklides* zuwider wäre.

Indessen glaube ich nicht, daß sich die Sache auf diese Art erörtern lasse; ungeachtet sich's, wenn die Sache einmal berichtet ist, leicht erweisen läßt, daß man, um jeden Winkel DCF zu halbiren, nur $Dd = DC$ zu machen habe. So giebt es auch noch andre Arten, sich die Sache vorzustellen.

Wer z. E. die beyden nichtzusammenlaufenden Linien CF , AD so ansieht, daß sie einen Winkel machen, der $= 0$ ist: der wird leicht beweisen können, daß jede Linie Cd mit Ad einen Winkel mache, der > 0 ist, und daß demnach diese beyden Linien sich irgendwo schneiden. Der Beweis ist eben der, wodurch man zeigt, daß $CDA > CdA$ sey (*Prop. XVI. Libr. I. Euklid.*). Denn dreht man CD um den Punkt C aufwärts: so wird der Winkel CDA immer kleiner, und endlich vollends negativ, sobald CD über CF hinauf kömmt. Er muß demnach irgend $= 0$ werden; und daß dieses in der Lage CF geschehe, folgt meines Erachtens aus der Vorstellung, daß AD , CF gerade Linien sind, womit die Vorstellung von einer *asymptotischen Näherung* nicht bestehen kann.

Ob sich aber diese Betrachtung von negativen Winkeln, und von solchen die $= 0$ sind, in das erste Buch des *Euklides* schieke, das ist eine ganz andre Frage, die man leicht verneinen, und behaupten wird, ein solcher Vortrag sey mehr algebraisch als geometrisch.

§. 11.

Ich mag es auch gelten lassen; und merke nun ferner an, daß es bey den Schwierigkeiten über *Euklid's* 11ten Grundsatz eigentlich nur die Frage ist, ob derselbe aus den *Euklidischen Postulatis* mit Zuziehung seiner übrigen Grundsätze in richtiger Folge hergeleitet werden könne? Oder, wenn diese nicht hinreichend wären, ob sodann noch andre *Postulata* oder Grundsätze, oder Beydes könnten vorgebracht werden, die mit den *Euklidischen* gleiche Evidenz hätten, und aus welchen sein 11ter Grundsatz erwiesen werden könnte?

Bey dem ersten Theile dieser Frage kann man nun von Allem, was ich im Vorhergehenden *Vorstellung der Sache* genennt habe, abstrahiren. Und da *Euklid's Postulata* und übrigen Grundsätze einmal mit Worten ausgedrückt sind: so kann und soll gefordert werden, 150 daß man sich in dem Beweise nirgends auf die | Sache selbst berufe, sondern den Beweis durchaus symbolisch vortrage — wenn er möglich ist. In dieser Absicht sind *Euklid's Postulata* gleichsam wie eben so viele algebraische Gleichungen, die man bereits vor sich hat, und aus welchen x , y , z , &c herausgebracht werden soll, ohne daß man auf die Sache selbst zurücke sehe. Da es aber nicht ganz solche Formeln sind: so kann man allerdings die Vorzeichnung einer Figur als einen Leitfaden, um den Beweis zu führen, dabey zugeben.

Hingegen würde es bey dem andern Theile der Frage ungereimt seyn, wenn man die Betrachtung und Vorstellung der Sache dabey untersagen, und fordern wollte, die neuen *Postulata* und Grundsätze müßten, ohne an die Sache zu denken, und gleichsam aus dem Stegreife gefunden werden. Ich sehe aber auch nicht, wie man gegen *Eukliden* billiger ist, wenn man seinen Grundsatz verwirft, ohne die Frage darüber so zu stellen, wie ich sie zu Anfang des gegenwärtigen Paragraphs gestellt habe. Denn da *Euklid* seinen Satz einmal unter die Grundsätze rechnet: so setzt er unstreitig dabey die Vorstellung der Sache voraus; und man kann es ihm zutrauen, daß er, wenigstens in Ermangelung des noch dormalen zu findenden Vortrages, den seinigen mit Bewußtseyn gewählt habe.

Ich zweifle auch nicht, daß *Euklid* nicht selbst sollte auf Mittel gedacht haben, seinen 11ten Grundsatz unter die Lehrsätze zu bringen. Wenigstens kommen im ersten Buche seiner *Elemente* einige Spuren vor, woraus es sich nicht undeutlich abnehmen läßt. Wie leicht folgt z. E. seine *Prop. XVII* aus *Prop. XXXII*, wenn diese einmal erwiesen ist! Indessen beweist *Euklid* jene besonders, vermuthlich um zu zeigen, wie weit sich, ohne Zuziehung des 11ten Grundsatzes, etwas von den Winkeln eines Triangels bestimmen läßt.

2) Vortrag einiger Sätze,
die für sich betrachtet werden können.

151

[§. 12.]

Nach der Festsetzung dessen, was in Absicht auf den 11ten Euklidischen Grundsatz eigentlich die Frage ist, könnte ich nun die Theorie der Sache selbst vortragen. Ich werde aber erst den 3ten Abschnitt dieser Abhandlung dazu widmen, inzwischen aber einige Sätze beybringen, die sich, ohne Rücksicht auf diese Theorie, für sich betrachten lassen.

Ich setze dabey voraus, dafs man wisse, oder wenigstens ohne Mühe finden könne, welche Sätze in dem ersten Buche der Euklidischen Elemente von dessen 11ten Grundsatz abhängen; dafs z. E. bis auf die Proposit. XXIX, Alles ohne Zuziehung dieses Grundsatzes erwiesen sey, von da an aber bis zum Ende Alles mittelbar oder unmittelbar davon abhängen, wohin besonders die Bestimmung der Summe der 3 Winkel eines jeden Triangels, und Alles was von Parallelogrammen, Rectangeln und Quadraten gesagt wird, gehört.

In den folgenden Büchern trägt *Euklid* hin und wieder noch einige Sätze vor, die von seinem 11ten Grundsatz unabhängig sind. Es sind aber auch viele von denen, die auf diesem Grundsatz beruhen, von der Art, dafs, wenn sie für sich erwiesen werden können, sie den Beweis des Grundsatzes selbst nach sich ziehen, so, dafs man auf diese Art bey dem Aufsuchen eines Beweises für diesen Grundsatz mehr als Eine Wahl hat, wo man anfangen könne. So z. E. ist man mit dem Beweise des Grundsatzes bald fertig, wenn man, ohne Zuziehung desselben, erweisen kann, dafs in jedem Triangel die Summe der 3 Winkel zween rechten Winkeln gleich ist; dafs eine gerade Linie entweder von keiner oder von allen Parallellinien durchschnitten werde; u. s. w.

Da es unnöthig ist, das, was *Euklid* in seinem ersten Buche ohne Zuziehung des 11ten Grundsatzes erwiesen, hier von neuem | zu be- 152
weisen: so werde ich dasselbe als bekannt voraussetzen, und, wo es nöthig, die Propositionen, die ich gebrauche, citiren.

§. 13.

Es sey nun (Fig. I.) ACB ein in A rechtwinkllicher Triangel; und, indem man die Seite AB verlängert, ziehe man durch C jede Linie ECD , welche AB schneide: so wird die Summe der beyden spitzen Winkel des Triangels

$$ACB + ABC > ACD,$$

und

$$ACB + ABC < ACE$$

sey. Denn erstlich mache man $FCB = CBA$, und ziehe FCG : so ist

$$ACB + ABC = ACF;$$

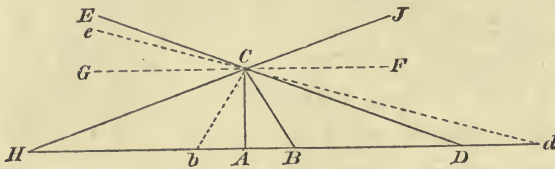


Fig. I.

und die Linie GF läuft mit HD auf keiner Seite zusammen. (*Prop. XXVII.*) Da nun CD mit HD gegen D zusammen läuft: so ist

$$ACD < ACF;$$

demnach auch

$$ACD < ACB + ABC,$$

oder

$$ACB + ABC > ACD.$$

Ferner trage man AD aus A in H , und ziehe HCH durch H , C gerade. Da nun JCH mit AH auf der Seite H zusammenläuft, FCG aber nicht: so ist wiederum

$$GCA > HCA;$$

und hingegen

$$JCA > ACF.$$

Nun ist

$$ECA = JCA,$$

weil, wenn man die Figur nach der Linie AC zusammenlegt, ECD auf JCH fällt. Demnach ist

$$ACF < ECA,$$

und daher auch

$$ACB + ABC < ECA.$$

§. 14.

Dieser Lehrsatz zeigt nun genauer, wie weit man mit der *Prop. XVII. Euclid.* in Absicht auf die Bestimmung der Summe der drey Winkel eines Triangels zurücke bleibt.

Denn einmal ist bey jedem rechtwinklichten Triangel ACB diese Summe grösser, als die Summe, welche entsteht, wenn man zu 90 Gr. jeden | spitzen Winkel ACD^*) addirt. Hingegen ist sie kleiner, als

*) [Damit meint Lambert: jeden spitzen Winkel ACD , bei dem AB von CD geschnitten wird. Diese spitzen Winkel besitzen eine obere Grenze, von der man von vorn herein nicht weiß, ob sie gleich einem Rechten ist. Entsprechend ist im Folgenden der stumpfe Winkel ECA zu verstehen.]

die Summe von einem rechten und jedem stumpfen Winkel ECA . Eben dieses gilt von jedem schiefwinklichten Triangel bCA ; jedoch mit dem Unterschied, dafs die Summe seiner drey Winkel grösser, als jeder spitze Winkel ACD doppelt genommen, und hingegen kleiner als jeder stumpfe Winkel ACE , doppelt genommen, gefunden wird.

Man kann sich auch leicht versichern, dafs das Mittel aus diesen beyden Schranken genau 180 Gr. ist, weil $ECA + ACD = 180$ Gr., demnach das Mittel davon 90 Gr. und das Doppelte von 90 Gr. = 180 Gr. ist. Ferner findet sich, dafs, wenn D weiter hinaus, z. E. in d genommen wird, die beyden Schranken einander, jede um gleich viel, näher kommen, und sich daher dem Mittel gleichförmig nähern. Endlich kann man sich leicht wenigstens vorstellen, dafs der Winkel DCF desto kleiner wird, je weiter man den Punkt D von A hinwegrückt. Und eben dadurch erhält man Schranken, die ungemein nahe zusammen treffen; und man kann daraus schliessen, dafs, wenn auch die Summe der drey Winkel eines Triangels nicht genau 180 Gr. seyn sollte, sie dennoch bey jedem Triangel gar nicht viel davon verschieden seyn könne.

Dieses ist aber auch Alles, was hieraus folgt; und es wird sich dabey schwerlich weiter gehen lassen. Indessen ist der Satz eben nicht ganz unerheblich.

§. 15.

Ich werde nun noch einen andern beyfügen.

Die Summe der Winkel eines Triangels mag nun genau = 180 Gr. oder um etwas davon verschieden seyn: so können wir dieselbe z. E. (Fig. II) bey dem Triangel $ACB = 180 + a$ Grade setzen. Man ziehe nun durch einen der Winkel eine beliebige Linie AD : so entstehen zween Triangel ACD , ADB , und damit 6 Winkel. Die zween Winkel C , B bleiben wie vorhin. A wird auf beyde Triangel vertheilt; und die neu hinzugekommenen Winkel CDA , ADB machen zusammen 180 Gr. (*Prop. XIII*) Demnach ist in beyden Triangeln die Summe aller 6 Winkel nur $180^\circ + 180^\circ + a$. Man hätte denken sollen, sie würde = $180^\circ + 180^\circ + a + b$ seyn. Wird von diesen Triangeln wiederum Einer, z. E. DAB durch eine Linie DE getheilt: so entstehen drey Triangel; und die Summe ihrer Winkel ist wiederum nur = $180 + 180 + 180 + a$ Grade.

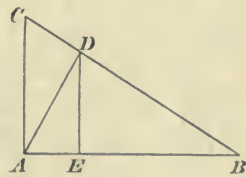


Fig. II.

Fährt man weiter fort: so kömmt zu jedem neuen Triangel nur immer wiederum 180 Gr. hinzu. Man sollte allerdings daraus die

Folge ziehen können, es müsse $a = 0$ seyn*). Denn da man die Linien AD , DE , &c nach Belieben und nach unendlich vielerley Abwechselungen ziehen kann: so kömmt es eben so heraus, als wenn man in einer Reihe

$$A = a + bx + cx^2 + dx^3 + \&c$$

A beständig, und x veränderlich setzt. Denn da werden alle Coefficienten $b, c, d, \&c = 0$; und es bleibt $A = a$, das will sagen: In jedem Triangel ist die Summe der Winkel = 180 Gr.

Ich führe dieses nur im Vorbeygehen an, weil daraus erhellet, das man noch nicht alle Mittel aufgesucht hat, die Schwierigkeit der Parallellinien zu heben.

§. 16.

Ich finde ferner, das Hr. Prof. *Kästner* angemerkt hat, diese Schwierigkeit komme nicht so wohl auf die Winkel, als vielmehr auf die Gröfse der Linien und auf die Entfernung der Parallellinien an.

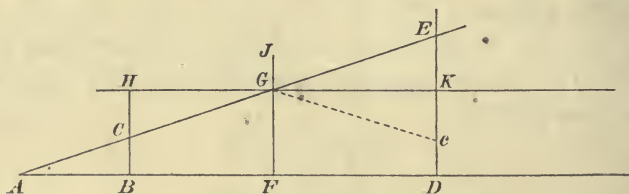


Fig. III.

Wenn z. E. (Fig. III) F ein rechter Winkel ist: so mag AGF , so wenig man will, von einem rechten Winkel verschieden, und kleiner als derselbe seyn, und es läst sich auf GA kein Punkt angeben, aus welchem nicht sollten Perpendicularen auf GF gefällt werden können.

Ob sich aber hinwiederum durch GF keine senkrechte Linie FA ziehen lasse, die nicht auch GA in irgend einem Punkte A durchschneide, das ist allerdings eine andre Frage, welche nicht bejahet
155 werden kann, dafern man sie nicht entweder | *directe* beweist, oder umgekehrt zeigt, das sich aus den Punkten A der Linie GA Perpendicularen AF auf GF fallen lassen, welche in jeder beliebigen Entfernung von G auffallen. Liefse sich aber für jeden Fall, wo die Summe der Winkel $AGF + GFA < 180$ Gr. ist, ohne Rücksicht auf die Gröfse der Linie GF , beweisen, der Winkel GAF sey > 0 ,

*) [Indem nämlich stillschweigend die Winkelsumme des Dreiecks als konstant, das heißt für jedes Dreieck gleich groß, angenommen wird. Ist aber die Winkelsumme variabel, so beweist diese Schlussweise nur, das es Dreiecke giebt, deren Winkelsumme beliebig wenig von 180° abweicht.]

das will sagen, in der That ein angeblicher Winkel: so sehe ich nicht, wie man an der Wirklichkeit des Durchschneidens einigen Anstand haben könnte. Denn, wie sich von selbst versteht, so fällt die Frage, ob zwei Linien sich durchschneiden, ganz weg, und findet nicht statt, sobald sich der Winkel angeben läßt, unter welchem sie sich durchschneiden. *Non entis nulla sunt praedicata.*

§. 17.

Nun kommt, so viel ich mir die Sache vorstelle, in der *Prop. XVI. Libr. III.* Etwas vor, das hieher dienen kann.

Dasselbst wird, ohne Rücksicht auf den controversirten 11ten Grundsatz erwiesen, dafs, wenn Ab (Fig. V.) auf den Diameter AP eines Cirkels senkrecht gezogen wird, so dafs diese Linie durch den Endpunkt des Diameters gehe, dieselbe ausser den Cirkel falle, oder den Cirkel ausserhalb in einem einzigen Punkte berühre; und dafs zwischen der Linie Ab und dem Cirkelbogen AB keine andre gerade Linie könne durchgezogen werden, die nicht den Cirkel in zween Punkten, z. E. A, B , schneide, so lange der Winkel BAb nicht kleiner, als jeder vorgegebene Winkel ist. Denn in diesem Fall würde er $= 0$ seyn, und daher AB auf Ab fallen, demnach nicht zwei, sondern nur eine Linie seyn.

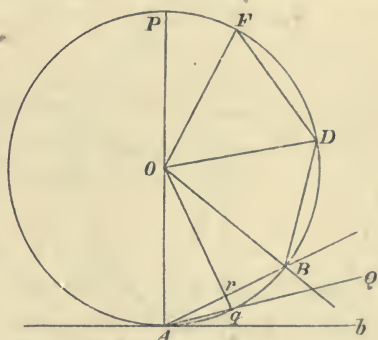


Fig. V.

Der Beweis, den Euklid giebt, kommt schlechthin darauf an, dafs die aus dem Mittelpunkt O auf AB fallende Perpendiculare ausser den Cirkel fallen, und demnach grösser als AO seyn müfste; welches seiner *Prop. XVIII. Libr. I.* zuwider ist. Demnach setzt dieser Beweis weder die Gröfse des Diameters, noch die Gröfse von AB , noch die Gröfse von der Perpendiculare, noch die Verhältnifs zwischen AB und AP , sondern schlechthin nur den Satz voraus, dafs die Perpendiculare auf die Seite des spitzen Winkels OAB falle, und dafs sie nicht grösser als AO seyn könne, sondern vielmehr kleiner seyn müsse, so gros oder klein alle diese Linien an sich auch immer seyn mögen:

§. 18.

Nun läfst sich weiter gehen und zeigen, dafs, so lange BAb nicht kleiner als jeder vorgegebene Winkel ist, auch AOB nicht kleiner als jeder vorgegebene Winkel seyn könne, und demnach > 0

seyen müsse. Denn da $BAb > 0$ ist: so läßt sich durch den Winkel BAb jede beliebige Linie AQ ziehen; und es wird auch $QAb > 0$ seyn. Da demnach, vermöge des erst angeführten Euklidischen Satzes, AQ nicht ausser den Cirkel fallen kann: so giebt es zwischen AB einen Durchschnittspunkt q . Dieses könnte aber nicht seyn, wenn AOB kleiner als jeder vorgegebene Winkel wäre. Demnach muß nothwendig $AOB > 0$, das will sagen, ein Winkel von angeblicher Grösse seyn. Bey $AOB = 0$ würde BO auf AO , und demnach AB auf Ab fallen; und so wäre $BAb = 0$, der Voraussetzung $BAb > 0$ zuwider.

Man sieht ohne Mühe, dafs auch dieser Beweis von der Grösse des Diameters AP und der Chorde AB ganz unabhängig ist; und dafs demnach der Durchschnittswinkel > 0 ist, so grofs oder klein

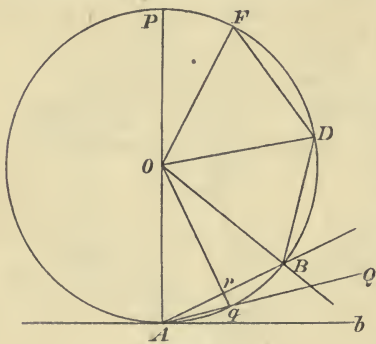


Fig. v.

AB und der Winkel BAb immer angenommen wird, nur dafs $BAb > 0$ sey, und demnach OAB ein spitzer Winkel bleibe. Da nun $OB = OA$: so ist auch $OBA = OAB$, und demnach

$$OAB + OBA < 180 \text{ Gr.}$$

Eben so, wenn Oq auf AB senkrecht fällt, ist $Ar = rB$, und

$$OAr + OrA < 180 \text{ Gr.}$$

Demnach mag bey dem rechten Winkel OrA der Winkel OAr , so wenig man will, kleiner als 90 Grade seyn:

so wird der Durchschnittswinkel $AOr > 0$, und daher in der That ein Durchschnitt seyn.

Dieses ist nun zum Beweise des Euklidischen Grundsatzes meines Erachtens mehr als hinreichend, weil es sich leicht eben so allgemein machen läßt. Ich werde es aber hier nicht ausführen, sondern nur bemerken, dafs, wenn man

$$OBD = ODB = ODF = OFD = \&c = OBA = OAB,$$

und

$$BD = DF = \&c = AB$$

macht, dieses eben so viel ist, als wenn die Chorde AB aus B in D , aus D in F , und so weiter, im Cirkel herumgetragen wird. Man wird auf beyderley Arten nicht nur Einmal, sondern so vielmal man will, im Cirkel ganz herumkommen, weil $AOB > 0$ ist, demnach nothwendig auch ein Multiplum von $AOB > 360$ Grad, und, so vielmal man will, grösser als 360 Grad seyn muß.

§. 20.

Sind demnach (Fig. IV) die Winkel aAB , bBA einander gleich und kleiner als 90 Grad: so läßt sich auf erst angezeigte Art die gleichseitige und gleichwinklichte Figur

$GECABDFH$

zeichnen; und wenn man fortfährt: so wird man damit im Kreise, so vielmal man will, herum kommen. Die Punkte G, E, C, A, B, D, F, H &c werden sämtlich in dem Umkreise eines Cirkels liegen, dessen Mittelpunkt O der

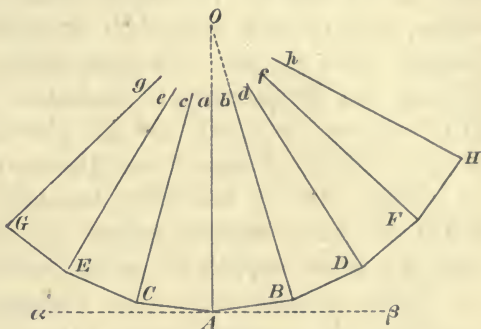


Fig. IV.

gemeinsame Durchschnittspunkt aller Linien Gg, Ee, Cc, Aa , &c seyn wird. Demnach kömmt auch hiebey die Frage, ob Aa, Bb sich durchschneiden, gleichsam zu späte und unschicklich vor.

§. 21.

Es giebt ferner mehrere Arten, einen Beweis des Euklidischen Grundsatzes so weit zu treiben, dafs das, was daran noch etwan zurücke bleibt, nicht nur augenscheinlich richtig ist, sondern auch allen Anschein hat, dafs es nachgeholt, und der Beweis dadurch ergänzt werden könne. Einige Beyspiele werden dieses ganz offenbar machen.

Es seyn (Fig. VI) die beyden Winkel aAB, bBA spitze und einander gleich: so sollen die Linien Aa, Bb zusammen laufen und sich durchschneiden. Man mache

$$bBC = cCB = bBA,$$

und $BC = AB$: so wird $aABb$ auf $cCBb$ passen, wenn die Figur längst der Linie bB zusammen gelegt wird. Es werde ferner AC gezogen, und

$$cCD = dDC = cCA,$$

und $CD = CA$ gemacht: so wird ebenfalls wiederum $aACc$ auf $dDCc$ passen, wenn man sich die Figur längst der Linie cC zusammengelegt vorstellt. Man ziehe ferner

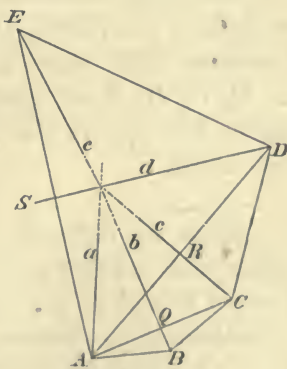


Fig. VI.

AD ; und wenn man eben so fortfährt, wird $aADd$ auf $eEDd$ passen.

Man kann auch leicht beweisen, daß bey Q, R, S , &c rechte Winkel sind. Daß aber von den Winkeln CAB, DAC, EAD , &c jeder doppelt so groß als der nächst vorhergehende ist, das ist zwar wahr; allein ohne die vorgängige Berichtigung des Euklidischen Grundsatzes wird es sich schwerlich erweisen lassen. Doch ich verlange hierbey nicht so viel. Es wird mir genug seyn, wenn ohne Zuziehung des Euklidischen Grundsatzes erwiesen werden kann, daß DAC grösser als CAB , und auf gleiche Art $EAD > DAC$, &c sey. So weit fällt die Sache in die Augen; und an sich betrachtet, sollte es leichter seyn zu beweisen, daß unter den Winkeln CAB, DAC, EAD , &c jeder folgende grösser ist, als wenn man beweisen sollte, jeder sey genau doppelt so groß, als der nächst vorhergehende.

Sollte es sich aber, ohne Rücksicht auf die Schwierigkeit der Parallellinien, erweisen lassen, daß die Winkel CAB, DAC, EAD der Ordnung nach immer grösser werden: so wird auch nothwendig folgen, daß von den Linien AC, AD, AE , &c Eine anfängt ausserhalb Aa zu fallen; wie denn dieses in dem Beyspiele der Figur bereits schon bey der dritten dieser Linien, AE , geschieht. Dieses hat aber den Erfolg, daß die Linien Aa, Bb, Cc, Dd, Ee , &c sich nothwendig in einem Punkte durchschneiden, welcher innerhalb dem Triangel ADE liegt. Denn so muß Aa , verlängert, nothwendig die Seite ED durchschneiden; und ehe dieses geschieht, muß sie bereits schon DdS durchschnitten | haben. Daß aber alle die Linien Aa, Bb, Cc, Dd, Ee , &c sich in Einem und eben dem Punkte durchschneiden, folgt aus der Art, wie die Figur längst den Linien bB, cC, dD , &c zusammen gelegt worden, ohne Mühe; so, daß ich mich dabey eben nicht aufhalten werde.

Man sieht demnach, daß hier nur noch zu beweisen bleibt, daß wenigstens die Winkel CAB, DAC, EAD , &c immer grösser werden. Uebrigens läßt sich eben so wie vorhin zeigen, daß die Punkte A, B, C, D, E , &c sämtlich in dem Umkreise eines Cirkels liegen, dessen Mittelpunkt der gesuchte Durchschnittspunkt der Linien Aa, Bb , &c ist.

§. 22.

Noch ein Beyspiel. Es seyn (Fig. VII) die Winkel aAB, bBA spitze und einander gleich. Man ziehe durch den Winkel aAB jede Linie AT ; und es ist, ohne Zuziehung des oft bemeldten Euklidischen Grundsatzes, zu beweisen, daß, wenn aus der Mitte von AB die Linie Cc senkrecht aufgerichtet wird, immer der abgeschnittene Theil SR kleiner als AS sey. Kann dieses erwiesen werden: so erhält man damit so viel, daß, wenn $ST = AS$ gemacht wird, der Punkt T

kommen, sondern das Eine derselben anfängt, ausserhalb Aa zu fallen. Die Sache an sich ist richtig. Aber sie muß ohne Zuziehung des 11ten Euklidischen Grundsatzes erwiesen werden. Kann dieses geschehen: so erhält man auf allen ausserhalb Aa fallenden Linien einen Punkt, der eben so wie die Punkte $D, E, \&c$ ausserhalb Bb fällt. Und zieht man aus diesem Punkt eine Linie in B : so hat man einen Triangel, welcher die beyden Linien Aa, Bb , und zugleich ihren Durchschnittspunkt in sich schließt oder umgiebt.

Um nun aber zu beweisen, das die Linien $Ad, Ae, Af, \&c$ sich in der That auf vorbemeldte Art gegen Aa nähern, und endlich ausserhalb Aa fallen, ziehe man AK mitten durch den Winkel DAB ; und da wird es genug seyn, wenn man zeigen kann, das jeder der Winkel $eAd, fAe, \&c$ grösser ist als der Winkel DAK oder KAB .

Zum Behuf dieses Beweises läst sich noch ferner anmerken, das jeder der Punkte $B, D, T, E, \&c$ von Cc gleich weit entfernt ist. Dieses kann ohne Mühe erwiesen werden, weil überhaupt $AS = ST, AC = CB$, und in C ein rechter Winkel ist. Ferner läst sich aus dem Mittelpunkte A der Cirkelbogen $k\beta$ durch k ziehen; und so wird $A\beta < AB$ seyn.

Nun soll noch bewiesen werden, das, wenn man aus jedem der Punkte $D, E, \&c$ z. E. aus D eine Linie in β zieht, der Winkel $D\beta A$ stumpf sey, und demnach die aus D an den Cirkel $k\beta$ zu ziehende Tangente $[Dt]$ unterhalb β falle. Denn so wird man zween gleiche und ähnliche oder auf einander passende Triangel $Aek,$

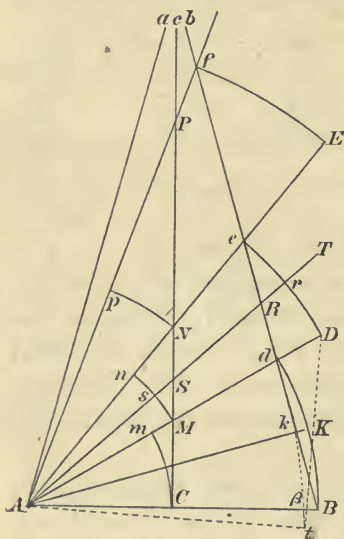


Fig. VII.

ADt erhalten, und daher die Winkel

$$eAk = DAt,$$

demnach

$$eAD = kAt,$$

und folglich

$$eAD > kAB$$

haben.

Ich habe aber nicht finden können, das sich, ohne die vorgängige Berichtigung des Euklidischen Grundsatzes, erweisen liesse, das $D\beta A > 90$ Gr. sey; ungeachtet es ohne diesen Grundsatz erweisbar ist, das sich durch Cc eine Menge von Perpendicularen ziehen lassen, welche die Linie $D\beta$ unter einem schiefen Winkel

schneiden, weil die aus D auf Cc fallende Perpendikuläre = CB und demnach $> C\beta$ ist.

§. 23.

Um dieses noch zu zeigen, so seyn (Fig. III.) in B, D rechte Winkel, und $CB < DE$. Man ziehe die Punkte C, E durch eine gerade Linie zusammen, und richte aus der Mitten von BD die Linie FG senkrecht auf. Man mache $Dc = BC$, und ziehe Gc . Wird nun die

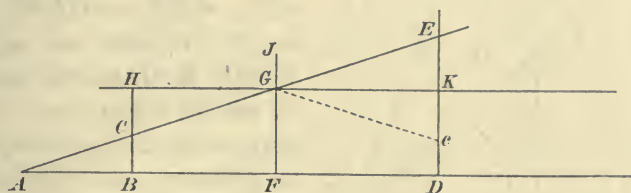


Fig. III.

Figur längst der Linie GF zusammen gelegt: so fällt B auf D , C auf c , demnach GC auf Gc ; und es ist $cGF = CGF = JGE$. Da nun $EGc > 0$ ist: so sind die Winkel cGF, JGE, CGF sämtlich spitze. Demnach ist auf der Linie CE wenigstens ein Punkt G gefunden, wo dieselbe die Perpendikuläre GF unter einem schiefen Winkel schneidet.

Ich merke noch im Vorbeygehen an, daß | sich der Satz um-162 kehren läßt, indem man, wenn $CGF < 90$ Gr. ist, leicht zeigen kann, daß $CB < DE$ sey. Denn wird die Figur längst der Linie GF zusammen gelegt: so fällt der Winkel CGF auf cGF , und CB auf Dc . Da nun $FGE = JGE$ kleiner als 90 Gr. ist: so ist $FGE + JGE < 180$ Gr. Demnach $EGc > 0$; demnach auch $Ec > 0$, und $ED > Dc$, oder $ED > BC$.

§. 24.

Wiederum seyn (Fig. VIII.) in C, c rechte Winkel, und $CB > cb$. Man trage CB aus C in A , und cb aus c in a , und ziehe die Linien Ab, Ba, Aa, Bb : so läßt sich die Figur längst der Linie CH zusammen legen; und es wird A auf B , a auf b , demnach Ab auf Ba fallen; und so muß der Durchschnittspunkt dieser beyden Linien E auf der Linie CH seyn.

Man mache ferner $CM = Ec$, und $CN = cb$, und ziehe NM : so werden die Winkel $NMC = bEc$ seyn; demnach auch $NMC = AEC$. Da nun auf diese Art die Linien NM, AE nicht zusammen laufen, und $CN < CA$ ist: so ist nothwendig auch $CM < CE$; demnach auch $Ec < EC$. Trägt man nun CE aus E in H , und zieht HJ auf CH

senkrecht: so wird $HJ = AC$, und $EJ = EA$ seyn. Da demnach auch $HJ = CB$ ist: so darf man nur durch E die Linie FEK senkrecht

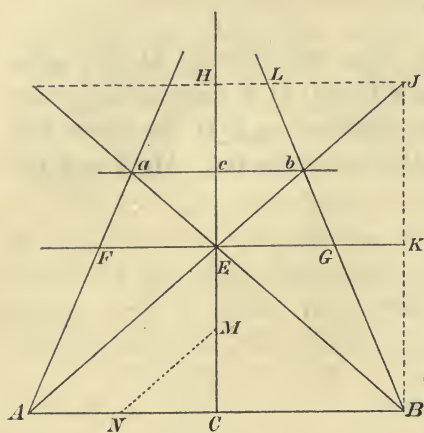


Fig. VIII.

ziehen, und indem man JB zieht: so wird man in K rechte Winkel haben. Denn wird die Figur längst der Linie FK zusammen gelegt: so fällt H in C , J in B , und damit KJ in KB ; und es wird $JKE = BKE$ demnach $= 90$ Gr.; und so müssen die Winkel in G , so wie auch die in F , schiefe Winkel seyn. Also ist auch hierdurch wiederum ein Punkt G gefunden, wo die senkrechte Linie GE mit Bb schiefe Winkel macht. Es ist auch wiederum $HL < HJ$; folglich $HL < CB$.

Und so läßt sich der Beweis fortsetzen.

Man kann diesen Satz ebenfalls umkehren. Es sey nämlich $EGb < 90$ Gr. so fälle man aus jedem Punkt B auf CH die Linie BC senkrecht, und mache $CA = CB$. Aus A ziehe man Ab durch E , und fälle aus b die Perpendikuläre bc auf CH : so wird $bc < BC$ seyn. Denn setzte man $bc = BC$: so würde b in J und G in K fallen, demnach $bGE = 90$ Grad seyn. Und eben so würde $bGE > 90$ Grad gefunden werden, wenn man $bc > BC$ setzen wollte. Beydes der Bedingung $bGE < 90$ Gr. zuwider.

§. 25.

Es seyn nun (Fig. IX.) in A rechte Winkel, und $DBA < 90$ Gr. Die Linie AB werde, so viel man will, verlängert. Da nun $DBA < 90$ Gr. ist: so fällt aus jedem Punkt E die senkrechte Linie EF auf die Seite BD . Da nun in A rechte Winkel sind: so ist EGA und damit auch $FGH < 90$ Gr. Demnach fällt aus F die senkrechte Linie FH gegen C . Da nun $DFE = 90$ Gr. so ist $DFH < 90$ Gr. Wiederum, da $eBf < 90$ Gr. ist: so fällt aus jedem Punkt e die senkrechte Linie ef auf die Seite Bf , und verlängert macht sie $egA < 90$ Gr., weil in A rechte Winkel sind. Demnach fällt aus f die senkrechte fh zwischen Ag . Da nun $Bfg = 90$ Gr. so ist $Bfh < 90$ Gr.

Der Anstand, als ob ef verlängert mit Ag nicht zusammen laufe, hat hiebey nichts zu sagen. Denn da fh auf Ag trifft: so wird um desto ehender noch $Bfh < 90$ Gr.

So viel also aus jeden Punkten der Linie eE Perpendikularen auf DI können gefällt werden, so viele schiefe Winkel DFH , Dfh finden sich auch, demnach allerdings unzählliche. Dieses war nun, in Absicht auf das zu Ende des §. 22. gesagte, zu beweisen. Ich habe übrigens nicht finden können, daß man ohne Zuziehung des Euklidischen Grundsatzes damit ausreiche.

§. 26.

Liefs es sich aber ohne diesen Grundsatz erweisen, daß, so oft ein Winkel $DBA < 90$ Gr. ist, auch jeder andere Winkel $DFH < 90$ Gr. sey, wo auch immer der Punkt F auf der Linie DF angenommen wird: so kann auch ohne viele Mühe erwiesen werden; daß alle | die Winkel DFH , DBA , Dfh , &c einander gleich sind.

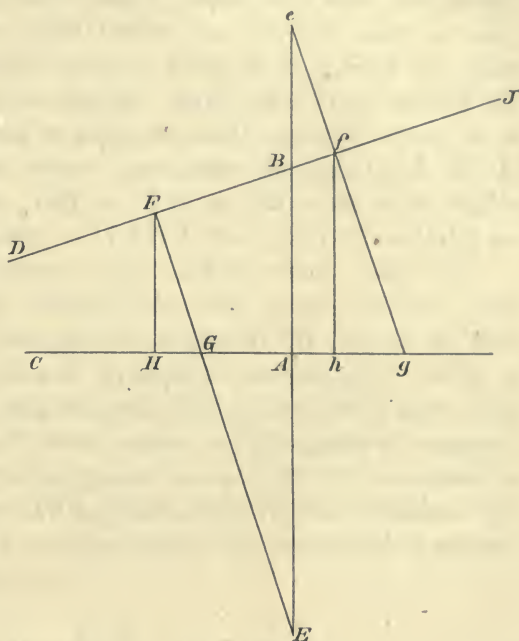


Fig. IX.

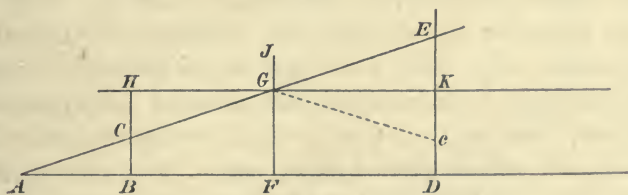


Fig. III.

Denn man setze, in der 3ten Figur in F seyen rechte Winkel, und $CGF < 90$ Gr. Man mache nach Belieben $BF = FD$, und richte in B , D , Perpendikularen auf. Oder, indem man den Punkt E nach Belieben annimmt: so fälle man aus demselben die Linie ED auf FD senkrecht, trage FD aus F in B , und richte in B die Perpendikulare BH auf. Wird nun die Figur längst der Linie FG zusammen gelegt: so wird FB auf FD , BC auf Dc fallen; und es wird

$$CGF = JGE = cGF$$

seyn. Man setze nun, die Winkel ACB , AED seyn ungleich: so sind auch GcE , GEc , und damit auch die Seiten GE , Gc ungleich. Dieses hat aber den Erfolg, daß, wenn GK durch FG senkrecht, oder welches einerley ist, mitten durch den Winkel EGc gezogen wird, die Winkel in K schief seyn werden. Damit aber würden auch die Winkel in D schief seyn. Es sind aber vermöge der Konstruktion, in D rechte Winkel. Demnach geht es nicht an, daß man die Winkel ACB , AED ungleich setze; und so muß $ACB = AED$ seyn. Damit erhält man aber $Ge = GE = GC$; ingleichen $EKG = cKG = CHG = 90$ Grad, und $BHKD$ ist ein Rectangel α .

Ich setze diesen ohnehin kurz vorgetragenen Beweis nicht weiter fort, weil man leicht sieht, daß derselbe auf dem Satze beruhet, daß man wo KGF , DFG rechte Winkel sind, aus dem schiefen Winkel in K auf den schiefen Winkel in D schliessen könne. Dieses ist es aber eben, wovon noch ein von dem Euklidischen 11ten Grundsätze unabhängiger Beweis gefunden werden soll. Kann derselbe aber gefunden werden: so erhellet aus dem erstgesagten, daß damit zugleich auch die Gleichheit der Winkel ACB , AED und die Winkel eines Rectangels α bestimmt und erörtert sind.

3) Theorie der Parallel-Linien.

§. 27.

Die Theorie der Parallellinien, die ich hier zu geben mir vorgenommen, findet ihre Stelle unmittelbar nach der *Prop. XXVIII. Libr. I.* der Elemente des *Euklids*, weil bis dahin der 11te Grundsatz nicht gebraucht wird, und auch hier nicht gebraucht werden soll. Dieses bestimmt den Gesichtspunkt, aus welchem nachfolgende Theorie anzusehen ist; und man wird sich eben deswegen damit nicht aufhalten, wenn ich sehr bekannte Sätze, wie z. E. die durchaus gleiche Entfernung der Parallellinien α als unbekannt und sehr zweifelhaft werde anzusehen haben. Auch dieses habe ich noch voraus zu erinnern, daß ich nicht bloß gedenke, solche Sätze zu beweisen, sondern zugleich auch die dawider gemachten Schwierigkeiten deutlich ins Licht zu setzen.

Daraus wird sich zeigen, daß sich die ganze Sache auf eine dreyfache Hypothese reduciren läßt, von welchen jede einer besondern Theorie fähig ist, und wovon zwo nur in ihren entfernten Folgen umgestossen werden können; so daß auch von den unmöglichen Hypo-

müssen erwiesen werden, bis es sich zeigt, dafs sie nicht bestehen. Auf gleiche Art werden selbst von der wahren Hypothese mehrere Sätze *ex hypothesi* erwiesen, ehe es sich zeigen läfst, dafs sie wirklich die wahre ist.

In der Geometrie schien mir ein solches Verfahren sehr unerwartet. Da es aber darin vorkömmt: so kann es zugleich die Art, mit physischen Hypothesen umzugehen, wie durch ein Beyspiel erläutern. In dieser Absicht kann es leicht seyn, dafs ich aus den beyden irrigen Hypothesen mehrere Folgen ziehe, als es, blofs um sie umzustossen, nöthig wäre.

§. 28.

Dafs sich auf einer ebenen Fläche gerade Linien ziehen lassen, die, so viel man sie auch auf beyden Seiten verlängert, nicht zusammenlaufen, wird durch die *Prop. XXVII* und *XXVIII* ausser allen Zweifel gesetzt. Hingegen bleibt dabey unausgemacht, ob es ausser den daselbst angegebenen nicht noch andre giebt. Und selbst von denen in bemeldten beyden Propositionen erwiesenen bleiben noch mehrere Eigenschaften und Symptomata zu bestimmen. Hiebey werde ich nun den Anfang machen.

§. 29.

Es seyn (Fig. X.) in *A* und *B* rechte Winkel; oder, indem man *AC* durch *AB* senkrecht gezogen, werde *AB* nach Belieben angenommen, und der Winkel *ABD* ebenfalls = 90 Gr. gemacht: so sind, vermöge erstbemeldter *Prop. XXVII*, *XXVIII*; *BD*, *AC* Linien, die beyderseits, soviel man will, verlängert, nicht zusammenlaufen.

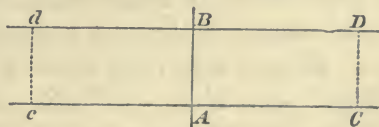


Fig. X.

Ferner läfst sich leicht zeigen, dafs, wenn die Figur längs der Linie *AB* zusammengelegt wird, der Winkel *dBA* auf *DBA*, ingleichen *cAB* auf *CAB*, und demnach *Bd* auf *BD*, und *Ac* auf *AC* fällt, weil in *A*, *B* alles rechte Winkel sind. Die Linien *dD*, *cC* sind demnach auf beyden Seiten des Striches *AB* einander durchaus gleich und ähnlich, so dafs, was von der einen Seite | erwiesen wird, mit Bey-327 behaltung eben der Bedingungen auch auf der andern Seite statt findet.

§. 30.

So z. E. wenn man *Ac = AC* macht, und in *c*, *C* Perpendikularen *cd*, *CD* aufrichtet: so wird *cd = CD*, *Bd = BD*, *cdB = CDB* seyn.

§. 31.

Eben so, wenn $Bd = BD$ gemacht wird, und man fällt aus d , D senkrechte Linien dc , DC auf cC : so wird $cA = AC$, $cdB = CDB$, und $cd = CD$ seyn.

§. 32.

Wiederum, wenn man $cA = CA$, und $dB = BD$ macht: so wird man ebenfalls $cd = CD$, $Ac d = ACD$, und $BDC = Bdc$ haben.

§. 33.

Wenn es demnach noch mehrere Arten von nicht zusammenlaufenden geraden Linien geben sollte: so wird diejenige, wo A , B rechte Winkel sind, immer wegen der vollkommenen Gleichheit und Aehnlichkeit auf beyden Seiten von AB etwas voraus haben.

Der Umstand, daß dD , cC nicht zusammenlaufen, läßt noch unbestimmt, ob die Entfernungen cd , CD immer gleich sind, oder grösser oder kleiner werden. Wie dem aber auch immer sey: so weiß man, daß es auf beyden Seiten von AB durchaus einerley Beschaffenheit damit habe.

§. 34.

Man kann aber auch vermitteltst schiefer Winkel gerade Linien ziehen, die nicht zusammenlaufen; und da ist allerdings die Frage, ob diese nicht von der erst betrachteten Art verschieden sind?

Es seyn z. E. (Fig. XI.) die Winkel $BAC = ABE$, oder $FAK = EBA$, oder $EBA + FAB = 180^\circ$: so folgt aus vorhin bemeldten

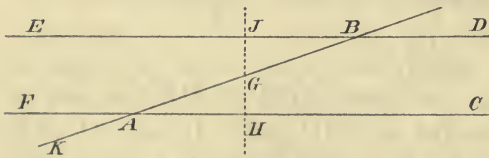


Fig. XI.

Prop. XXVII und XXVIII, daß die Linien ED , FC ebenfalls nicht zusammenlaufen, so viel oder wenig schiefe Winkel in A und B seyn mögen. Wollte man nun auch hier die Figur

längs der Linie AB zusammenlegen: so würde man nichts Congruirendes erhalten, weil keine | Linie auf die andre und kein Winkel auf den andern passen würde. Und man würde höchstens daraus schliessen können, daß sich EB gegen FA eben so, wie AC gegen BD , verhalte; so daß z. E. wenn sich EB gegen FA näherte, sich eben so AC gegen BD nähern würde α .

§. 35.

Man theile aber AB in zween gleiche Theile AG, GB . Aus G fälle man GH auf AC , und GJ auf BE senkrecht: so wird man $JG = GH$, und $AH = JB$, und $AGH = BGJ$ erhalten. Und da AGB eine gerade Linie ist: so werden $AGH = BGJ$ Scheitelwinkel, und demnach JGH auch eine gerade Linie seyn. Da nun in J, H rechte Winkel sind: so läßt sich die Figur längs der Linie JH zusammenlegen; und es wird EJ auf DJ , und FH auf CH passen. Dadurch läßt sich also diese, mittelst der schiefen Winkel A, B , gezogene Art von nicht zusammenlaufenden geraden Linien auf die vorhin betrachtete reduciren; weil hier in Absicht auf JH eben das gilt, was bey der 10ten Figur in Absicht auf AB gesagt worden.

Man kann auch den Fall umkehren. Denn man setze, daß Anfangs ED, FC durch JH senkrecht wären gezogen worden: so darf man nur $JG = GH$ machen, und durch G jede Linie AB ziehen; so wird man allemal auch $AG = GB$, und $GAH = GBJ$ erhalten.

§. 36.

Es ist hiebey angenommen worden, daß sich aus $AG = GB$, $GAH = GBJ$, und $H = J = 90$ Gr. auf die Gleichheit und Aehnlichkeit der beyden Triangel AGH, BGJ schliessen lasse. Dieses hat keinen Anstand. Denn man darf nur den Winkel GBJ dergestalt auf GAH legen, daß GB auf GA falle: so wird G auf G, B auf A , und BE auf AC passen. Nun läßt sich aus G auf AC nur eine Perpendikuläre GH ziehen, weil man sonst einen Triangel mit zween rechten Winkeln erhalten würde. Demnach fällt nicht nur die Linie BE auf AC , sondern insbesondre auch der Punkt J auf den Punkt H . Und so sind die Triangel AGH, BGJ durchaus auf einander passend. 329

§. 37.

Uebrigens hätte in dem §. 35 auch schlechthin nur GH auf AC senkrecht gezogen und gegen J verlängert werden können. Denn so würde man $AG = BG, GAH = GBJ$, und $AGH = BGJ$ gehabt haben. Und damit wäre ebenfalls $GJB = GHA = 90$ Gr. und $GH = GJ$ gewesen. (*Prop. XXVI. Libr. I. Elem. Euclid.*)

§. 38.

Da demnach in Absicht auf die Linie JH eben das gilt, was in der 10den Figur in Absicht auf die Linie AB gesagt worden: so sind die Linien ED, FC (Fig. 11.) in der That nicht von einer von den

Linien dD , cC (Fig. 10.) verschiedenen Art. Dadurch wird aber allerdings die Theorie der Parallellinien abgekürzt, weil die Eigenschaften und Symptomata, so sich in Absicht auf die 10de Figur erweisen lassen, ohne Mühe auf die 11te Figur angewandt werden können.

§. 39.

Ich werde demnach zu der 10den Figur zurück kehren, und die Voraussetzung, dafs in A , B rechte Winkel sind, beybehalten.

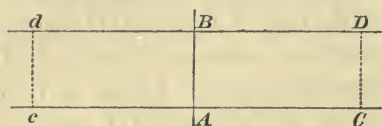


Fig. X.

Es seyn nun in C ebenfalls rechte Winkel: so laufen erstlich auch AB und CD nicht zusammen. Die Frage kömmt nun eigentlich auf die Winkel

in D an; und da müssen wir nothwendig drey Hypothesen annehmen. Denn es könnte

$$\text{I}^\circ. BDC = 90 \text{ Gr.}$$

$$\text{II}^\circ. BDC > 90 \text{ Gr.}$$

$$\text{III}^\circ. BDC < 90 \text{ Gr.}$$

seyn.

Diese drey Hypothesen werde ich der Ordnung nach annehmen, und Folgen daraus ziehen. Es wird sich zeigen, dafs diese Folgen ziemlich weit können und theils müssen getrieben werden, ehe man auf ein *Quod est absurdum* oder *Quod est contra hypothesis* verfällt.

330 Der dritte Ausdruck *Quod est contra Definitionem*, | oder auch *per Definitionem*, wird dabey gar nicht vorkommen, weil die Definition selbst wegbleibt, und, wenn man sie auch gebrauchen wollte, nichts beweisen würde.

Erste Hypothese.

§. 40.

Es seyn demnach (Fig. XII.) AC , BD , AB , CD gerade Linien, und A , B , C , D rechte Winkel: so wird $AB = CD$, und $AC = BD$ seyn.

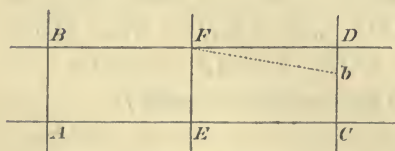


Fig. XII.

Man theile [nämlich] AC in $AE = EC$, und richte in E die Linie EF senkrecht auf: so läßt sich die Figur längs der Linie EF zusammenlegen, so dafs EA auf EC ,

EAB auf ECD fällt. Setzt man nun, es seyn AB , CD nicht gleich: so ist entweder $AB < CD$, oder $AB > CD$.

Im ersten Fall mache man $Cb = AB$, und ziehe Fb : so wird $FbC = FDC = 90$ Gr.; demnach werden in dem Triangel bFD zween rechte Winkel D, b seyn, welches ungereimt ist. (*Prop. XVII.*) Demnach kann nicht $AB < CD$ seyn.

Wäre nun ferner $AB > CD$: so würde b oberhalb D fallen, und wiederum einen Triangel von zween rechten Winkeln geben. Demnach kann auch nicht $AB > CD$ seyn. Demnach ist nothwendig $AB = CD$. Und so fällt b auf D ; und es ist zugleich auch $BFE = DFE = 90^\circ$. Demnach auch $AB = EF$.

Auf eben diese Art wird erwiesen, dafs $BD = AC$ sey, wenn man durch die Mitten von AB eine senkrechte Linie zieht.

§. 41.

Es seyn wiederum (Fig. XIII. und XIV.) AC, BD, AB, CD gerade Linien, und in A, B, C, D rechte Winkel. Auf AC nehme man jeden beliebigen Punkt E , und richte aus demselben EF senkrecht auf: so wird $EF = AB = CD$, und in F werden rechte Winkel seyn.

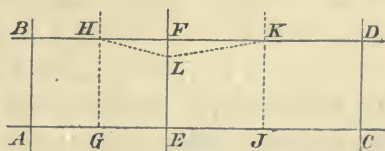


Fig. XIII.

Man halbire [nämlich] AE in G , CE in J , und richte in G und J Perpendikularen GH, JK auf. Setzt man nun, es sey $EF > AB$: so mache man $EL = AB$; und | so 331 wird auch $EL = CD$ seyn (§. 40). Man ziehe HL, KL : und so ist $HLE = HBA = 90$ Gr. Ingleichem $KLE = KDC = 90$ Gr. welches klar erhellet, wenn man die Figur längs den Linien GH, JK zusammenlegt. Hieraus folgt aber, in Absicht auf die 13de Figur, dafs HLK eine gerade Linie sey. Da nun auch HK eine gerade Linie ist: so würden zweo gerade Linien einen Raum schliessen, welches nicht angeht. Demnach kann L nicht unterhalb, und aus gleichem Grunde auch nicht oberhalb F fallen. Und so müssen nothwendig $EF = AB = CD$, und in F rechte Winkel seyn.

In Ansehung der 14ten Figur folgt eben dieses, weil sich aus Einem Punkt L nicht zweo Linien LH, LK

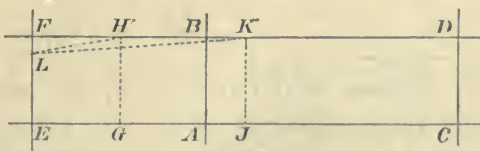


Fig. XIV.

senkrecht auf EL ziehen lassen. Demnach mufs L in F fallen; und so sind in F rechte Winkel, und es ist $EF = AB = CD$.

§. 47.

Daraus wird ohne Mühe die Folge gezogen, daß die Linien LH , CG , gegen G verlängert, einander durchschneiden müssen. Denn weil die Linien FL , EK , GH , &c immer um einen gleichen Theil LM kürzer werden: so müssen die Punkte L , K , H , &c einmal unter CG kommen. Daß der Durchschnittswinkel beyder Linien LH , CG jeden Winkeln JKH , ikH , &c gleich sey, folgt ebenfalls ohne Mühe.

§. 48.

Die Sache läßt sich nun folgendermassen umkehren.

Es seyn G , F , rechte Winkel, und die Winkel JHL , HLF spitze, aber einander gleich: so wird jeder Winkel

$$Hke = JHL = HLF$$

seyn. Denn man halbire GF in E . Aus E richte man EK senkrecht auf; und durch K ziehe man JK ebenfalls senkrecht: so ist erstlich $GJK = FMK$, und $JK = MK$. (§. 30.) Da nun $JKH = MKL$, und $JHK = KLM$ ist: so sind die Triangel HJK , LMK einander gleich und ähnlich; demnach der Winkel $HJK = LMK$; demnach auch $LMK = KMF = 90$ Gr.

Da nun solchergestalt in J , M , G , F , rechte Winkel sind: so folgt schlechthin und durchaus Alles was vorhin (§. 43—47.) über die Figur gesagt worden. Jede Winkel Hke sind $= HKE$; und die Linien LH , FG , gegen G verlängert, schneiden sich unter einem Winkel, der dem Winkel JKH oder jedem Winkel ikH gleich ist.

§. 49.

Es kann ferner die Sache noch auf folgende Art umgekehrt werden.

Man setze $GE = EF$. In G , E , F , seyn rechte Winkel. Die Linie HL sey gerade; und es sey

$$FL - EK = EK - GH.$$

Man trage GH in FP , und EK in FM , und ziehe KM und KP : so werden die Winkel

$$HKE = QKL = PKE,$$

ingleichem die Winkel $EKM = FMK$, und $QKM = LMK$, und $LM = MP$ seyn.

Denn HKE , QKL sind Scheitelwinkel; demnach sind sie einander gleich. Wird ferner die Figur längs der Linie EK zusammengelegt: so fällt G auf F , GH auf FP ; demnach KH auf KP , und folglich EKH auf EKP ; und so ist

$$EKH = EKP = QKL.$$

Dafs ferner $EKM = FMK$, und $QKM = LMK$ sey, folgt aus dem §. 30, wenn man sich eine, mitten auf EF errichtete Perpendikulare und längs derselben die Figur zusammengelegt gedenkt. Endlich ist $PM = ML$, weil

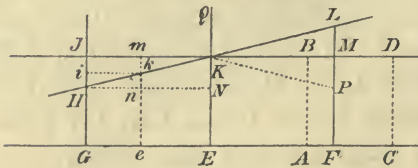


Fig. XV.

und $ML = FL - EK$,
 $PM = EK - GH$

ist, und weil vorausgesetzt worden, dafs

$$FL - EK = EK - GH$$

sey.

Nun sage ich ferner, dafs EKM, FMK rechte Winkel sind, und folglich damit Alles gilt, was vorhin (§. 43. und folg.) über die Figur gesagt worden. Der Beweis, dafs KMF ein rechter Winkel sey, gründet sich auf einen Lehnsatz, den ich im folgenden Paragraph vortragen werde, um hier die Ordnung der Gedanken nicht zu unterbrechen.

Man setze demnach, die Winkel in M seyn schief, z. E. $KMP < 90$ Gr.: so wird $KML > 90$ Gr. seyn. Daraus folgt aber, dafs, weil $KM = KM$ und $ML = MP$ ist, der Winkel $LKM < MKP$ sey. (§. seqq.) Dieses 334 gehet aber nicht an. Denn vermöge des vorhin erwiesenen ist $QKM = LMK$, demnach > 90 Gr.; und $EKM = KMF$, demnach < 90 Gr. Da nun also

$$QKM > EKM$$

und hingegen

$$QKL = EKP$$

ist: so bleibt, wenn man abzieht,

$$LKM > PKM.$$

Setzt man hingegen $KMP > 90$ Gr.: so wird $KML < 90$ Gr. seyn. Und damit ist auch $MKE > QKM$, und folglich, wenn man $QKL = EKP$ abzieht, bleibt $PKM > MKL$. Da nun aber $KMF > KML$ gesetzt worden, und $KM = KM, ML = MP$ ist; so folgt hieraus, dafs der Winkel $PKM < MKL$ seyn müfste; welches aber mit dem erst gefundenen $PKM > MKL$ nicht bestehen kann.

Demnach läfst sich weder $KMP > 90$ Gr. noch $KMP < 90$ Gr. setzen; und so müssen in M rechte Winkel seyn. Da nun $EKM = FMK$ erwiesen worden: so ist auch $EKM = 90$ Gr. Und so, weil in K, M, F, E rechte Winkel sind, gilt Alles, was §. 43. und folg. von der Figur gesagt worden. LH, FG , verlängert, laufen auf der Seite G zusammen, und durchschneiden sich unter einem Winkel, der jeden Winkeln $ikH, JKH, LKM, \text{u. gleich}$ ist.

§. 50.

Der Lehnatz, von welchem erst die Rede war, ist folgender.

Die Linien KM , PL (Fig. XVI.) durchschneiden sich in M schief; und es sey $MP = ML$. Man ziehe KL , KP : so wird, wenn $KML > 90$ Gr. ist, $LKM < PKM$ seyn.

Aus L falle Lq auf KM senkrecht; und eben so werde aus P die Linie Pr durch KM senkrecht gezogen, und $pr = pP$ gemacht.

Da nun $pMP = qML$, $PM = ML$, und in p , q rechte Winkel sind: so sind die Triangel pPM , qLM einander gleich und ähnlich. (§. 36.)

Demnach ist

$$Lq = Pp = pr.$$

Wird also durch rL eine gerade Linie gezogen: so läuft diese mit KM auf

keiner Seite zusammen. Denn zieht man durch M die Linie MR auf KM senkrecht, und legt die Figur längs MR zusammen: so fällt p auf q , pr auf qL , und Rr auf RL . Demnach sind in R rechte Winkel. Damit ist nun $rKM > LKM$. Da aber $rKM = PKM$ ist: so ist auch $PKM > LKM$. Und dieses war zu beweisen.

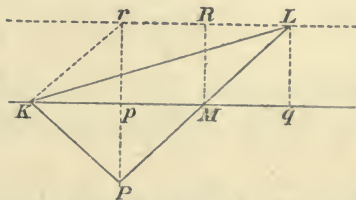


Fig. XVI.

§. 51.

Man sieht aus dem bisher gesagten, dafs ich nicht nur die erste Hypothese und ihre Folgen für sich betrachtet, sondern auch einige andre zugleich mitgenommen habe, welche sowohl bey derselben zugleich statt haben und eine Folge davon sind, als auch dieselbe nach sich ziehen, und in beyden Absichten, das will sagen, gerade und umgekehrt damit verbunden sind.

Man kann auch leicht voraus sehen, dafs eben dadurch die beyden andern Hypothesen sehr merklich eingeschränkt und näher bestimmt werden; weil dabey nothwendig alle die Möglichkeiten ausgeschlossen bleiben, wodurch man auf die erste Hypothese verfallen würde.

Uebrigens ist bey der ersten Hypothese besonders merkwürdig, dafs ein einziges Rectangel alle andre von jeder Grösse und Verhältnifs der Seiten nach sich zieht; und dafs ebenfalls ein einziges Trapezium $GHLF$ (Fig. XV.), wo G , F rechte Winkel sind, und $IHL = HLF$ ist, sowohl die Rectangel als jede andre Trapezia und zusammenlaufende Linien zur Folge hat; und dafs Alles dieses sich ebenfalls einfindet, wenn auch nur in Einem Fall

$$FL - EK = EK - GH$$

ist.

Zwote Hypothese.

§. 52.

Da es aber bey Allem, was über die erste Hypothese gesagt worden, unausgemacht bleibt, ob dieselbe möglich oder unmöglich, wahr oder falsch ist: so werde ich zu der andern Hypothese fortschreiten, und ihre Symptomata untersuchen.

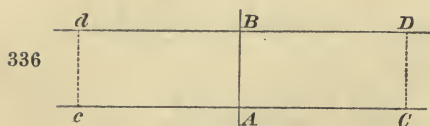


Fig. X.

Bey dieser sind in A, B, C, c (Fig. X.) rechte Winkel; BDC aber wird stumpf gesetzt. | Da nun wegen der rechten Winkel in A und B , auf beyden Seiten der Linie AB , Alles einerley Bewandtnifs hat: so wird es, überhaupt betrachtet, genug seyn, die Symptomata für die eine Seite zu beweisen, und es, wo etwan beyde Seiten in Betrachtung gezogen werden müssen, ausdrücklich anzuzeigen.

§. 53.

Es seyn nun in A, B , (Fig. XVII.) rechte Winkel; und so auch in C, E, G , &c. Der Winkel D oder BDC sey stumpf: so ist erstlich

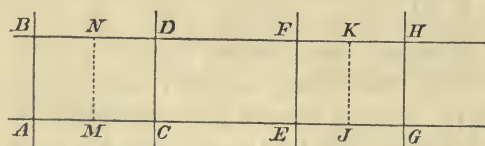


Fig. XVII.

$DC < AB$. Denn man setze $CD = AB$. Man halbire AC und richte die Perpendikulare MN auf. Wird nun nach dieser die Figur zusammengelegt: so fällt A auf C , AB auf CD ; demnach NB auf ND ; und so wäre $NDC = NBA$; der Voraussetzung zuwider, dafs B ein rechter, D ein stumpfer Winkel sey. Wollte man $CD > AB$ setzen: so würde auf eben die Art erhellen, dafs $NDC < NBA$ seyn müfste; welches noch mehr der Voraussetzung zuwider wäre. Demnach ist $CD < AB$.

§. 54.

Auf eben die Art erhellet, dafs auch $BD < AC$ sey, wenn man mitten durch AB eine senkrechte Linie zieht.

§. 55.

Ferner, so viel man auch auf AG senkrechte Linien EF, GH aufrichtet, oder aus BH auf AG herunterfällt, werden sie sämtlich unter sich ungleich seyn; oder man findet nicht zwo, die einander

gleich wären. Es versteht sich, daß sie auf gleicher Seite des Striches AB genommen werden. (§. 52.)

Man setze, es sey z. E. $EF = GH$. Wird demnach mitten auf EG die senkrechte Linie JK aufgerichtet, und die Figur längs derselben zusammengelegt: so wird KF auf KH fallen. Demnach werden in K rechte Winkel seyn. Damit ist aber auch D ein rechter Winkel. (§. 41.) Da nun dadurch die Voraussetzung umgestossen wird: so kann auch nicht $EF = GH$ seyn.

§. 56.

337

Es sind aber nicht nur die Senkstriche CD , EF , GH durchaus ungleich, (§. 55.) sondern jeder von AB entferntere ist kleiner als jeder nähere.

Man setze erstlich, es sey $EF > CD$. Da nun auch $AB > CD$ ist: so giebt es zwischen AC und zwischen CE nothwendig solche Perpendikularen, die einander gleich sind; weil sonst die Linie BF sich sprungsweise von AE entfernen müßte, um in F wiederum entfernter zu seyn, als sie in D war. Nun aber ist ein solches Entfernen der Natur der geraden Linie, die Gleichheit der Perpendikularen aber dem vorhergehenden §. 55 zuwider. Demnach kann auch nicht $EF > DC$ seyn. Da nun auch $EF = DC$ nicht angeht (§. 55.): so muss $EF < DC$ seyn.

Ist aber $EF < DC$: so wird auf eben die Art erwiesen, daß auch $HG < EF$ sey. Denn man setze, es sey $HG > EF$: so giebt es zwischen EG und zwischen AE nothwendig solche Senkstriche, die einander gleich sind; weil sonst die Linie BH sich sprungsweise von AG entfernen müßte. Nun können aber auch nicht zween Senkstriche einander gleich seyn. Demnach geht es nicht an, daß $GH > EF$ sey. Da nun auch nicht $GH = EF$ seyn kann (§. 55.): so ist nothwendig $GH < EF$.

§. 57.

Ich habe diesen Beweis auf das Gesetz der Continuität gegründet, weil er sich auf diese Art am kürzesten vortragen läßt. Ich glaube auch nicht, daß er dadurch minder evident und schlüssig sey, als wenn er auf die Euklidischen Grundsätze wäre gebaut worden. Indessen läßt er sich allerdings auch darauf gründen.

Es seyn in A, B, E, G , (Fig. XVIII.) rechte Winkel. Die Linie BH [sey] gerade; (welches sich zwar für sich versteht, aber der Umstände wegen erinnert werden muß) AB sey grösser als EF und GH ; hingegen GH grösser als EF . Man halbire AG in N , und EG in M . Aus N, M richte man Perpendikularen Nn, Mm auf. Ferner

338 mache | man $Gb = AB$, und $Gf = EF$, und ziehe nb , ingleichem fm bis in p verlängert. Endlich ziehe man aus p die Linie pP auf AG

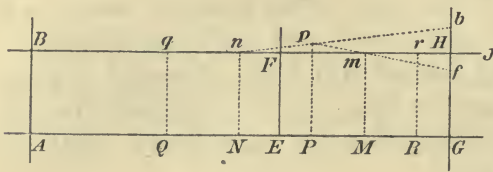


Fig. XVIII.

senkrecht herunter; und indem man $QN = NP$, und $RM = MP$ macht, richte man in Q, R , die Perpendikularen Qq, Rr auf.

Ich sage, es sey $Qq = Rr$.

Denn, legt man die Figur längs der Linie Nn zusammen: so fällt AB auf Gb , und Qq auf Pp . Legt man aber die Figur längs der Linie Mm zusammen: so fällt EF auf Gf , und Pp auf Rr ; oder mr auf mp , wenn man MG auf ME legt. Demnach ist $Pp = Rr$. Da nun auch $Pp = Qq$ ist: so ist $Rr = Qq$. Das Uebrige des Beweises ist nun wie §. 56.

§. 58.

Was nun erst in Ansehung der Senkstriche $EF, GH, \&c$ (Fig. XVII.) erwiesen worden, gilt auch in Ansehung der Winkel $F, H, \&c$. Sie sind sämtlich stumpf, durchaus ungleich, und jeder von B entferntere z. E. H , ist stumpfer, als jeder nähere F .

Dafs sie sämtlich stumpf sind, erhellet ohne Mühe daraus, dafs jede $GH < AB$ ist. Auf diese Art fällt AB (Fig. XVIII.) beym Zusammenlegen [längs der Linie Nn] auf Gb . In b sind, wie in B , rechte Winkel. Und so ist in dem Triangel nbH der Winkel $nHb < 90$ Gr. Demnach $nHG > 90$ Gr.

Dafs ferner alle die Winkel $BFE, BHG, \&c$ von ungleicher Grösse seyn müssen, erhellet aus dem §. 48. Denn man setze z. E. $BFE = BHG$: so sind JFE, JHG spitze und einander gleich. Damit aber laufen die Linien BH, AG gegen G zusammen; und es ist auch $JBA = JFE$. Demnach $JBA < 90$ Gr. Beydes der Voraussetzung zuwider. Demnach kann kein Winkel JFE einem andern JHG gleich seyn.

Dafs endlich jeder entferntere Winkel BHG stumpfer seyn müsse, als jeder nähere BFE , folgt wiederum aus dem Gesetze der Continuität. Denn wäre BHG weniger stumpf als BFE : so würden zwischen BF 339 und FH nothwendig Winkel vorkommen, die gleich | stumpf wären; und so würden BH, AG gegen G zusammenlaufen, und in B gleich schiefe Winkel seyn. (§. 48.) Demnach mufs durchaus $BHG > BFE$ seyn. *)

(Lamberts Zusatz zu §. 58 auf einem besondern Blatte)

*) „Der eigentliche Beweis ist folgender:

„ BFE (Fig. XVIII.) sey stumpfer als B und H . Man lege die Figur wie §. 57. „zusammen: so fällt F in f unter H . Ferner B in b über F ; (es mag nun

§. 59.

Man kann dieses Letztere auch auf folgende Art beweisen. Auf HD (Fig. XIX) nehme man die Distanzen $HG, GF, FE, EA, AB,$

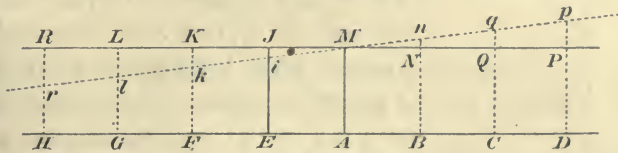


Fig. XIX.

$BC, CD,$ &c gleich und so klein man will. Aus allen diesen Punkten richte man Perpendikularen auf, und ziehe RP durch EJ rechtwinklicht: so werden, unsrer zwoten Hypothese zufolge, die Winkel $JMA, JNB, JQC, JPD,$ &c ingleichem auf der andern Seite die Winkel $JKF, [JLG], JRH,$ &c sämtlich stumpf, und die auf beyden Seiten von EJ gleich entfernten gleich seyn. (§. 30.) Man ziehe nun durch M die Linie rp auf AM senkrecht: so ist ebenfalls $EiM = MnB, FkM = MqC, GlM = MpD,$ &c. Da nun MJE ein rechter Winkel ist: so ist $MiE,$ und damit auch MnB und MNB noch mehr stumpf. Nun ist $MNB = MLG;$ daher $MLG = MpD$ noch mehr stumpf als $MnB.$ Und eben so MPD noch mehr stumpf als $MpD;$ folglich noch viel mehr als $MnB,$ &c. Ferner, da $MKF > 90$ Gr. ist: so ist auch $MkF = MqC$ noch stumpfer. Und da $MQC > MqC:$ so ist auch MQC noch viel mehr stumpf, und damit auch $MRH = MQC,$ und um so mehr noch $MrH,$ &c.

Man sieht leicht, dafs auf eben die Art immer fortgeschlossen werden kann, und demnach die Winkel $M, N, Q, P,$ &c desto mehr stumpf sind, je mehr sie | von J entfernt sind. Dafs eben dieses von 340 jeden zwischen $M, N, Q, P,$ &c fallenden Winkeln gelte, folgt daraus, dafs $AB, BC, CD,$ &c so klein angenommen werden können, als man will.

§. 60.

Es ist ferner merkwürdig, dafs diese in Einem fortgehende Vergrösserung der stumpfen Winkel $M, N, Q, P,$ &c nicht nur von der absoluten Länge der Linien $EA, EB, EC, ED,$ &c sondern auch von der absoluten Länge der Perpendikularen $EJ, AM, BN,$ &c abhängt.

Um dieses noch zu zeigen: so seyn in A, B, C, D, E (Fig. XX.) rechte Winkel, und $AB = BC = AD = DE.$ Demnach sind, ver-

„über oder unter H seyn.) Demnach sind (eben so wie §. 57.) $Pp = Rr = Qq;$ „welches die Hypothese umstößt. z.“

„Auf eine ähnliche Art wird §. 69. verfahren.“ [Es scheint, dafs *Lambert* auch hier versucht hat, den Beweis unabhängig von dem Gesetze der Continuität zu führen. So wie der Zusatz lautet, ist er uns freilich unverständlich geblieben.]

möge unsrer zwothen Hypothese, die Winkel G, H, F, J sämtlich stumpf; und zwar $H > G$, und eben so $J > H$; demnach um so mehr $J > G$. Nun sind J und G nur darin verschieden, daß

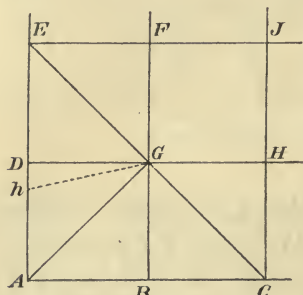


Fig. XX.

$AE = AC$ doppelt so groß angenommen worden, als $AD = AB$. Man sieht daraus, wie mit jeder Verdoppelung die Winkel G, J stumpfer werden. Eben dieses gilt, wenn auch $AE = AC$ schlechthin nur größer als $AD = AB$ genommen wird.

§. 61.

In dieser Figur ist ferner $AD > GB$, und $GB > CH$. (§. 56.) Man trage CH aus A in h , und ziehe Gh . Legt man nun die

Figur längs der Linie BF zusammen: so fällt GH in Gh . Da nun in D rechte Winkel sind: so ist $Gh > GD$. Demnach [wegen $GD = GB$] auch $GH > GB$. Da nun $GB > CH$ ist: so ist um so mehr noch $GH > CH$.

Auf gleiche Art wird man $FJ > EF$ finden. Hingegen ergibt sich $FJ < GF$ daraus, daß $JF = JH$, $GF = GH$, und $FGH < FJH$ ist. So wird man auch, wenn man AG, GC zieht, die Winkel DAG, GAB, GCB einem halben rechten Winkel gleich, und hingegen $AGC = DGB > 90$ Gr. finden. *u.* —

Ich halte mich aber bey solchen Folgen, die leicht noch weiter können getrieben werden, nicht mehr länger auf, sondern werde die 341 bisher betrachtete Hypothese nun von der widersprechenden Seite zu zeigen vornehmen.

§. 62.

Diese widersprechende Seite liegt nicht bloß darin, daß die von AB (Fig. XVII.) entfernten Senkstriche EF, GH immer kürzer werden. Denn man könnte gedenken, daß sie auf eine asymptotenmäßige Art sich verkürzen, ohne jemals

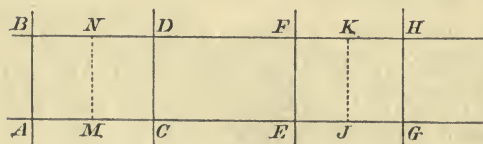


Fig. XVII.

= 0 oder gar negativ zu werden. Hingegen thun die immer stumpfer werdenden Winkel F, H mehr zur Sache.

Denn daraus wird erhellen, daß sich BH gegen AG ungefähr eben so wie ein Cirkelbogen nähern müßte, dessen Mittelpunkt unter A ist, und dessen Diameter bis in B reicht. Ein solcher Cirkelbogen nehmlich durchschneidet nothwendig die Linie AG . Eben dieses wird sich nun auch von der Linie BH erweisen lassen. Da nun wegen der rechten Winkel in B, A

kein solcher Durchschnitt statt haben kann: so folgt für sich, daß unsre zwote Hypothese dadurch werde *ad absurdum* gebracht seyn. Die Art, wie dieses geschehen kann, ist nun folgende.

§. 63.

Es seyn in A, B , (Fig. XXI.) rechte Winkel. Auf AG nehme man nach Belieben drey Punkte E, F, G , so daß $EF = FG$ sey, und richte aus denselben die Linien EH, FJ, GK senkrecht auf: so ist zu beweisen, daß allemal $EH - FJ < FJ - GK$ oder

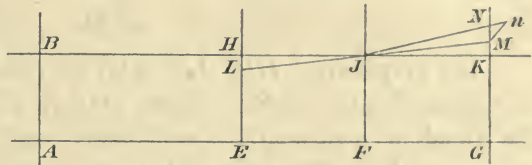


Fig. XXI.

$$FJ - GK > EH - FJ$$

sey, wenn die bisher betrachtete zwote Hypothese wahr ist.

Nun sind, dieser Hypothese zufolge, die Winkel BHE, BJF, BKG nicht nur stumpf; sondern es ist $BKG > BJF$, und $BJF > BHE$. Zieht man demnach durch J die Linie LM senkrecht auf JF : so geht sie unter H und über K durch; und es ist $EL = GM$. (§. 30.) Man mache nun $GN = EH$, und ziehe JN : so wird, wenn man die Figur längs der Linie FJ zusammenlegt, FE auf FG , EL auf GM , EH auf GN , demnach JL auf JM und JH auf JN fallen; und die Winkel HJL, MJK, NJM werden gleich seyn. Da nun $BHE < BKG$:³⁴² so ist $EHJ > JKN$. Es ist aber $EHJ = JNK$. Demnach ist $JNK > JKN$. Damit aber ist auch $JK > JN$.

Man mache $Jn = JK$, und ziehe Mn : so ist der Winkel $JMK = JMn$. Demnach ist JMK stumpf. Demnach, ebenfalls vermöge der zwoten Hypothese, $GM = EL$ kleiner als FJ . Ferner, da $JNG = JHE$ ein spitzer Winkel ist: so ist nNM stumpf; und damit ist $Mn > MN$. Es ist aber $Mn = MK$. Demnach ist auch $MK > MN$; und eben so, weil $MN = LH$ ist: so ist auch $MK > LH$. Demnach

$$GM - GK > EH - EL.$$

Nun aber ist

$$GM = EL.$$

Demnach

$$GM - GK > EH - GM.$$

Es ist aber, vermöge des erst erwiesenen,

$$FJ > GM.$$

Folglich

$$2 FJ > 2 GM.$$

Demnach, wenn man addirt,

$$GM + 2 FJ - GK > 2 GM + EH - GM.$$

Und folglich

$$2 FJ - GK > EH;$$

Oder

$$FJ - GK > EH - FJ.$$

Und dieses war zu beweisen.

§. 64.

Die Perpendikel EH , JF , KG , &c nehmen demnach nicht etwan nur gleichförmig, sondern immer stärker ab. So klein demnach auch die Abnahme seyn mag: so muß, wenn man fortfährt in gleichen Entfernungen EF , FG , Perpendikularen aufzurichten, die Summe der Abnahmen nothwendig einmal anfangen grösser als AB zu werden. Und da dieses nicht geschehen kann, es sey denn, dafs die Linie BK , bis dahin verlängert, sich unter die ebenfalls verlängerte AG herabsenke: so wird dadurch offenbar der Satz, dafs BK , AG wegen der rechten Winkel in A , B nicht zusammenlaufen, umgestossen. Da sich aber dieser Satz nicht umstossen läßt: so fällt die zwote Hypothese ³⁴³ ins Unmögliche. Sie wird aber | noch viel unmittelbarer dadurch ungereimt, dafs die Linie BK auf beyden Seiten des Senkstriches AB sich unter die Linie GA herabsenken, und demnach die zwo Linien BK , AG einen Raum schliessen müßten. —

Lafst uns nun noch sehen, was aus der dritten Hypothese werden wird.

Dritte Hypothese.

§. 65.

Man kann nun nach der Betrachtung der beyden ersten Hypothesen voraus vermuthen, dafs bey der dritten immer spitzere Winkel und immer grösser werdende Perpendikularen zum Vorschein kommen werden. Hingegen läßt es sich eben daher auch nicht voraussehen, wie diese Hypothese in Absicht auf die Möglichkeit werde geprüft werden können. Ich werde demnach die Sache beschreiben, wie ich sie gefunden habe.

§. 66.

Es seyn wiederum in A , B , C , (Fig. XVII.) und so auch in jeden Punkten E , J , G , &c rechte Winkel: so ist bey der dritten Hypothese der Winkel D oder BDC spitze. (§. 39.) Die erste Folge, die wir daraus ziehen, ist, dafs $DC > AB$ ist. Denn wäre $CD = AB$: so

würde eben so wie §. 53. folgen, dafs BDC ein rechter Winkel wäre. Und dieses würde der Voraussetzung zuwider seyn. Wollte man

aber $CD < AB$ annehmen:

so würde, wenn man die Figur längs der mittlern Perpendikulare MN zusammenlegt, A auf C , B aber über D hinauf fallen; und damit

würde $NDC > 90$ Gr. seyn; welches der Voraussetzung noch mehr zuwider wäre. Demnach ist $CD > AB$.

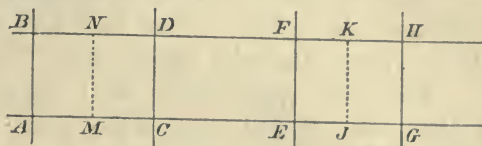


Fig. XVII.

§. 67.

Auf gleiche Art ist auch $BD > AC$.

§. 68.

Ferner sind jede andre Perpendikularen EF , GH , nicht nur grösser als AB ; sondern es ist keine der andern gleich, und jede entferntere GH ist grösser als jede nähere EF .

Man setze erstlich, es sey $GH = EF$. Mitten | auf EG errichte ³⁴⁴ man JK senkrecht: so sind in K rechte Winkel; und damit sind auch in D rechte Winkel. (§. 41.) Nun ist aber, vermöge der Hypothese D ein spitzer Winkel. Demnach läst sich nicht $GH = EF$ setzen.

Man kann aber ferner auch nicht $EF < DC$ setzen. Denn da $CD > AB$ ist: so würden nothwendig zwischen AC und zwischen CE Perpendikularen vorkommen, die einander gleich wären. Da nun dieses dem erst erwiesenen zuwider ist, und aus gleichem Grunde auch nicht $EF = CD$ seyn kann: so ist $EF > CD$. Auf gleiche Art folgt auch dafs $GH > EF$ seyn müsse. Und so ist auch jede zwischen A , C fallende Perpendikulare grösser als AB , und kleiner als CD . &c.

Ich habe hierbey ebenfalls wiederum wie oben (§. 56.) das Gesetz der Continuität gebraucht. Will man aber lieber den Beweis auf die Euklidischen Grundsätze

bauen: so kann dieses auf eine der im §. 57. angegebenen durchaus ähnliche Art geschehen. Denn man wird finden, dafs für gegenwärtigen Fall, in der 18den

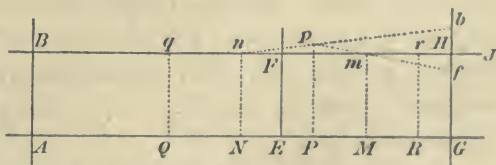


Fig. XVIII.

Figur, b unterhalb, f aber oberhalb H , und damit auch p unter Fm kömmt, und dadurch an dem Satze $Qq = Rr$ nichts geändert wird.

§. 69.

In Ansehung der Winkel D, F, H , &c (Fig. XVII.): so sind hier nicht nur alle spitze, sondern auch alle ungleich; und jeder entferntere H ist spitzer als jeder nähere F .

Dafs alle spitze sind, folgt daraus, dafs alle Perpendikularen grösser als AB sind, ohne Mühe, wenn man, z. E. in Absicht auf den Winkel F die Figur so zusammenlegt, dafs E auf A falle. Denn so wird F oberhalb B fallen; und da in B rechte Winkel sind: so mus $BFE < 90$ Gr. seyn.

Dafs ferner nicht zween Winkel F, H gleich spitze sind, folgt aus dem §. 48, weil die Linien HF, GE , gegen A verlängert, sich durchschneiden, und in B schiefe Winkel seyn würden. Da nun dieses der Voraussetzung zuwider: so kann auch nicht $F = H$ seyn.

345 Endlich kann auch nicht $H > F$ seyn. Denn wo dieses wäre: so würden zwischen BF und zwischen FH Winkel vorkommen, die einander gleich wären; und damit würde auch $F = H$ seyn. (§. 48.) Demnach mus $H < F$ seyn.

Man kann, um dieses ohne Zuziehung des Gesetzes der Continuität zu beweisen, eben so wie §. 59 verfahren, wenn man in der 19den

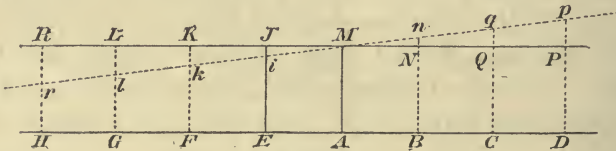


Fig. XIX.

Figur in i rechte Winkel, und $iMA < 90$ Gr., JMA aber $= 90$ Gr. setzt. Denn so wird $EJM = MNB$ spitze, und damit $MnB = MIG$ noch kleiner, und eben dadurch $MLG = MPD$ noch mehr kleiner. α .

§. 70.

Aus dem aber, dafs die entferntern Winkel immer spitzer werden, folgt nun ferner, dafs die Perpendikularen mit der Entfernung von A (Fig. XVII.) nicht etwan nur gleichförmig, sondern immer mehr grösser werden, so dafs sich BH , verlängert, von AG , ebenfalls verlängert, dergestalt entfernt, dafs die Perpendikularen grösser werden, als jede gegebene Grösse.

Es seyn in A, B (Fig. XXII.) rechte Winkel. Man nehme nach Belieben die Punkte E, F, G , so dafs $EF = FG$ sey, und richte aus denselben die Perpendikularen EH, FJ, GK auf: so sind, vermöge unsrer dritten Hypothese BHE, BJF, BKG spitze Winkel, und

jeder folgende spitzer als der vorhergehende. Zieht man demnach durch J die Linie LM auf FJ senkrecht: so geht LM oberhalb H und unterhalb K durch, weil $HJF < 90$ Gr. ist.

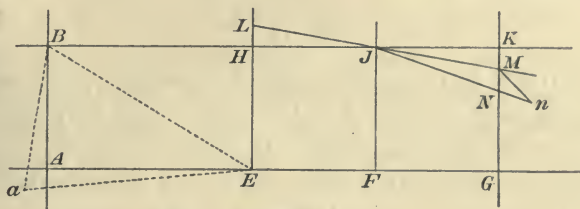


Fig. XXII.

Man mache $GN = EH$, und ziehe JNn . Da nun $EL = GM$ ist (§. 30.): so fällt N unterhalb M . Und indem man die Figur längs der Linie FJ zusammenlegt, wird JH auf JN , JL aber auf JM fallen; und die Winkel LJH , KJM , MJN werden gleich seyn. Denn LJH fällt beym Zusammenlegen auf MJN ; und LJH , KJM sind Scheitelwinkel. Da nun ferner JHE auf JNG fällt: so ist $JNG = JHE$; demnach auch $JNK = BHE$. Nun aber ist $BHE > JKN$; | dem- 346 nach ist ebenfalls $JNK > JKN$. Daraus folgt aber $JK > JN$. Man mache also $Jn = JK$, und ziehe Mn : so ist $Mn = MK$, und der Winkel $JMK = JMn$ stumpf; demnach JMG spitze. Dadurch ist aber, ebenfalls vermöge der dritten Hypothese, $GM > FJ$, und damit auch $EL > FJ$, weil $EL = GM$ ist. Da nun ferner $JNM = BHE$ spitze ist: so ist MNn stumpf, und damit $Mn > MN$. Es ist aber $Mn = MK$, $MN = LH$; demnach $KM > LH$; und damit

$$GK - GM > EL - EH.$$

Nun aber ist

$$GM = EL.$$

Demnach

$$GK - GM > GM - EH.$$

Da nun, vermöge des erst erwiesenen,

$$GM > FJ,$$

und

$$2 GM > 2 FJ;$$

so ist, wenn man addirt,

$$GK + 2 GM - GM > GM + 2 FJ - EH.$$

Folglich

$$GK > 2 FJ - EH;$$

oder

$$GK - FJ > FJ - EH.$$

Demnach wächst bey gleich zunehmenden Entfernungen AE , AF , AG , die Perpendikulare GK in Absicht auf FJ um ein mehrers

als FJ in Absicht auf EH . Da nun dieses von jeden folgenden Entfernungen gilt: so wird die Summe aller Zunahmen oder Incrementen endlich grösser als jede gegebene Gröfse.

§. 71.

Dadurch fällt nun der Unterschied zwischen einer geraden und krummen Linie eben so weg, wie bey der zwoten Hypothese. (§. 64.) Indessen, da es sich bey der zwoten Hypothese dadurch erweisen liefs, dafs sich die Linie BK auf beyden Seiten des Senkstriches AB unter die Linie AG herabzog: so hat man bey der dritten, wo sich BK von AG auf beyden Seiten unendlich entfernt, nichts dergleichen zu befahren. Es macht aber eben dieses Entfernen, dafs, wenn man ja
347 noch einen andern Beweis | der Unmöglichkeit der dritten Hypothese verlangt, derselbe auf eine andre Art gefunden werden mufs.

Ich merke inzwischen an, dafs vermittelt der §. 64 und 70. eine Menge von Einwendungen wegfällt, die man sonst wider die Parallellinien und deren von verschiedenen Geometern versuchte Beweise gemacht hat. Denn die ganze Sache kömmt auf die bisher betrachteten drey Hypothesen an. Nach der erstern laufen die Linien BK , AG in immer gleicher Entfernung fort. Nach der zwoten durchschneiden sie sich auf beyden Seiten von AB . Nach der dritten nimmt ihre Entfernung auf beyden Seiten immer mehr zu, und wird grösser als jede gegebene Entfernung.

Demnach fallen alle Einwendungen weg, die sich auf ein asymptotisches Annähern oder auf ein asymptotisches Entfernen gründen würden; wobey nemlich die Entfernungen EH , JF , GK , &c sich einer gewissen Grösse immer mehr näherten, ohne sie jedoch zu erreichen.

Eben so fallen auch diejenigen Einwendungen weg, wobey die zwote Hypothese zum Grunde liegen oder vorausgesetzt würde; wie z. E. wo zu drey rechten Winkeln A , B , C der vierte H stumpf, demnach die Summe > 360 Gr. oder in einem Triangel die Summe der drey Winkel > 180 Gr. angenommen würde, α weil die zwote Hypothese an sich wegfällt.

§. 72.

In Ansehung des immer mehrern Entfernens, so bey der dritten Hypothese vorkömmt, könnte man anstehen, ob die aus jeden Punkten E , F , G , &c aufgerichteten Perpendikularen die Linie BK alle noch schneiden, so gros man auch AE , AF , AG , &c annehmen würde. Nun sehe ich zwar nicht, wie bey diesem Anstande BK eine gerade

Linie bleiben könnte. Indessen wenn es auch wäre: so hat es auf die vorhergehenden Sätze keinen Einfluss. Die Vergrößerung, oder das Anwachsen der Perpendikularen, so weit diese nemlich aus jeden Punkten H, J, K , &c auf AG können gefällt werden, wird dadurch nicht nur nicht angefochten, sondern noch um desto merklicher. Und eben dieses findet auch in Ansehung der Winkel H, J, K statt, welche dadurch nicht nur bis auf einen bestimmten Grad sondern vollends bis auf 0 kleiner werden würden.

§. 73.

Bey der dritten Hypothese ist in jedem Triangel die Summe der drey Winkel kleiner als 180 Gr. Da sich jeder Triangel in zween rechtwinklichten zerfallen läßt, weil bey jedem nothwendig wenigstens zween Winkel spitze sind: so werde ich diesen Satz erstlich von den rechtwinklichten Triangeln erweisen.

Es sey ein solcher BAE . Man ziehe HB auf BA , und HE auf EA rechtwinklicht: so ist $BH > AE$, und $EH > AB$. (§. 66. 67.)

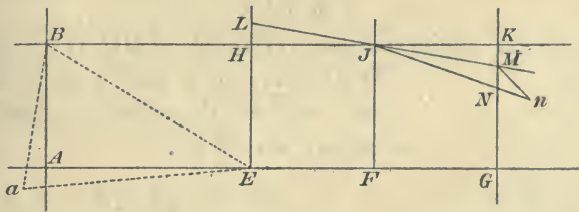


Fig. XXII.

Trägt man demnach den Triangel BHE in EaB , so daß BH in Ea , und EH in Ba falle: so fällt aB ausserhalb ABH , und aE ausserhalb AEH . Demnach ist der Winkel

$$aBE > ABE,$$

und

$$aEB > AEB.$$

Folglich, wenn man addirt,

$$aBE + aEB > ABE + AEB.$$

Es ist aber die Summe dieser vier Winkel = 180 Gr. Demnach ist

$$aBE + aEB > 90 \text{ Gr.}$$

und

$$ABE + AEB < 90 \text{ Gr.}$$

Folglich

$$ABE + AEB + BAE < 180 \text{ Gr.}$$

Die Besorgniß, als möchten BH, EH einander nicht schneiden, hat hier ebenfalls nichts zu sagen; weil, wenn es auch wäre, die

Linien Ba , Ea nur um so mehr noch ausserhalb BAE fallen würden.

§. 74.

Nun seyn in jedem Triangel AGC (Fig. XX.) die Winkel A , C spitze. Aus G falle GB auf AC senkrecht: so ist

$$AGB + GAB + ABG < 180 \text{ Gr.}$$

$$CGB + GCB + CBG < 180 \text{ Gr.}$$

Demnach die Summe

$$AGC + GAC + GCA + ABG + CBG < 360 \text{ Gr.}$$

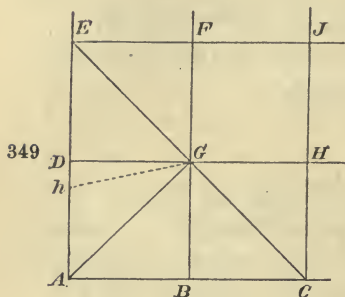
Es ist aber

$$ABG + CBG = 180 \text{ Gr.}$$

Demnach

$$AGC + GAC + GCA < 180 \text{ Gr.}$$

Fig. XX.



§. 75.

Da in einem gleichseitigen Triangel ABC (Fig. XXIII.) die Winkel A , B , C gleich sind: so ist, bey der dritten Hypothese, jeder derselben kleiner als 60 Gr.

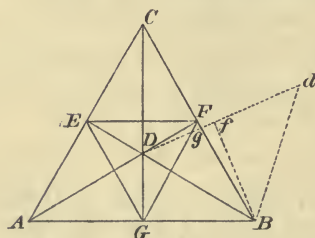


Fig. XXIII.

§. 76.

Man ziehe nun in einem gleichseitigen Triangel ABC aus jedem Winkel senkrechte Linien auf die gegenüber stehende Seite: so werden sowohl die Winkel als die Seiten halbirt; und die Perpendikularen haben einen gemeinsamen Durchschnittspunkt D . Alles dieses läst sich durch das Zusammenlegen der Figur längs jeder Perpendikulare leicht erweisen. Und eben daraus wird auch gefolgert, dass die Winkel in D sämtlich gleich, und demnach jeder $= 60$ Gr. ist. Ferner, da der Winkel $ACG < GAC$: so ist auch $AG < GC$, oder $GC > AG$. Hingegen wegen des rechten Winkels in G , ist $AC > GC$. Demnach ist die Perpendikulare zwar kleiner als jede Seite, aber grösser als die Hälfte einer Seite.

§. 77.

Man beschreibe nun auf BD noch einen gleichseitigen Triangel BDd . Da nun auch in diesem jeder Winkel < 60 Gr. ist; (es versteht sich bey der dritten Hypothese:) so fällt die Seite Dd innerhalb

BDF , weil $BDF = 60$ Gr. ist; und so muß die aus B auf Dd fallende Perpendikulare Bf ausserhalb ABC fallen. Demnach ist $Df > Dg$. Es ist aber, wegen des rechten Winkels in F , $Dg > DF$; demnach, um desto mehr $Df > DF$. Da nun $Df = \frac{1}{2} Dd = \frac{1}{2} DB = \frac{1}{2} DA$ ist: so ist $\frac{1}{2} DA > DF$, und $DA > 2 DF$; demnach auch $AF > 3 DF$, oder $DF < \frac{1}{3} AF$. Dieses hat bey der dritten Hypothese statt. Denn bey der ersten läßt sich leicht erweisen, daß $DF = \frac{1}{3} AF$ sey. Die zwote Hypothese, | wobey $DF > \frac{1}{3} AF$ seyn 350 würde, fällt an sich weg. Und demnach kann DF wenigstens nicht grösser als $\frac{1}{3} AF$ seyn.

§. 78.

Ferner ist, bey der dritten Hypothese, in jedem Triangel KLM (Fig. XVI.) die Summe zweener Winkel $LKM + KLM$ kleiner als der aussen an dem dritten liegende Winkel LMq . Denn es ist

$$LMK + LKM + KLM < 180 \text{ Gr.}$$

Hingegen

$$180 \text{ Gr.} = LMK + LMq.$$

Demnach

$$LKM + KLM < LMq.$$

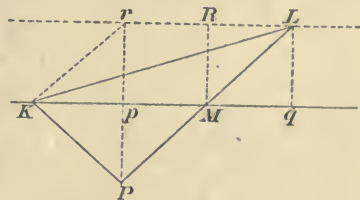


Fig. XVI.

Und wenn $KM = ML$ ist: so ist LKM kleiner als die Hälfte von LMq .

§. 79.

Man sieht leicht, daß sich auf diese Art bey der dritten Hypothese noch weiter gehen läßt; und daß sich ähnliche Sätze auch bey der zwoten finden lassen, doch mit ganz entgegengesetztem Erfolge. Ich habe aber vornehmlich bey der dritten Hypothese solche Folgsätze aufgesucht, um zu sehen, ob sich nicht Widersprüche äußern würden. Aus Allem sah ich, daß sich diese Hypothese gar nicht leicht umstossen läßt. Ich werde demnach noch einige solcher Folgsätze anführen, ohne darauf zu sehen, wiefern sie auch bey der zwoten Hypothese mit gehöriger Veränderung gezogen werden können.

Die erheblichste von solchen Folgen ist, daß, wenn die dritte Hypothese statt hätte, wir ein absolutes Maafs der Länge jeder Linien, des Inhalts jeder Flächenräume und jeder körperlichen Räume haben würden. Dieses stößt nun einen Satz um, den man ohne Bedenken

unter die Grundsätze der Geometrie rechnen kann, und woran bisher noch kein Mensch gezweifelt hat, daß es nemlich *kein solches absolutes Maafs gebe*. Es machte zwar *Wolf* einen Lehrsatz daraus, indem er die Definition der Grösse (*Quantitas*) so einrichtete, daß er im Folgenden daraus herleiten konnte: *Quantitas dari sed non per se* 351 *intelligi potest*. | Allein dieser Lehrsatz muß, so wie die Definition, geändert werden, weil es unstreitig *Grössen* giebt, die für sich kenntlich sind, und eine bestimmte Einheit haben. Bey Linien, Flächen und körperlichen Räumen gilt derselbe allerdings; und da glaube ich nicht, daß man, um ihn in der Geometrie anzubringen, erst eine Definition dazu zurechte machen müßte.

§. 80.

Um aber die erst erwähnte Folge zu beweisen; so seyn in A, B, C, D, E (Fig. XX.) rechte Winkel; und es werden, bey der dritten Hypothese, G, F, H, J spitze, und zwar $H < G$, und $J < H$; und eben so $F < G$ und $J < F$ seyn. Nun sage ich, der Winkel G sey das Maafs des Viereckes $ADGB$, wenn nemlich $AB = AD$ ist; und eben so sey der Winkel J das Maafs des Viereckes $ACJE$, wenn $AC = AE$ ist.

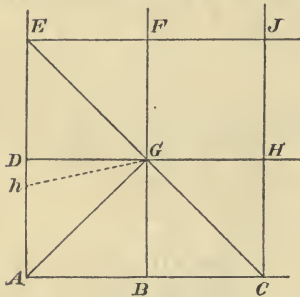


Fig. XX.

Denn, mit Beybehaltung der Gleichheit der Seiten $AB = AD$ und der rechten Winkel A, B, D , wird der spitze Winkel G bey keinem andern Vierecke passen, als bey solchen, deren Seiten AB, AD die absolute Länge von AB, AD haben. Man nehme z. E. grössere Seiten $AE = AC$, und mache in E, C rechte Winkel: so ist bey der dritten Hypothese der Winkel $J < G$. Demnach paßt G nicht auf J . Wäre $AE = AC$ kleiner als $AD = AB$ genommen worden: so würde $J > G$ herausgekommen seyn; und so würde G ebenfalls nicht auf J gepaßt haben.

Demnach ist der Winkel G das absolute Maafs des Viereckes $ADGB$. Da die Winkel ein für sich kenntliches Maafs haben: so dürfte man z. E. wenn $AB = AD$ ein Pariser Fufs, und dabey der Winkel $G = 80$ Gr. wäre, nur sagen, man soll das Viereck $ADGB$ so groß machen, bis der Winkel $G = 80$ Gr. würde: so werde man die absolute Länge eines Pariser Fusses auf $AB = AD$ haben.

Diese Folge hat etwas Reizendes, welches leicht den Wunsch 352 abdringt, die dritte Hypothese möchte doch wahr | seyn!

Allein ich wünschte es, dieses Vortheils unerachtet, dennoch

nicht, weil unzählliche andre Unbequemlichkeiten dabey mit seyn würden. Die trigonometrischen Tafeln würden unendlich weitläufig; und die Aehnlichkeit und Proportionalität der Figuren würde ganz wegfallen; keine Figur liefse sich anders als in ihrer absoluten Gröfse vorstellen; um die Astronomie wäre es übel bestellt; u. s. w.

§. 81.

Jedoch dies sind *Argumenta ab amore & invidia ducta*, die aus der Geometrie, so wie aus allen Wissenschaften, ganz wegbleiben müssen.

Ich wende mich demnach wiederum zu der dritten Hypothese. Bey dieser ist nicht nur, wie wir vorhin gesehen haben, in jedem Triangel die Summe der drey Winkel kleiner als 180 Gr. oder zween rechte Winkel; sondern der Unterschied von 180 Gr. wächst schlechthin nach dem Flächenraume des Triangels; das will sagen: wenn von zween Triangeln der eine einen grössern Flächenraum hat, als der andre: so ist in dem erstern die Summe der drey Winkel kleiner als sie in dem andern ist.

Ich werde diesen Satz hier nicht so ausführlich beweisen, als ich ihn vortrage, sondern von dem Beweise nur so viel anführen, dafs sich das Uebrige daraus überhaupt begreifen läfst.

Es sey z. E. in dem Triangel ACB (Fig. XXIII.) der Triangel EFG , so dafs des Letztern Ecken auf die Seiten des erstern stossen. Da auf diese Art EFG ganz in ABC ist: so ist der Raum des erstern unstreitig kleiner als der Raum des Letztern. Nun ist die Summe der Winkel:

$$\begin{aligned} EFG + EGF + GEF &= 180 \text{ Gr.} - a. \\ EGA + EAG + AEG &= 180 \text{ Gr.} - b. \\ FGB + GBF + GFB &= 180 \text{ Gr.} - c. \\ FCE + FEC + EFC &= 180 \text{ Gr.} - d. \end{aligned}$$

Hingegen

$$\begin{aligned} EGA + EGF + FGB &= 180 \text{ Gr.} \\ AEG + GEF + FEC &= 180 \text{ Gr.} \\ EFC + EFG + GFB &= 180 \text{ Gr.} \end{aligned}$$

Zieht man die Summe dieser drey letztern Gleichungen von der Summe der vier erstern ab: so bleibt

$$CAB + ABC + BCA = 180 \text{ Gr.} - a - b - c - d.$$

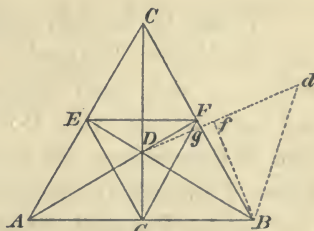


Fig. XXIII.

Da demnach hier nicht nur a , sondern $a + b + c + d$ von 180 Gr. abgezogen werden muſs: ſo ſieht man, daſs ſich bey dem Triangel ABC alle Defecte a, b, c, d der vier Triangel $AE G, ECF, FBG, GEF$ ſammenhäufen, und demnach die Summe ſeiner drey Winkel um ſo viel mehr kleiner als 180 Gr. iſt.

Kann das kleinere Dreyeck nicht ganz in das gröſſere gelegt werden: ſo ſteht etwas davon voraus, und dieſes wird abgeſchnitten und in das hervorſtehende des gröſſern Dreyeckes gelegt, und allenfalls ſo fortgefahren, biſ das nunmehr in Theile zerſchnittene kleinere Dreyeck ganz im gröſſern liegt. Der im gröſſern unbedeckt bleibende Raum wird in Triangel zerfällt. So viel nun die Summe aller Winkel in dieſen Triangeln kleiner iſt als eben ſo vielmal 180 Gr. um eben ſo viel iſt die Summe der drey Winkel des gröſſern vorgegebenen Dreyeckes kleiner als die Summe der drey Winkel des vorgegebenen kleinern Dreyeckes.

§. 82.

Wenn es bey der dritten Hypotheſe möglich wäre, mit gleichen und ähnlichen Triangeln einen gröſſern Triangel zu bedecken: ſo würde es ſich auch leichte darthun laſſen, daſs bey jedem Triangel der Ueberſchuſs von 180 Gr. über die Summe ſeiner drey Winkel dem Flächenraume des Triangels proportional wäre. Indessen da ſich dieſer Ueberſchuſs nach dem Raume richtet: ſo läſt ſich dennoch eine ſolche Proportionalität auf eine andre Art gedenken.

Man ſetze z. E. zween Triangel. Der eine habe doppelt ſo viel 354 Flächenraum als der andre: | ſo wird erſterer, ſo viel man will, zerſchnitten, doppelt auf den andern gelegt werden können. Und wenn der kleinere um a Gr. in Abſicht auf die Summe ſeiner Winkel von 180 Gr. abgeht: ſo wird der gröſſere um $2a$ Gr. davon abgehen. —

Ich werde nun noch folgende Anmerkung beyfügen. Bey der zwoten Hypotheſe kommen ganz ähnliche Sätze vor, nur daſs dabey in jedem Triangel die Summe der drey Winkel gröſſer als 180 Gr. wird. Der Ueberſchuſs proportionirt ſich ebenfalls nach dem Flächenraume des Triangels.

Hierbey ſcheint mir merkwürdig zu ſeyn, daſs die zwote Hypotheſe ſtatt hat, wenn man ſtatt ebener Triangel *sphäriſche* nimmt, weil bey dieſen ſowohl die Summe der Winkel gröſſer als 180 Gr. als auch der Ueberſchuſs dem Flächenraume des Triangels proportional iſt.

Noch merkwürdiger ſcheint es, daſs, was ich hier von den ſphäriſchen Triangeln ſage, ſich ohne Rückſicht auf die Schwierigkeit

der Parallellinien erweisen lasse, und keinen andern Grundsatz voraussetzt, als dafs jede durch den Mittelpunkt der Kugel gehende ebene Fläche die Kugel in zween gleiche Theile theile.

Ich sollte daraus fast den Schluss machen, die dritte Hypothese komme bey einer imaginären Kugelfläche vor. Wenigstens mufs immer Etwas seyn, warum sie sich bey ebenen Flächen lange nicht so leicht umstossen läfst, als es sich bey der zwoten thun liefs.

§. 83.

Was ich erst von den Triangeln sagte, gilt auch von den vier-eckichten Figuren. Weil jede sich in zween Triangel zerfallen läfst: so beträgt, bey der dritten Hypothese, die Summe der vier Winkel eines Viereckes weniger als 360 Gr. und der Unterschied ist dem Flächenraume des Viereckes proportional.

Es seyn nun (Fig. XIX.) in H, r, G, F, E, A , &c rechte Winkel, und $HG = GF = FE = EA = \&c$, so sind bey der dritten Hypothese die Perpendikularen $Hr, Gl, Fk, Ei, | AM, Bn, \&c$ nicht nur 355

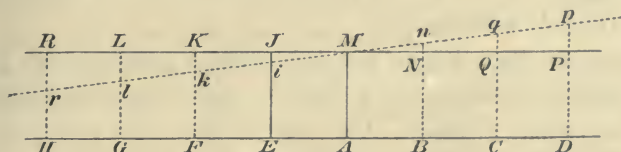


Fig. XIX.

der Ordnung nach grösser, sondern sie nehmen immer um mehr zu. Dieses macht, dafs auch der Flächenraum, die Vierecke $HrlG, GlkF, FkiE$, &c immer grösser, und eben so wie die Perpendikularen immer um mehr grösser werden. Demnach ist die Summe der 4 Winkel nicht nur immer kleiner, sondern immer um mehr kleiner als 360 Gr. Da nun die Linien rp, HD gerade sind: so lassen sich die sämtlichen Vierecke, oder so viel deren hintereinander liegend genommen werden, in Eines zusammennemen; und da die an einander stossenden Winkel in l, k, i , &c G, F, E , &c immer zusammen = 180 Gr. sind: so werden bey jedem neu addirten Vierecke von der Summe der Winkel 360 Grade weggeworfen. Und so ist z. E. die Summe der Winkel

$$\begin{aligned}
 H, r, l, G &= 360 \text{ Gr.} - \alpha. \\
 H, r, k, F &= 360 \text{ Gr.} - 2\alpha - \beta. \\
 H, r, i, E &= 360 \text{ Gr.} - 3\alpha - 2\beta - \gamma. \\
 H, r, M, A &= 360 \text{ Gr.} - 4\alpha - 3\beta - 2\gamma - \delta. \\
 \&c & & \&c & & \&c
 \end{aligned}$$

Kann man nun damit immer fortfahren: so wird nothwendig folgen, daß man zuletzt auf Vierecke verfällt, in welchen die Summe der vier Winkel kleiner als drey rechte Winkel sind. Es sey $HrpD$ ein solches Viereck. Da nun bereits in H, r, D drey rechte Winkel sind: so ist

$$H + r + D + p > 270 \text{ Gr.}$$

Und dieses stößt die Folge, und mit derselben entweder die ganze dritte Hypothese, oder den Satz um, daß die aus $G, F, E, A, B,$ &c errichtete Perpendikularen irgend aufhören, die Linie rp zu schneiden*). Allein, wenn auch dieses wäre: so würden die Ordinaten dennoch bis ins Unendliche wachsen, und demnach der Raum des letzten Viereckes so vielmal den Raum des ersten $HrLG$ fassen, daß die Summe der Winkel kleiner als 270 Gr. wäre.

Indessen werde ich darauf nicht bestehen, weil man allerdings ³⁵⁶ vorerst die | Vermuthung heben müßte, es möchten die Vierecke gerade aufhören möglich zu seyn, wo die Summe der vier Winkel = 270 Gr. würde. Es kömmt demnach vielmehr darauf an, ob die aus den Punkten $G, F, E, A, B,$ &c errichteten Perpendikularen die Linie rp sämtlich schneiden?

Wollte man diese Frage auf die bloße *Vorstellung* der Sache ankommen lassen: so sage ich nochmals, daß dabey der Begriff einer geraden Linie ganz wegfällt. Und ich würde, statt des 11ten Euklidischen Grundsatzes, allemal lieber als für sich evident annehmen, daß eine Linie, die die Perpendikulare Hr rechtwinklicht schneidet, und sich sodann z. E. längs der Perpendikulare Dp , ohne diese zu schneiden, aufwärts zieht, keine gerade Linie sein könne.

§. 84.

Da es aber die Frage ist, ob sich, ohne Zuziehung neuer Grundsätze, die dritte Hypothese mittelst der übrigen Euklidischen Grundsätze umstossen lasse: so bleiben bey der gegenwärtigen Betrachtung noch zween Wege zu versuchen.

Der erste, wenn sich aus der dritten Hypothese selbst folgern ließe, daß die Perpendikularen $Gl, Fk, Ei,$ &c sämtlich die Linie rp schneiden müssen. Könnte dieses geschehen: so würde, vermöge des vorhin erwiesenen, die Hypothese sich selbst umstossen. Ich habe

*) [Wir sind geneigt zu glauben, daß *Lambert* nicht „irgend“ sondern „nirgend“ geschrieben hat; wenigstens giebt der jetzige Wortlaut keinen Sinn. Das Folgende bezieht sich ja offenbar auf den Fall, daß die Perpendikularen aufhören, rp zu schneiden; man vergleiche dazu §. 72.]

es nicht versucht, weil es mir sehr wenig wahrscheinlich vorkam, und dabey immer Ausflüchte bleiben.

Der andre Weg ist, wenn sich erstbemeldtes Durchschneiden aus den übrigen Euklidischen Grundsätzen herleiten läßt. Auch hierüber habe ich nichts gefunden, das mir völlig Genügen gethan hätte; ungeachtet sich die Sache vielfältig auf solche Sätze reduciren läßt, die ganz augenscheinlich wahr sind.

Es seyn z. E. in A, D, C (Fig. XX.) rechte Winkel; und man steht an, ob CH, DH sich schneiden. Es sey $AC > AD$: so trage man AC aus A in E , und ziehe EJ auf AE senkrecht: so ist | erstlich für sich klar, dafs, wenn EJ, CJ sich schneiden, der Durchschnitt H nothwendig auch statt habe. Setzt man nun auf EC einen gleichseitigen Triangel, wovon jede Seiten = EC sind: so wird EJC allemal innerhalb dem gleichseitigen Triangel fallen.

Allein den Beweis dazu habe ich nicht finden können.

Hingegen liefs es sich beweisen, dafs, wenn man den gleichseitigen Triangel umlegt, EAC ganz in denselben fällt, weil man weifs, dafs A ein rechter Winkel ist.

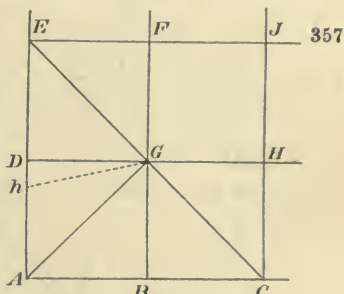


Fig. XX.

§. 85.

Wiederum sey $AB = AD$; in A, D, B rechte Winkel; und man steht an, ob DG, BG sich schneiden? Trägt man nun AD aus D in E , und beschreibt auf AE einen gleichseitigen Triangel: so wird allemal der Durchschnittspunkt G in denselben fallen.

Hier wäre nun nur zu beweisen, dafs in jedem gleichseitigen Triangel jeder Winkel grösser als 45° , das will sagen, grösser als der Winkel $GAD = GAB$ ist. Dafs jeder grösser sey als der Winkel GEA , wenn nemlich $AC = AE$ gemacht wird, das kann bey der dritten Hypothese leicht erwiesen werden.

§. 86.

Wiederum, wenn man ansteht, ob EJ, CJ sich schneiden: so darf man nur AG mitten durch A ziehen, so dafs $GAD = GAB = 45$ Gr. sey. Fällt man nun aus jedem Punkt G eine senkrechte GD auf AE , und man kann beweisen, dafs AD grösser als die

Hälfte, oder auch nur grösser als $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, κ von AG sey: so wird der Durchschnitt J ebenfalls erwiesen seyn, weil AJ kleiner als das 2, 3, 4, κ fache von AE seyn wird. Dafs es Fälle giebt, wo $AD > \frac{1}{2} AG$ ist, wird leicht erwiesen.

§. 87.

In dem Cirkel AC (Fig. XXIV.) seyn $AE, EB, BF, FC, \&c$ Octanten. Man ziehe die Vierecke $ABCD, EFGH$: so werden die Durchschnittspunkte J, K, L ebenfalls in einem concentrischen Cirkel herumliegen, und die Winkel $JMK, KML, \&c$ Octanten seyn. Man ziehe nun JL : so wird leicht bewiesen, dafs $MP > PK$, demnach $MP > \frac{1}{2} MK$ oder $MP > \frac{1}{2} MJ$ ist. Denn $ERK = 90$ Gr. Demnach $EKR < 90$ Gr. Folglich $JKL > 90$ Gr.; $JKM > 45$ Gr. Da nun JMK 45 Gr. ist: so ist $PM > PK$.

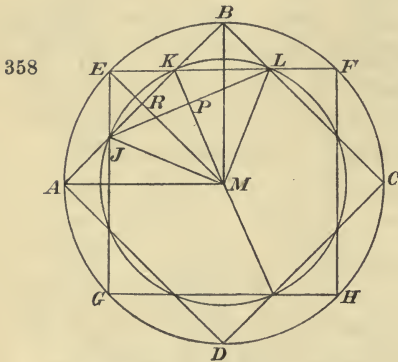


Fig. XXIV.

Auf diese Art läst sich von jedem Cirkel auf einen kleinern schliessen.

Man müfste nur auch beweisen können, dafs, wenn man jenen, so viel man will, vergrössert, dieser nicht zurücke bleibe. Und dieses wird man erhalten, sobald man erweisen kann, dafs entweder $ER = RK$, oder auch nur $ER < JK$, oder $ER < RM$, oder, ohne Rücksicht auf den äussern Cirkel, der Winkel JKL stumpf ist.

§. 88.

Man sieht aus Allem diesem, dafs, so leicht die zwote Hypothese umzustossen war, es noch ganz im Gegentheil mit der dritten viel härter halte. Ich übergehe noch mehrere solcher Versuche; und werde nun

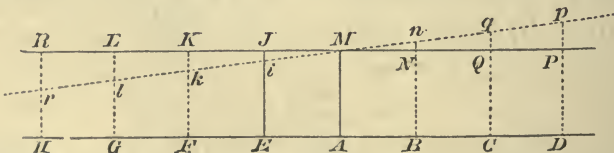


Fig. XIX.

(Fig. XIX.) $AB = BC = CD = \&c$ und in A, B, C, D $\&c$ rechte Winkel, und $AM = BN = CQ = DP = \&c$ setzen. Dabey sind nun

die Winkel $AMN = MNB = BNQ = NQC = CQP = QPD = \&c$,
 zufolge der dritten Hypothese, sämtlich spitze, und $MN = NQ = QP = \&c$.
 Das will nun sagen: $MNQP$ ist nicht eine gerade Linie, sondern ein
 Theil eines regulären Vieleckes, das sich in einen Cirkel beschreiben
 läßt, dessen Mittelpunkt unterhalb M auf jeder der Linien MA , NB ,
 QC , PD , &c ist. (§. 20.) Da nun damit B , C , D , &c nicht mehr
 rechte Winkel seyn können: so wird dadurch die Voraussetzung und
 mit derselben die dritte Hypothese umgestossen.

Abweichungen vom Original.

- S. 157, Z. 4 v. u. (S. 144, Z. 15 v. o.). Im Urtext steht nach „Vortrag“ ein Komma.
 S. 165, Z. 8 v. u. (S. 154, Z. 2 v. o.) (Prop. XIV) statt: (Prop. XIII).
 S. 172, Z. 22, 21, 18, 17, 16, 15, 3 und 1 v. u., Seite 173, Z. 2 v. o. (S. 161, Z. 5, 5, 8, 8, 9, 10, 18, 21 und 23 v. o.) b statt β .
 S. 174, Z. 19 v. u. (S. 163, Z. 1 v. o.) aus B statt: aus b .
 S. 175, Z. 2 v. o. (S. 163, Z. 11 v. u.) DFh statt DFH .
 S. 184, Z. 6 v. u. (S. 334, Z. 16 v. o.) K statt M .
 S. 187, Z. 6 v. o. (S. 336, Z. 4 v. u.) H statt K .
 S. 188, Z. 12 v. o. (S. 338, Z. 9 v. o.) GF statt Gf .
 S. 199, Z. 8 v. o. (S. 350, Z. 1 v. o.) $AF < \frac{1}{3} DF$ statt: $DF > \frac{1}{3} AF$.
 S. 204, Z. 4, 6, 12 v. o. (S. 355, Z. 11, 10, 3 v. u.) R statt r .
 S. 205, Z. 15 v. o. (S. 357, Z. 4 v. o.) Seite statt: Seiten.

In Figur V ist b für β gesetzt worden, um sie mit dem Texte in Übereinstimmung zu bringen; ferner ist der Buchstabe O ergänzt.

In Figur VII des Originals ist $D\beta t$ eine gerade Linie, während nach dem Texte $K\beta t$ ein Cirkelbogen ist, der die Gerade Dt in t berührt; dem entsprechend mußte die Figur geändert werden.

In Figur XIII ist der Punkt zwischen A und E , dem Texte entsprechend, mit G statt mit C bezeichnet.

Die in runde Klammern eingeschlossenen Seitenzahlen beziehen sich auf die Originalausgabe im Leipziger Magazin für Mathematik, Jahrgang 1786.