解析学

木上　淳
京都大学大学院情報学研究科
e-mail：kigami@i.kyoto-u.ac.jp

July 17, 2015

Contents

Part I

測度と積分

Chapter 1

測度

§1.1　集合の大きさ

集合の大きさとは、、、
　元の個数、長さ、面積、確率、
　部分集合に対して正の実数を対応させる。

例 1.1.1. X を集合とする。$\mathcal{P}(X) = \{A|A$ は X の部分集合$\}$ とする。　このとき $A \in \mathcal{P}(X)$ に対して、

$$\#(A) = \begin{cases} A \text{ の要素の個数} & A \text{ が有限集合のとき} \\ +\infty & A \text{ が無限集合のとき} \end{cases}$$

$A, B \in \mathcal{P}(A)$ で $A \cap B = \emptyset$ のとき $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B)$. ただし $a + \infty = +\infty$ と定義しておく。$\#$ の定義域は $\mathcal{P}(X)$.

例 1.1.2 (面積)**.** $A \subset \mathbb{R}^2$, A は有界とする。A の面積の定義は？
　多角形の面積は知っているものとし、A を多角形で近似していく。

定義 1.1.3. (1)　$A \subseteq \mathbb{R}^2$ が多角形であるとは、$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ （ただし A_i は三角形）と書けること。
(2) A を多角形とする。いま $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ （ただし A_i は三角形で、$A_i \cap A_j$ は辺、頂点または空集合）のとき A の面積 $m(A)$ を

$$m(A) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i)$$

と定義する。ただし $m(A_i)$ は三角形の面積であり、既知のものとする。この面積の定義は well-defined である。すなわち $\{A_i\}$ の選び方によらない。
(3)　$D \subset \mathbb{R}^2$ は有界であるとする。このとき D の外面積 $m^*(D)$ および内面積 $m_*(D)$ を

$$m^*(D) = \sup\{m(A) | A \text{ は多角形}, D \subseteq A\}$$
$$m_*(D) = \inf\{m(A) | A \text{ は多角形}, D \supseteq A\}$$

と定義する。（D が多角形を含まないときには $m_*(D) = 0$ とする。）$m^*(D) = m_*(D)$ のとき D は面積をもつ（Jordan の意味で可測である）という。このとき $m(D) = m^*(D)$ とおき、D の面積（Jordan 測度）という。$\mathcal{J} = \{D | D \subset \mathbb{R}^2\ D$ は面積を持つ $\}$ とする。

$m : \mathcal{J} \to [0, +\infty).$

命題 1.1.4. $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^2$. $D_1, D_2 \in \mathcal{J}$ ならば $D_1 \cup D_2, D_1 \cap D_2 \in \mathcal{J}$ であり、

$$m(D_1 \cup D_2) = m(D_1) + m(D_2) - m(D_1 \cap D_2)$$

とくに、$D_1 \cap D_2 = \emptyset$ のとき

$$m(D_1 \cup D_2) = m(D_1) + m(D_2).$$

証明. $D_1, D_2 \in \mathcal{J}$ より、多角形 A_1, B_1, A_2, B_2 で、$i = 1, 2$ で

$$A_i \subseteq D_i \subseteq B_i \tag{1.1.1}$$

かつ

$$m(B_i \backslash A_i) = m(B_i) - m(A_i) < \epsilon$$

が成り立つものがある。このとき、

$$A_1 \cup A_2 \subseteq D_1 \cup D_2 \subseteq B_1 \cup B_2$$
$$A_1 \cap A_2 \subseteq D_1 \cap D_2 \subseteq B_1 \cap B_2$$

であり

$$m(A_1) + m(A_2) = m(A_1 \cup A_2) + m(A_1 \cap A_2)$$
$$m(B_2) + m(B_2) = m(B_1 \cup B_2) + m(B_1 \cap B_2)$$

よって、

$$\bigl(m(B_1 \cup B_2) - m(A_1 \cup A_1)\bigr) + \bigl(m(B_1 \cap B_2) - m(A_1 \cap A_1)\bigr) \\ = \bigl(m(B_1) - m(A_1)\bigr) + \bigl(m(B_2) - m(A_2)\bigr) < 2\epsilon$$

となり、$D_1 \cup D_2, D_1 \cap D_2 \in \mathcal{J}$ かつ

$$m(D_1) + m(D_2) = m(D_1 \cup D_2) + m(D_1 \cap D_2)$$

が成り立つ。 $\square$

以上により、$\mathcal{J}$ に属する集合に関しては "面積" が定義できた。しかしながら、この "面積" は極限操作で閉じていない。例えば、

$$S = \{(x, y) | x, y \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}\}$$

とおく。S は可算集合であるので、$S = \{X_1, X_2, \ldots\}$ と書ける。いま、$S_m = \{X_1, \ldots, X_m\}$ とおくとき、$S = \bigcup_{m \geq 0} S_m$ である。ここで、S_m は高々有限集合なので $S_m \in \mathcal{J}$ であり $m(S_m) = 0$. しかしながら、S については、
S を含む多角形は $[0, 1]^2$ を含むので、$m^*(S) = 1$
S は多角形を含まないので、$m_*(S) = 0$
となり、$S \notin \mathcal{J}$. 従って $\mathcal{J}$ は無限個の集合の和については閉じていない。さらに $m^*(S) \neq \lim_{m \to \infty} m^*(S_m)$ より、上面積 $m^*(\cdot)$ は集合の極限に関して "不連続" である。

例 1.1.5. 確率
表の出る確率 1/2, 裏のでる確率 1/2 のコインを無限回投げる。表を 1 , 裏を 0 で表す。このとき無限回投げたときのコインの出方の全体は、

$$\Sigma = \{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \{i_1 i_2 \ldots | i_1, i_2, \ldots \in \{0, 1\}\}$$

$i_1 i_2 i_3 \ldots$ という列は、1 回目に i_1, 2 回目に i_2, 3 回目に i_3 が出るという事象に対応する。N 回コインを投げたときの出方の全体を

$$W_N = \{0, 1\}^N = \{i_1 i_2 \ldots i_N | i_1, i_2, \ldots, i_N \in \{0, 1\}\}$$

とする。このとき $P_N : \mathcal{P}(W_N) \to [0, 1]$ を $A \in \mathcal{P}(W_N)$ に対して A のおこる確率とする。$A, B \in \mathcal{P}(W_N)$ で $A \cap B = \emptyset$ ならば

$$P_N(A \cup B) = P_N(A) + P_N(B)$$

例えば、3 回コインを投げて、２回目に表がでるという事象を A、１回目に表、２回目は裏がでるという事象を B とするとき、

$$A = \{i_1 i_2 i_3 | i_2 = 1\} = \{111, 110, 011, 010\},$$
$$B = \{i_1 i_2 i_3 | i_1 = 1, i_2 = 0\} = \{101, 100\}$$

であり、$P_3(A) = 1/2, P_3(B) = 1/4, P_3(A \cup B) = 3/4$ となる。

さて、無限回投げる場合を考える。$\pi_N : \mathcal{P}(W_N) \to \mathcal{P}(\Sigma)$ を $A \in \mathcal{P}(W_N)$ に対して

$$\pi_N(A) = \{i_1 i_2 i_3 \ldots | i_1 i_2 i_3 \ldots \in \Sigma, i_1 i_2 \ldots i_N \in A\}$$

で定義する。すなわち $\pi_N(A)$ は最初の N 回の投げ方が A に入る列の全体である。このとき $\mathcal{M}_N = \pi_N(\mathcal{P}(W_N)) \subseteq \mathcal{P}(\Sigma)$ とし $U = \pi_N(A) \in \mathcal{M}_N$ に対して、$P(U) = P_N(A)$ と定義する。$\mathcal{M}_N$ は最初の N 回の投げ方で決まる集合の全体である。例えば、$A = \{i_1 i_2 i_3 | i_2 = 1\} \in \mathcal{P}(W_3)$ に対して、$\pi_3(A)$ は２回目に表が出るという事象を表す。すなわち

$$\pi_3(A) = \{i_1 i_2 i_3 i_4 \ldots | i_1 i_2 i_3 \in A\} = \{i_1 i_2 i_3 i_4 \ldots | i_2 = 1\}$$

であり、$P(\pi_3(A)) = P_3(A) = 1/2.$

次に

$$\mathcal{M} = \bigcup_{N \geq 1} \mathcal{M}_N$$

とおく。このとき $P : \mathcal{M} \to [0, 1]$ であり、$A, B \in \mathcal{M}$ なら $A \cup B, A \cap B \in \mathcal{M}$ で

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

とくに $A \cap B = \emptyset$ ならば

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

が成り立つ。

ここまでで、$A \in \mathcal{M}$ に対して、A の起こる確率 $P(A)$ を定義することができた。さて $\mathcal{M}$ の定義から $A \in \mathcal{M}$ に対してはある $N \in \mathbb{N}$ があって $A \in \mathcal{M}_N$ となる。つまり、A は 1 回目から N 回目までの有限回の表・裏の出方で決まる集合である。つまり、$P : \mathcal{M} \to [0, 1]$ はこのような、“有限回の表・裏の出方で決まる事象” $A \in \mathcal{M}$ に A の起こる確率 $P(A)$ を対応させる写像である。それでは、無限回の表・裏の出る出方に関する確率、例えば、「表が出る回数が無限大である確率」はどのように考えればいいのであろうか？ 「表の出る回数が無限大」であるような出方の全体は

$$U = \{i_1 i_2 i_3 \ldots | i_1 i_2 i_3 \ldots \in \Sigma, i_n = 1 \text{ となる } n \text{ が無限個ある }\}$$

で定まる。U は有限回の表裏の出方では決まらない集合なので、$U \notin \mathcal{M}$. A_N を N 回目に表がでる事象とすると、$A_N = \{i_1 i_2 \ldots | i_N = 1\}$. このとき

$$U = \bigcap_{m \geq 1} \Big(\bigcup_{n \geq m} A_n \Big)$$

が成り立つ。$A_n \in \mathcal{M}$ であり $P(A_n) = 1/2$ である。しかしながら $\cup_{n \geq m} A_n$ は「m 回目以降に少なくとも 1 回は表がでる」ことに対応し、これは $\mathcal{M}$ には入っていない。いずれにせよ、「表が出る回数が無限大である確率」を考えるためには、P の定義域を U を含むように拡張する必要があることがわかる。

U の起こる確率 $P(U)$ を「きちんと求める」(=「数学的に定義をする」) 方法について、考察していく。

$$B_m = \bigcup_{n \geq m} A_n$$

と定義すると、B_m は上で述べたように「m 回目以降に少なくとも 1 回は表が出る」出方の全体である。B_m の補集合を C_m とおくと、C_m は「m 回目以降はすべて裏が出る」出方の全体になる。ここで、$C_{m,m+k}$ を m 回目から $m+k$ 回目まで裏がでる出方の全体とすると、$C_{m,mm+k} \in \mathcal{M}_{m+k} \subseteq \mathcal{M}$ である。このとき

$$C_m = \bigcap_{k \geq 1} C_{m,m+k}$$

ここで、$C_m \notin \mathcal{M}$ だが $P(C_{m,m+k}) = 2^{-k+1}$. よって、

- P の定義域で $\bigcap_{k \geq 1} C_{m,m+k}$ のように、無限個の集合の交わりをとることが許され、
- P について下の式の $\underset{**}{=}$ のような lim と $\bigcap_{k \geq 1}$ という二つの極限操作の入れ替えが可能である

ならば

$$P(C_m) = P\Big(\bigcap_{k \geq 1} C_{m,m+k} \Big) \underset{**}{=} \lim_{k \to \infty} P(C_{m,m+k}) = 0.$$

さらに、

- P の定義域に C_m の補集合 B_m も入ることが許され、
$P(B_m) = 1 - P(C_m) = 1$ が成り立ち、

- 再び $\underset{**}{=}$ の二つの極限操作の入れ替えが可能ならば、

$$P(U) = P\Big(\bigcap_{m\geq 1} B_m\Big) \underset{**}{=} \lim_{m\to\infty} P(B_m) = 1$$

が得られる。

まとめてみると、$P(U)$ が数学的に定義できるためには、P の定義域と、P について次の (a), (b), (c) のような操作が許されることが必要である。
(a)　P の定義域で補集合をとる操作が許される。すなわち P の定義域を $\mathcal{M}_*$ とするとき、$A \in \mathcal{M}_*$ ならば A の補集合 $A^c \in \mathcal{M}_*$.
(b)　P の定義域で無限個の集合の交わりをとることが許される。$U_1, U_2, \ldots \in \mathcal{M}_*$ ならば $\bigcap_{n\geq 1} U_n \in \mathcal{M}_*$
(c)　P に関して極限をとることが許される。すなわち $V_1, V_2, \ldots \in \mathcal{M}_*$ で $V_1 \supseteq V_2 \supseteq V_3 \supseteq \ldots$ ならば、

$$P\Big(\bigcap_{n\geq 1} V_n\Big) = \lim_{n\to\infty} P(V_n).$$

演習問題

演習 1.1.1. $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ で $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ とする。γ_1, γ_2 が共に $[0,1]$ 上 C^1 級（微分可能であり微分も連続）のとき、$\gamma([0,1]) \subset \mathbb{R}^2$ の Jordan 測度は 0 であることを示せ。

演習 1.1.2. 面積の場合と同様にして $\mathbb{R}$ の部分集合の「長さ」を定義せよ。$U = \{1/n | n = 1, 2, \ldots\}$ は長さが 0 であることをその定義に基づいて示せ。

§1.2　測度の定義

集合の大きさをはかる物差しを測度という。X を集合、$\mathcal{M}$ を X の部分集合の集まりとするとき、測度は一般に $\mathcal{M}$ から $[0, +\infty)$ への写像と考えられる。その満たすべき性質について考える。

記号. $\mathbb{R}_+^* = [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ とする。

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty.$$

, 任意の実数 a に対して、

$$a + (+\infty) = +\infty.$$

任意の $a > 0$ に対して

$$a \times (+\infty) = +\infty$$

と定義する。

定義 1.2.1 (σ-加法族（完全加法族, σ-algebra）). 集合 X に対して、X の部分集合の全体を $\mathcal{P}(X)$ とする。すなはち $\mathcal{P}(X) = \{A : A$ は X の部分集合$\}$ である。いま $\mathcal{P}(X)$ の部分集合 $\mathcal{M}$ が X の σ-加法族（完全加法族, σ-algebra）であるとはつぎの (S1), (S2), (S3) が成立するいこと。
(S1) $\emptyset \in \mathcal{M}$
(S2) $A \in \mathcal{M}$ ならば $A^c \in \mathcal{M}$
(S3) $A_i \in \mathcal{M}$ $(i = 1, 2, \cdots)$ ならば $\displaystyle\bigcup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{M}$

$\mathcal{M}$ が上の定義の (S3) を
(S4) $A, B \in \mathcal{M}$ ならば $A \cup B \in \mathcal{M}$
で置き換えたものをみたすとき、すなわち $\mathcal{M}$ が (S1), (S2), (S4) をみたすとき、 $\mathcal{M}$ を有限加法族という。

(S3) で特に $i \geq 3$ で $A_i = \emptyset$ とおき、$A_1 = A, A_2 = B$ とすると、(S4) が得られる。つまり (S4) は (S3) よりも弱い条件である。

例 1.2.2. 集合 X に対して、$\mathcal{P}(X)$ および $\{\emptyset, X\}$ は X の σ-加法族である。$\mathcal{P}(X)$ は X の σ-加法族のうちで最大のもの、$\{\emptyset, X\}$ は X の σ-加法族のうちで最小のものである。

定義 1.2.3 (測度（measure）). $\mathcal{M}$ を X の σ-加法族とする。$\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}_+^*$ が $\mathcal{M}$ を定義域とする X 上の（σ-加法的）測度（measure）であるとは、つぎの (M1), (M2), (M3) をみたすこと。
(M1) 任意の $A \in \mathcal{M}$ に対して $\mu(A) \geq 0, \mu(\emptyset) = 0$
(M2) 任意の $A, B \in \mathcal{M}$ に対して $A \cap B = \emptyset$ ならば、

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

(M3) 任意の増大列 $\{A_i\}_{i \geq 1} \subseteq \mathcal{M}$（$A_i \subseteq A_{i+1}$ が $i \geq 1$ で成立）に対して、

$$\mu\left(\bigcup_{i \geq 1} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} \mu(A_i)$$

一般に、X が集合、$\mathcal{M}$ が X の σ-加法族、μ が $\mathcal{M}$ を定義域とする X 上の測度であるとき、$(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間（measure space）という。

$\mathcal{M}$ を有限加法族とする。$\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}_+^*$ が (M1) と (M2) をみたすとき、μ を有限加法的測度という。

注意. $\{\mu(A_i)\}$ が $i \to \infty$ で $+\infty$ に発散するときは、$\lim_{i\to\infty} \mu(A_i) = +\infty$ と定義する。

例 1.2.4. (1)　X を集合、$\# : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}_+^*$ を例 1.1.1 と同じものとする。$\#$ は $\mathcal{P}(X)$ を定義域とする X 上の測度である。
(2)　W_N, P_N を例 1.1.5 と同じものとする。P_N は $\mathcal{P}(W_N)$ を定義域とする W_N 上の測度である。さらに $\mathcal{M}_N$ は Σ の σ-加法族であり、P は $\mathcal{M}_N$ を定義域とする Σ 上の測度である。$\mathcal{M}$ は有限加法族であり、P は $\mathcal{M}$ 上の有限加法的な測度である。

問題：§1.1 での面積や確率に対応する測度をどのようにつくるか？またそれらはどのような性質をもつか？
とくに面積に関しては、$T = \{A | A$ は多角形$\}$ とおき、$A \in T$ に対して $m(A) = A$ の面積 とするとき、$\mathbb{R}^2$ の σ-加法族 $\mathcal{M}$ と $\mathcal{M}$ を定義域とする測度 μ で、 $T \subseteq \mathcal{M}$, $\mu|_T = m$ となるようなものが、あるか？あるとすればどれぐらいあるか？
測度の作り方、
測度の性質、
記号：集合 A, B に対して、$A \backslash B = A \cap B^c$ と定義する。

命題 1.2.5. X を集合、$\mathcal{M}$ を X の σ-加法族とする。
(1)　$A, B \in \mathcal{M}$ ならば $A \cap B, A \backslash B \in \mathcal{M}$.
(2)　任意の $i \in \mathbb{N}$ について $A_i \in \mathcal{M}$ ならば、$\bigcap_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{M}$
(3)　X の集合列 $\{A_n\}_{n\geq 1}$ に対して、その上極限 $\limsup_{n\to\infty} A_n$ および下極限 $\liminf_{n\to\infty} A_n$ を

$$\limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{m\geq 1} \Big(\bigcup_{n\geq m} A_n \Big) \quad \text{および} \quad \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{m\geq 1} \Big(\bigcap_{n\geq m} A_n \Big)$$

で定義する。任意の $n \in \mathbb{N}$ で $A_n \in \mathcal{M}$ ならば $\limsup_{n\to+\infty} A_n, \liminf_{n\to+\infty} A_n \in \mathcal{M}$

X の集合列 $\{A_n\}_{n\geq 1}$ に対して $\limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n$ のとき $\lim_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$ とおく。

証明. (1)　$A, B \in \mathcal{M}$ ならば、(S2) より $A^c, B^c \in \mathcal{M}$. (S3) により $A^c \cup B^c \in \mathcal{M}$. 再び (S2) により $A \cap B = (A^c \cup A^B)^c \in \mathcal{M}$.　$A \backslash B = A \cap B^c$. $A, B^c \in \mathcal{M}$ より $A \backslash B \in \mathcal{M}$.
(2)　任意の i で $A_i \in \mathcal{M}$ とするとき、(S2) より任意の i で $(A_i)^c \in \mathcal{M}$. (S3) より $\bigcup_{i \geq 1} (A_i)^c \in \mathcal{M}$. 再び (S3) より $\bigcap_{i \geq 1} A_i = \left(\bigcup_{i \geq 1} (A_i)^c \right)^c \in \mathcal{M}$.
(3)　(1), (2) を組み合わせれば明らか。 □

命題 1.2.6. (1)　X, Λ を集合とする。いま $\lambda \in \Lambda$ に対して X の σ-加法族 $\mathcal{M}_\lambda$ が与えられているとする。このとき $\displaystyle\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{M}_\lambda$ は X の σ-加法族である。
(2)　X を集合、$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ とする。

$$\sigma(\mathcal{A}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{M}: \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M} \\ \mathcal{M} \text{ は } X \text{ の } \sigma\text{-加法族}}} \mathcal{M}$$

とおくとき、$\sigma(\mathcal{A})$ は X の $\mathcal{A}$ を含む最小の σ-加法族である。$\sigma(\mathcal{A})$ を $\mathcal{A}$ から生成される σ-加法族という。

　$\mathcal{P}(X)$ は σ-加法族であるので、$\mathcal{A} \supseteq \mathcal{M}$ となる X の σ-加法族としては必ず $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ が存在する。

証明. (1)　$\mathcal{M} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{M}_\lambda$ とおき $\mathcal{M}$ が (S1), (S2), (S3) をみたすことを示す。任意の $\lambda \in \Lambda$ で $\emptyset \in \mathcal{M}_\lambda$ より $\emptyset \in \mathcal{M}$. よって (S1). いま、$A \in \mathcal{M}$ とするとき、任意の $\lambda \in \Lambda$ で $A \in \mathcal{M}_\lambda$. よって $A^c \in \mathcal{M}_\lambda$. 従って $A^c \in \mathcal{M}$ となり (S2) が得られる。任意の $i \geq 1$ で $A_i \in \mathcal{M}$ とすると、任意の $\lambda \in \Lambda$ で $A_i \in \mathcal{M}_\lambda$. よって $\bigcup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{M}_\lambda$. これより $\bigcup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{M}$ となり (S3) が成立。
(2)　(1) より $\sigma(\mathcal{A})$ が σ-加法族であることは明らか。また、$\mathcal{A}$ を含む任意の σ-加法族は $\sigma(\mathcal{A})$ を含むことも定義より明らか。

□

定義 1.2.7. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする。すなわち $\mathcal{O}$ は X の開集合の全体である。このとき、$\sigma(\mathcal{O})$ を位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の Borel 集合族といい、$\mathcal{B}(X, \mathcal{O})$ (位相がわかっているときは $\mathcal{B}(X)$) と書く。

命題 1.2.8. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とする。
(1)　任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して $A_i \in \mathcal{M}$ で、任意の $i \neq j$ に対して $A_i \cap A_j = \emptyset$ ならば、

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n \right)$$

(2)　任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して $A_i \in \mathcal{M}$ で $A_i \supseteq A_{i+1}$ が成り立つとする。$\mu(A_1) < +\infty$ のとき、

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_i) = \mu\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right).$$

証明. (1)　$B_m = \bigcup\limits_{n=1}^{m} A_n$ とおくとき、$B_m \subseteq B_{m+1}$, $\bigcup\limits_{m\geq 1} B_m = \bigcup\limits_{n\geq 1} A_n$. いま $\mu(B_m) = \sum_{n=1}^{m} \mu(A_n)$ より (M3) を使うと示すべき式が得られる。
(2)　$i \geq 1$ で $C_i = A_i \backslash A_{i+1}$ とおく。さらに $A = \bigcap\limits_{n\geq 1} A_n$. とおくと $A_n = \bigcup\limits_{i\geq n} C_i \cup A$. (1) より $\mu(A_n) = \mu(A) + \sum_{i\geq n} \mu(C_i)$. いま $\mu(A_1) < +\infty$ より $\sum_{i\geq 1} \mu(C_i) < +\infty$. これより $\lim_{n\to\infty} \sum_{i\geq n} \mu(C_i) = 0$. よって $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$. □

定理 1.2.9 (Fatou の補題)**.** $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とする。$\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{M}$ とするとき、

$$\mu(\liminf_{n\to\infty} A_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n). \tag{1.2.1}$$

さらにある m に対して $\mu(\bigcup\limits_{n\geq m} A_n) < +\infty$ ならば

$$\limsup_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) \tag{1.2.2}$$

証明. $B_m = \bigcap\limits_{n\geq m} A_n$ とおくと B_m は単調増大列。(M3) より

$$\mu(\liminf_{n\to\infty} A_n) = \mu\left(\bigcup_{m\geq 1} B_m\right) = \lim_{m\to\infty} \mu(B_m).$$

一方、任意の $n \geq m$ に対して $\mu(B_m) \leq \mu(A_n)$ より、$\mu(B_m) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$. 上の等式と組み合わせれば (1.2.1) が得られる。

$k \geq 1$ に対して $C_k = \bigcup\limits_{n\geq k} A_n$ とおくとき、仮定より $\mu(C_m) < +\infty$. したがって命題 1.2.8-(2) より

$$\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) = \mu\left(\bigcap_{k\geq 1} C_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(C_n).$$

一方、任意の $n \geq k$ に対して $\mu(A_n) \leq \mu(C_k)$. これより $\limsup\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \mu(C_k)$. 上の等式と組み合わせれば (1.2.2) が得られる。 □

演習問題

演習 1.2.1. 測度の定義において、(M2) を次の (M2)' で置き換えても同値な定義が得られることを示せ。
(M2)' 任意の $A, B \in \mathcal{M}$ に対して、$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$

演習 1.2.2. $X = \{1, 2, 3\}$ とする。X の σ-加法族 をすべて挙げよ。

演習 1.2.3. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とする。さらに $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{M}$ とする。
(1) $B_1 = A_1$, $n \geq 2$ で $B_n = A_n \backslash \bigcup_{i=1}^{n-1} B_i$ とするとき $\bigcup_{n\geq 1} A_n = \bigcup_{n\geq 1} B_n$ を示せ。
(2) $\mu(\bigcup_{n\geq 1} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ を示せ。(この事実を測度の劣加法性という。)

演習 1.2.4. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とする。さらに $\{A_n\}_{n\geq 1}, \{B_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{M}$ とする。このとき

$$\mu\Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n \backslash \bigcup_{n\geq 1} B_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \backslash B_n)$$

を示せ。

演習 1.2.5. $X = \mathbb{N}$ に対して $\mathcal{P}(X)$ 上で定義された測度 $\#$ を考える。このとき $\{A_i\}_{i\geq 1} \subset \mathcal{P}(X)$ で、任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して $A_i \supseteq A_{i+1}$ を満たすが、$\lim_{n\to\infty} \#(A_n) = \#(\bigcap_{n\geq 1} A_n)$ を満たさないものの例をあげよ。

演習 1.2.6. X を集合とする。いま

$$\mathcal{M} = \{A | A \in \mathcal{P}(X), A \text{ あるいは } A^c \text{ が可算集合}\}$$

とすると $\mathcal{M}$ は σ-加法族になることを示せ。さらに

$$\mathcal{M}_0 = \{A | A \text{ あるいは } A^c \text{ が有限集合}\}$$

とするとき $\sigma(\mathcal{M}_0) = \mathcal{M}$ であることを示せ。

演習 1.2.7. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし、$\mathcal{B}(X, \mathcal{O})$ をその Borel 集合族とする。
(1) $\mathcal{C}$ を $(X, \mathcal{O})$ の閉集合の全体とする。このとき $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}(X, \mathcal{O})$ を示せ。
(2) $(X, \mathcal{O})$ が第 2 可算公理を満たすとする。このとき $(X, \mathcal{O})$ の可算な基底 $\mathcal{U}$ に対して、$\sigma(\mathcal{U}) = \mathcal{B}(X, \mathcal{O})$ であることを示せ。

演習 1.2.8. (X,d) を可分な距離空間とし、$\mathcal{B}(X)$ を (X,d) から定義される位相に関する Borel 集合族とする。
(1) $x \in X, r \geq 0$ に対して、$\overline{B}_r(x) = \{y | y \in X, d(x,y) \leq r\}$ とおき、$\mathcal{A} = \{\overline{B}_r(x) | x \in X, r > 0\}$ とするとき、$\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(X)$ を示せ。
(2) $X = \mathbb{R}^n$, d をユークリッドの距離とする。$i = 1, \ldots, n$ に対して、$a_i \leq b_i$ のとき $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i] = \{(x_1, \ldots, x_n) |$ 任意の i で $x_i \in [a_i, b_i]\}$ とし $\mathcal{U}$ をこのような形の集合をすべて集めたものとする。このとき $\sigma(\mathcal{U}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ を示せ。

演習 1.2.9. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とする。さらに $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{M}$ とする。
(1) $\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right)^c = \liminf_{n\to\infty} (A_n)^c$ を示せ。
(2) $\sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) < +\infty$ のとき、次を示せ。

$$\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0, \mu(\liminf_{n\to\infty} (A_n)^c) = \mu(X)$$

この事実を Borel-Cantelli（ボレルーカンテリ）の定理いう。確率論では重要な定理である。
[ヒント] $\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) \leq \mu(\bigcup_{n\geq m} A_n)$, μ の劣加法性をつかえ。

§1.3　測度の拡大、完備性、正則性

定義 1.3.1. (1) $(X, \mathcal{M}_1, \mu_1), (X, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ を測度空間とする。いま $(\mu_2, \mathcal{M}_2)$ が $(\mu_1, \mathcal{M}_1)$ の拡大であるとは、$\mathcal{M}_2 \supseteq \mathcal{M}_1$ かつ $\mu_2|_{\mathcal{M}_1} = \mu_1$ が成立することである。
(2) $(X, \mathcal{N}, \mu)$ を測度空間とする。X の σ-加法族 $\mathcal{M}$ に対して、$(X, \mathcal{N}, \mu)$ が $\mathcal{M}$-正則 ($\mathcal{M}$-regular) であるとは、$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ であり、任意の $A \in \mathcal{N}$ に対して、ある $B \in \mathcal{M}$ があって、$A \subseteq B$ かつ $\mu(A) = \mu(B)$ が成立することである。
(3) $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とする。このとき、μ が完備（complete）であるとは、$B \in \mathcal{M}$ かつ $\mu(B) = 0$ ならば、任意の $A \subseteq B$ に対して $A \in \mathcal{M}$ となることである。

命題 1.3.2 (Lebesgue 拡大)**.** $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とする。

$$\widetilde{\mathcal{M}} = \{A | A \subseteq X, \text{ある } B, C \in \mathcal{M} \text{ に対して、} \mu(B \backslash C) = 0 \text{ かつ } C \subseteq A \subseteq B\}$$

と定義する。このとき $\widetilde{\mathcal{M}}$ は X の $\mathcal{M}$ を含む σ-加法族である。さらに、$A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ に対して、$\mu(B \backslash C) = 0, C \subseteq A \subseteq B$ となる $B, C \in \mathcal{M}$ を選び、$\tilde{\mu}(A) = \mu(B) = \mu(C)$ と定義をすると、$\tilde{\mu}$ は $\widetilde{\mathcal{M}}$ を定義域とする完備かつ $\mathcal{M}$-正則な測度であり、$(\tilde{\mu}, \widetilde{\mathcal{M}})$ は $(\mu, \mathcal{M})$ の拡大である。

注意. $A \subseteq X$ とする。$i=1,2$ に対して $B_i, C_i \in \mathcal{M}$ があって、$\mu(B_i \backslash C_i)=0$ かつ $C_i \subseteq A \subseteq B_i$ をみたすとする。このとき、$\mu(B_1)=\mu(B_2)$ なので、$\tilde{\mu}(A)$ の値は一意に決まっている。

証明. $\mathcal{M} \subseteq \widetilde{\mathcal{M}}$ は $A \in \mathcal{M}$ に対して $B=C=A$ とすれば $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ となり明らか。$\widetilde{\mathcal{M}}$ が (S1) をみたすことも明らか。
(S2): $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ とする。$B, C \in \mathcal{M}$ を $C \subseteq A \subseteq B$ で $\mu(B \backslash C)=0$ となるようにとる。このとき、$B^c \subseteq A^c \subseteq C^c$. いま $C^c \backslash B^c = C^c \cap B = B \backslash C$. よって $\mu(C^c \backslash B^c)=0$. 従って $A^c \in \widetilde{\mathcal{M}}$.
(S3): $i \geq 1$ で $A_i \in \widetilde{\mathcal{M}}$ とする。$B_i, C_i \in \mathcal{M}$ で $C_i \subseteq A_i \subseteq B_i$ かつ $\mu(B_i \backslash C_i)=0$ とする。$A=\bigcup_{i\geq 1} A_i, B=\bigcup_{i\geq 1} B_i, C=\bigcup_{i\geq 1} C_i$ とおくとき、$B \backslash C \subseteq \bigcup_{i\geq 1} B_i \backslash C_i$ である。測度の劣加法性より

$$\mu(B \backslash C) \leq \mu\big(\bigcup_{i\geq 1}(B_i \backslash C_i)\big) \leq \sum_{i\geq 1} \mu(B_i \backslash C_i)=0.$$

従って、$A \in \widetilde{\mathcal{M}}$.
(M1): $\tilde{\mu}(A) \geq 0$ かつ $\tilde{\mu}(\emptyset)=0$ は定義より明らか。
(M2): $A_1, A_2 \in \widetilde{\mathcal{M}}$ で $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ とする。さらに $i=1,2$ に対して $B_i, C_i \in \mathcal{M}$, $C_i \subseteq A_i \subseteq B_i$ で $\mu(B_i \backslash C_i)=0$ とする。(S3) と同様の議論により、$C_1 \cup C_2 \subseteq A_1 \cup A_2 \subseteq B_1 \cup B_2$ で $\mu\big((B_1 \cup B_2)\backslash(C_1 \cup C_2)\big)=0$. ここで $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ より $\tilde{\mu}(A_1 \cup A_2)=\mu(C_1 \cup C_2)=\mu(C_1)+\mu(C_2)=\tilde{\mu}(A_1)+\tilde{\mu}(A_2)$.
(M3): 任意の $i \geq 1$ で $A_i \in \widetilde{\mathcal{M}}, A_i \subseteq A_{i+1}$ とする。このとき、任意の i に対して $B_i, C_i \in \mathcal{M}$ で $C_i \subset A_i \subset B_i, \mu(B_i \backslash C_i)=0$ となるものがある。このとき $\tilde{\mu}(A_i)=\tilde{\mu}(B_i)$. いま $B'_n=\bigcup_{i=1}^{n} B_i, C'_n=\bigcup_{i=1}^{n} C_i$ とすれば、$\{B'_i\}, \{C'_i\}$ も単調増大列。$C_i \subseteq C'_i \subseteq A_i \subseteq B_i \subseteq B'_i$ かつ

$$\mu(B'_n \backslash C'_n) \leq \mu\big(\bigcup_{i=1}^{n}(B_i \backslash C_i)\big) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i \backslash C_i)=0$$

より $\tilde{\mu}(A_n)=\mu(B_n)=\mu(B'_n)$. $A=\bigcup_{i\geq 1} A_i, B=\bigcup_{i\geq 1} B'_i, C=\bigcup_{i\geq 1} C'_i$ とおけば $C \subset A \subset B$ で (S3) と同様の議論より $\mu(B \backslash C)=0$. 任意の n で $B'_n \subseteq B'_{n+1}$ なので (M3) より

$$\tilde{\mu}(A)=\mu(B)=\lim_{n\to\infty} \mu(B'_n)=\lim_{n\to\infty} \tilde{\mu}(A_n)$$

よって $(X, \widetilde{\mathcal{M}}, \tilde{\mu})$ に対して (M3) が成り立つ。
$(X, \widetilde{\mathcal{M}}, \tilde{\mu})$ が $\mathcal{M}$-正則かつ完備であることは定義より明らかである。 □

この $(\tilde{\mu}, \widetilde{\mathcal{M}})$ を $(\mu, \mathcal{M})$ の Lebesgue 拡大という。

定義 1.3.3. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とする。$(X, \mathcal{M}, \mu)$ が σ-有限であるとは、$\{X_i\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{M}$ で $\bigcup_{n\geq 1} X_n = X$ かつ任意の n に対して $\mu(X_n) < +\infty$ となるものが存在することである。

命題 1.3.4. $(X, \mu, \mathcal{M})$ を測度空間、$(\tilde{\mu}, \widetilde{\mathcal{M}})$ を $(\mu, \mathcal{M})$ の *Lebesgue* 拡大とする。
(1) $(\mu, \mathcal{M})$ は σ-有限とする。このとき、$(\nu, \mathcal{N})$ が $(\mu, \mathcal{M})$ の $\mathcal{M}$-正則な拡大なら $\mathcal{N} \subseteq \widetilde{\mathcal{M}}$ である。
(2) $(\nu, \mathcal{N})$ を $(\mu, \mathcal{M})$ の完備な拡張とする。このとき、$\mathcal{N} \supseteq \widetilde{\mathcal{M}}$ である。

証明. (1) まず、任意の $A \in \mathcal{N}$ に対して、ある $B \in \mathcal{M}$ があって、$A \subseteq B$ かつ $\nu(B \backslash A) = 0$ を示す。

いま、$\mathcal{M}$ の増大列 $\{X_i\}_{i\geq 1} \subset \mathcal{M}$ があって、$\bigcup_{i\geq 1} X_i = X$ かつ $\mu(X_i) < \infty$ とする。ここで、$A \cap X_i \in \mathcal{N}$ であり、$(\nu, \mathcal{N})$ は $\mathcal{M}$-正則であるから、ある $B_i \in \mathcal{M}$ に対して、$A \cap X_i \subseteq B_i$ かつ $\nu(B_i) = \nu(A \cap X_i)$. ここで $\nu(A \cap X_i) < \infty$ より $\nu(B_i \backslash (A \cap X_i)) = 0$. ここで $B = \bigcup_{i\geq 1} B_i$ とおくとき、$B \backslash A \subseteq \bigcup_{i\geq 1} B_i \backslash (A \cap X_i)$. 従って、$\nu(B \backslash A) \leq \sum_{i\geq 1} \nu\big(B_i \backslash (A \cap X_i)\big) = 0$.

次に A^c に対して同様の議論よりある $D \in \mathcal{M}$ があって、$\nu(D \backslash A^c) = 0$. $C = D^c$ とおけば、$C \subseteq A$ であり $\nu(A \backslash C) = 0$ 以上より、$\mu(B \backslash C) = 0$ であることがわかり、$A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ となる。
(2) $A \in \widetilde{\mathcal{M}}$ とする。このとき $B, C \in \mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ で、$C \subseteq A \subseteq B$ かつ $\mu(B \backslash C) = \nu(B \backslash C) = 0$ となるものがある。ここで、$(\nu, \mathcal{N})$ は完備であり、$A \backslash C \subseteq B \backslash C$ より $A \backslash C \in \mathcal{N}$. よって $A = C \cup (A \backslash C) \in \mathcal{N}$. □

命題 1.3.4 より、$(\mu, \mathcal{M})$ が σ-有限ならその Lebesgue 拡大 $(\tilde{\mu}, \widetilde{\mathcal{M}})$ は $(\mu, \mathcal{M})$ の $\mathcal{M}$-正則な拡大で最大なものでありかつ $(\mu, \mathcal{M})$ の完備な拡大で最小のものでもある。つまり

系 1.3.5. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ は σ-有限な測度空間であるとする。このとき、$(\mu, \mathcal{M})$ の $\mathcal{M}$-正則かつ完備な拡大は唯一つ存在して $(\mu, \mathcal{M})$ の *Lebesgue* 拡大に一致する。

定義 1.3.6. X を集合、$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ とする。
(1) $\mathcal{A}$ が乗法族であるとは、任意の $A, B \in \mathcal{A}$ に対して $A \cap B \in \mathcal{A}$ となることである。
(2) $\mathcal{A}$ が Dynkin 族であるとは、次の (D1), (D2), (D3) が成立することで

ある。
(D1) $X \in \mathcal{A}$
(D2) $A, B \in \mathcal{A}$ で $A \supseteq B$ ならば $A \backslash B \in \mathcal{A}$.
(D3) $\{A_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{A}$ で $i \neq j$ ならば $A_i \cap A_j = \emptyset$ のとき $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{A}$.

任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $\mathcal{A}_\lambda$ が X の Dynkin 族とする。このとき $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda$ も Dynkin 族である。したがって、任意の $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ に対して $\mathcal{A}$ を含む最小の Dynkin 族が存在する。それを $\delta(\mathcal{A})$ と書き $\mathcal{A}$ から生成される Dynkin 族という。実際、

$$\delta(\mathcal{A}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{U}:\mathcal{U} \supseteq \mathcal{A} \\ \mathcal{U} \text{ は Dynkin 族}}} \mathcal{U}$$

である。

補題 1.3.7. *$\mathcal{A}$ が Dynkin 族かつ乗法族ならば、$\mathcal{A}$ は σ-加法族*

証明. $A \in \mathcal{A}$ ならば、$X \in \mathcal{A}$ なので $A^c = X \backslash A \in \mathcal{A}$

$A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$ より $A, B \in \mathcal{A}$ なら $A \cup B \in \mathcal{A}$.

$A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{A}$ とする。いま $B_0 = \emptyset$, $B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ とすると $B_n \in \mathcal{A}$. さらに $\bigcup_{i \geq 1} B_i = \bigcup_{i \geq 1} A_i$. ここで B_i は単調増大列なので、$n = 1, 2, \ldots$ で $C_n = B_n \backslash B_{n-1}$ とおくと、$C_n \in \mathcal{A}$ であり $\bigcup_{i \geq 1} B_i = \bigcup_{i \geq 1} C_i$. いま、$i \neq j$ ならば $C_i \cap C_j = \emptyset$ なので (D3) より $\bigcup_{i \geq 1} A_i = \bigcup_{i \geq 1} C_i \in \mathcal{A}$. □

定理 1.3.8 (Dynkin 族定理)**.** *$\mathcal{A}$ が乗法族ならば $\delta(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$.*

証明. σ-加法族ならば Dynkin 族なので、$\delta(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{A})$. よって $\delta(\mathcal{A}) \supseteq \sigma(\mathcal{A})$ を示せばよい。ここで、$\delta(\mathcal{A})$ が乗法族であることが言えれば、上の補題より $\delta(\mathcal{A})$ は σ-加法族となり、$\delta(\mathcal{A}) \supseteq \sigma(\mathcal{A})$ が成立。以上より、$\delta(\mathcal{A})$ が乗法族であることを示す。

$$\mathcal{A}_1 = \{A |\, \text{任意の } B \in \mathcal{A} \text{ に対して } A \cap B \in \delta(A)\}$$

とする。このとき $\mathcal{A}$ は乗法族より $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_1$. 次に $\mathcal{A}_1$ は Dynkin 族であることを示す。$X \in \mathcal{A}_1$ は明らか。 $A \supseteq C$ で $A, C \in \mathcal{A}_1$ とする。$B \in \mathcal{A}$ に対して $(A \backslash C) \cap B = (A \cap B) \backslash (C \cap B) \in \delta(\mathcal{A})$. よって $A \backslash C \in \mathcal{A}_1$. 次に $A_i \in \mathcal{A}_1$ で $i \neq j$ ならば $A_i \cap A_j = \emptyset$ とする。このとき $B \in \mathcal{A}$ に対して、$(\bigcup_{i \geq 1} A_i) \cap B = \bigcup_{i \geq 1} (A_i \cap B) \in \delta(\mathcal{A})$. 従って $\bigcup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{A}_1$. 以上より $\mathcal{A}_1$ は Dynkin

族である。よって $\delta(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}_1$. つまり任意の $A \in \delta(\mathcal{A})$, 任意の $B \in \mathcal{A}$ に対して $A \cap B \in \delta(\mathcal{A})$ である。次に、

$$\mathcal{A}_2 = \{B|\,\text{任意の } A \in \delta(\mathcal{A}) \text{ に対して } A \cap B \in \delta(\mathcal{A})\}$$

とおく。上の結果により、$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_2$. さらに上と同様の議論により $\mathcal{A}_2$ は Dynkin 族であることが示されるので $\delta(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}_2$. つまり $\delta(\mathcal{A})$ は乗法族。 □

補題 1.3.9. X を集合、$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ とする。$Y \subseteq X$ に対して、$\mathcal{A}_Y = \{A \cap Y | A \in \mathcal{A}\}$ と定義し、$\sigma_Y(\mathcal{A}_Y)$ を $\mathcal{A}_Y$ から生成される Y の σ-加法族とする。このとき $\sigma_Y(\mathcal{A}_Y) = \sigma(\mathcal{A})|_Y$、ただし $\sigma(\mathcal{A})|_Y = \{A \cap Y | A \in \sigma(\mathcal{A})\}$.

証明. $\sigma(\mathcal{A})|_Y$ は Y の σ-加法族であり、$\sigma(\mathcal{A})|_Y \supseteq \mathcal{A}_Y$ より、$\sigma(\mathcal{A})|_Y \subseteq \sigma_Y(A_Y)$. 次に、$Z = Y^c$ とする。いま $\sigma_Y(\mathcal{A}_Y) \oplus \sigma_Z(\mathcal{A}_Z) = \{A \cup B | A \in \sigma_Y(\mathcal{A}_Y), B \in \sigma_Z(\mathcal{A}_Z)\}$ とおくと $\sigma_Y(\mathcal{A}_Y) \oplus \sigma_Z(\mathcal{A}_Z)$ は X の σ-加法族であり $\mathcal{A}$ を含む。つまり、$\sigma_Y(\mathcal{A}_Y) \oplus \sigma_Z(\mathcal{A}_Z) \supseteq \sigma(\mathcal{A})$. 従って、$\sigma_Y(\mathcal{A}_Y) \supseteq \sigma(\mathcal{A})|_Y$. 以上より $\sigma_Y(\mathcal{A}_Y) = \sigma(\mathcal{A})|_Y$. □

定理 1.3.10. $(X, \mathcal{M}, \mu), (X, \mathcal{N}, \nu)$ は測度空間、$\mathcal{A} \subset \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ は乗法族であり、次の条件 (EX1), (EX2) をみたす。
(EX1) 任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して、$\mu(A) = \nu(A)$
(EX2) $X_1, X_2, \ldots \in \mathcal{A}$ で $\bigcup\limits_{i \geq 1} X_i = X$, 任意の $n \geq 1$ に対して $\mu(X_n) < +\infty$ かつ $X_n \subseteq X_{n+1}$ をみたすものが存在する。
このとき $\sigma(\mathcal{A})$ 上で μ と ν は一致する。

証明. Step 1: $\mu(X) = \nu(X) < +\infty$ のとき

$$\mathcal{A}_* = \{A | A \in \mathcal{M} \cap \mathcal{N}, \mu(A) = \nu(A)\}$$

とおく。$\mu(X) = \nu(X)$ より $X \in \mathcal{A}_*$. $A, B \in \mathcal{A}_*$ で $A \supseteq B$ ならば、$\mu(A \backslash B) = \mu(A) - \mu(B) = \nu(A) - \nu(B) = \nu(A \backslash B)$. よって $A \backslash B \in \mathcal{A}_*$. さらに $A_i \in \mathcal{A}_*$ で $i \neq j$ ならば $A_i \cap A_j = \emptyset$ とするとき、$\mu\big(\bigcup\limits_{i \geq 1} A_i\big) = \sum_{i \geq 1} \mu(A_i) = \sum_{i \geq 1} \nu(A_i) = \nu\big(\bigcup\limits_{i \geq 1} A_i\big)$. 従って $\bigcup\limits_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{A}_*$. 以上より $\mathcal{A}_*$ は Dynkin 族である。$\mathcal{A}_* \supseteq \mathcal{A}$ より $\mathcal{A}_* \supseteq \delta(\mathcal{A})$. いま定理 1.3.8 より $\delta(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$. よって $\mathcal{A}_* \supseteq \sigma(\mathcal{A})$. つまり $\sigma(\mathcal{A})$ 上で $\mu = \nu$.
Step 2: 一般の場合
任意の i について $\mathcal{A}_{X_i}$ は乗法族であり $\mathcal{A}_{X_i} \subseteq \mathcal{M}|_{X_i} \cap \mathcal{N}|_{X_i}$. Step 1 より μ と ν は $\sigma_{X_i}(A_{X_i})$ 上で一致する。補題 1.3.9 より $\sigma(\mathcal{A})|_{X_i}$ 上で $\mu = \nu$. つまり $A \in \sigma(\mathcal{A})$ に対して、任意の i で $\mu(A \cap X_i) = \nu(A \cap X_i)$. 従って $\mu(A) = \lim_{i \to \infty} \mu(A \cap X_i) = \lim_{i \to \infty} \nu(A \cap X_i) = \nu(A)$. □

演習問題

演習 1.3.1. $(X,\mathcal{M},\mu)$ を測度空間とし、$A\subseteq X$ とする。いま $i=1,2$ に対して $B_i,C_i\in\mathcal{M}$ は $\mu(B_i\backslash C_i)=0$ かつ $C_i\subseteq A\subseteq B_i$ をみたすとする。このとき、$\mu(B_1)=\mu(B_2)$ であることを示せ。

演習 1.3.2. X,Λ を集合、任意の $\lambda\in\Lambda$ に対して $\mathcal{A}_\lambda$ を X の Dynkin 族とする。このとき、$\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{A}_\lambda$ も Dynkin 族であることを示せ。

演習 1.3.3. X を集合、$\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}(X)$ とする。$\mathcal{A}$ に関する条件 (D3)' を次のように定義する。
(D3)' $A_1,A_2,\ldots\in\mathcal{A}$ で任意の n に対して $A_n\subseteq A_{n+1}$ ならば $\bigcup\limits_{n\geq1}A_n\in\mathcal{A}$
$\mathcal{A}$ が X の Dynkin 族であるための必要十分条件は、(D1), (D2) かつ (D3)' であることを示せ。

演習 1.3.4. $(X,\mathcal{M},\mu)$ を測度空間, Y を集合、$f:X\to Y$ とする。
(1) $\mathcal{N}=\{A|A\subseteq Y,f^{-1}(A)\in\mathcal{M}\}$ は σ-加法族となることを示せ。
(2) $A\in\mathcal{N}$ に対して $\nu(A)=\mu(f^{-1}(A))$ と定義する。このとき $(Y,\mathcal{N},\nu)$ は測度空間になることを示せ。
(3) $(Y,\mathcal{N},\nu)$ が σ-有限ならば $(X,\mathcal{M},\mu)$ も σ-有限であることを示せ。またこの逆は成り立つか？
(4) $(X,\mathcal{M},\mu)$ が完備ならば $(Y,\mathcal{N},\nu)$ も完備であることを示せ。
(5) X,Y が位相空間であり f は連続とする。$\mathcal{B}(X)\subseteq\mathcal{M}$ ならば $\mathcal{B}(Y)\subseteq\mathcal{N}$ を示せ。
(6) (5) の条件のもとで、$(X,\mathcal{M},\mu)$ が Borel 正則ならば $(Y,\mathcal{N},\nu)$ も Borel 正則と言えるか？
ν を f による μ の像測度といい、$\nu=\mu\circ f^{-1}$ あるいは $f_*\mu$ などと書く。

演習 1.3.5. (1) X を集合、$\mathcal{M}$ を X 上の σ-加法族とする。$Y\subseteq X$ に対して、$\mathcal{M}|_Y=\{A\cap Y|A\in\mathcal{M}\}$ と定義するとき、$\mathcal{M}|_Y$ は Y 上の σ-加法族になることを示せ。さらに $Y\in\mathcal{M}$ ならば $\mathcal{M}|_Y\subset\mathcal{M}$ を示せ。
(2) $(X,\mathcal{M},\mu)$ を測度空間、$Y\in\mathcal{M}$ とする。　このとき $\mu|_Y=\mu|_{\mathcal{M}_Y}$ と定義すれば $(Y,\mathcal{M}|_Y,\mu|_Y)$ は測度空間となることを示せ。
(3) X を集合、$X=Y\cup Z, Y\cap Z=\emptyset$ とする。いま $\mathcal{M}_Y,\mathcal{M}_Z$ をそれぞれ Y, Z の σ-加法族とする。このとき

$$\mathcal{M}_Y\oplus\mathcal{M}_Z=\{A\cup B|A\in\mathcal{M}_Y,B\in M_Z\}$$

とおけば、$\mathcal{M}_Y\oplus\mathcal{M}_Z$ は X の σ-加法族であることを示せ。

演習 1.3.6. 測度空間 $(X, \mathcal{P}(X), \#)$ (ただし $\#$ は要素の個数) が σ-有限であるための必要十分条件は X の濃度が高々可算であることを示せ。

演習 1.3.7. $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \mu)$, $(\mathbb{R}^n, \mathcal{N}, \nu)$ を測度空間とし、$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ を $\mathbb{R}^n$ のユークリッドの距離に関する Borel 集合族とする。また $\mathcal{U}$ を $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ の形の集合を集めたもの ($\emptyset$ も含む) とする。いま $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \supset \mathcal{U}$ であり、任意の $A \in \mathcal{U}$ に対して $\mu(A) = \nu(A) < +\infty$ が成り立つならば $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ であり、$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 上 μ と ν は一致することを示せ。

演習 1.3.8. $\Sigma = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ とし、$i_1, i_2, \ldots, i_n \in \{0,1\}$ に対して

$$\Sigma_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \{a_1 a_2 \ldots | a_1 a_2 \ldots \in \Sigma, a_1 = i_1, a_2 = i_2, \ldots, a_n = i_n\}$$

とし $\mathcal{A} = \{\Sigma_{i_1 i_2 \ldots i_n} | n \geq 1, i_1, \ldots, i_n \in \{0,1\}\} \cup \{\emptyset, \Sigma\}$ とおく。
(1) $\mathcal{A}$ は乗法族であることを示せ。
(2) $A \in \mathcal{A}$ とする。Σ に $\{0,1\}$ の無限直積としての直積位相をいれておく。このとき直積位相の定義より A は開集合であることを示せ。さらに、ある $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{A}$ があって $A^c = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$ であることを示し、これを用いて A は閉集合でもあることを証明せよ。
(3) $\sigma(\mathcal{A})$ は Σ の Borel 集合族と一致することを示せ。
(4) $(\Sigma, \mathcal{B}(\Sigma), P_1), (\Sigma, \mathcal{B}(\Sigma), P_2)$ が測度空間で P_1 と P_2 が $\mathcal{A}$ 上一致するなら、$P_1 = P_2$ を示せ。

§1.4 測度の構成

定義 1.4.1 (外測度 (outer measure))**.** X を集合とする。$\nu : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}_+^*$ が X の外測度 (outer measure) であるとは、次の 3 つの条件 (OM1), (OM2), (OM3) を満たすこと。
(OM1) $\nu(\emptyset) = 0$
(OM2) $A \subseteq B \subseteq X$ ならば $\nu(A) \leq \nu(B)$
(OM3) $\{A_i\}_{i=1,2,\cdots} \subseteq X$ ならば $\nu(\bigcup_{i \geq 1} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)$

定理 1.4.2 (Caratéodory (カラテオドリ) の定理)**.** ν を X の外測度とする。いま $A \subseteq X$ が $\nu-$ 可測 (ν-*measurable*) であるとは任意の $E \subseteq X$ に対して

$$\nu(E) = \nu(E \cap A) + \nu(E \cap A^c)$$

が成立することと定義する。このとき
(1) $\mathcal{M}(\nu) = \{A | A \subseteq X, A$ は $\nu-$ 可測 $\}$ とするとき、$\mathcal{M}(\nu)$ は $\sigma-$ 加法族で

ある。
(2) $\nu|_{\mathcal{M}(\nu)} : \mathcal{M}(\nu) \to \mathbb{R}_+^*$ は $\mathcal{M}(\nu)$ を定義域とする X 上の完備な測度である。

証明. $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\nu)$ とする。$\emptyset \in \mathcal{M}$ および $A \in \mathcal{M}$ ならば $A^c \in \mathcal{M}$ は ν-可測であることの定義より明らかである。いま $A, B \in \mathcal{M}$ とする。このとき、$E \subseteq X$ に対して

$$\begin{aligned}\nu(E \cap (A \cup B)) &= \nu(E \cap (A \cup B) \cap A) + \nu(E \cap (A \cup B) \cap A^c) \\ &= \nu(E \cap A) + \nu(E \cap (B \cap A^c))\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}&\nu(E \cap (A \cup B)) + \nu(E \cap (A \cup B)^c) \\ &= \nu(E \cap A) + \nu(E \cap B \cap A^c) + \nu(E \cap A^c \cap B^c) \\ &= \nu(E \cap A) + \nu(E \cap A^c) = \nu(E)\end{aligned}$$

従って、$A \cup B \in \mathcal{M}$ である。さらに $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$ より、$A, B \in \mathcal{M}$ なら $A \cap B \in \mathcal{M}$. これらより帰納的に $A_i \in \mathcal{M}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ならば $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i, \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{M}$ である。

さて $A_i \in \mathcal{M}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ のとき $A = \bigcup\limits_{i \geq 1} A_i, B_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i, C_1 = A_1, C_n = B_n \backslash B_{n-1} (n \geq 2)$ とおく。このとき $B_n, C_n \in \mathcal{M}$ であるから、$n \geq 2$ で

$$\begin{aligned}\nu(E \cap B_n) &= \nu(E \cap B_n \cap C_n) + \nu(E \cap B_n \cap (C_n)^c) \\ &= \nu(E \cap C_n) + \nu(E \cap B_{n-1}).\end{aligned}$$

この式を帰納的に用いて、さらに、$B_n \subseteq A$ を考慮すると $n \geq 2$ で

$$\begin{aligned}\nu(E) &= \nu(E \cap B_n) + \nu(E \cap (B_n)^c) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \nu(E \cap C_i) + \nu(E \cap (B_n)^c) \\ &\geq \sum_{i=1}^{n} \nu(E \cap C_i) + \nu(E \cap A^c)\end{aligned} \tag{1.4.1}$$

$n \to \infty$ とし、$\sum_{i \geq 1} \nu(E \cap C_i) \geq \nu(\bigcup\limits_{n \geq 1} (E \cap C_i)) = \nu(E \cap A)$ を用いれば、

$$\nu(E) \geq \nu(E \cap A) + \nu(E \cap A^c).$$

逆向きの不等号は外測度の定義より明らかだから上の式では等号が成立している。従って $A \in \mathcal{M}$ である。以上で $\mathcal{M}$ が σ-加法族であることが示された。

次に、$\nu|_{\mathcal{M}}$ が測度であることを示す。(M1) は定義より明らか。

(M2): $A, B \in \mathcal{M}$, $A \cap B = \emptyset$ とするとき

$$\nu(A \cup B) = \nu(A) + \nu(B \cap A^c) = \nu(A) + \nu(B).$$

(M3): 増大列 $\{A_i\}_{i \geq 1} \subseteq \mathcal{M}$ （$A_i \subseteq A_{i+1}$ が $i \geq 1$ で成立）に対して、$A = \bigcup_{i \geq 1} A_i, C_1 = A_1, C_n = A_n \backslash A_{n-1}$ $(n \geq 2)$ とおいて $E = A$ として (1.4.1) と同様の議論をすれば $\nu(A) \geq \sum_{i=1}^{n} \nu(C_i) = \nu(A_n)$. (OM3) より、$\sum_{i=1}^{\infty} \nu(C_i) \geq \nu(A)$ なので、

$$\nu(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \nu(C_i) = \lim_{n \to \infty} \nu(A_n) \geq \nu(A).$$

以上より $\nu|_{\mathcal{M}}$ は $\mathcal{M}$ を定義域とする X 上の測度であることが示された。最後に $(\nu|_{\mathcal{M}}, \mathcal{M})$ が完備であることを示す。$B \in \mathcal{M}$ で $\nu(B) = 0$ とする。$A \subseteq B$ のとき $0 \leq \nu(E \cap A) \leq \nu(E \cap B) \leq \nu(B) = 0$ である。また $\nu(E) = \nu(E \cap B) + \nu(E \cap B^c) = \nu(E \cap B^c)$ より $\nu(E) \geq \nu(E \cap A^c) \geq \nu(E \cap B^c) \geq \nu(E)$. 従って、$\nu(E) = \nu(E \cap A) + \nu(E \cap A^c)$ であり $A \in \mathcal{M}$ かつ $\nu(A) = 0$. □

定理 1.4.3. X を集合、$\mathcal{A}$ を X の部分集合からなる乗法族、$\nu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+^*$ とし、次の 3 つの条件 (CM1), (CM2), (CM3) を仮定する。

(CM1) $\emptyset \in \mathcal{A}$ であり $\nu(\emptyset) = 0$.

(CM2) $A, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ で $A \subseteq \bigcup_{i \geq 1} A_i$ ならば

$$\nu(A) \leq \sum_{i \geq 1} \nu(A_i)$$

(CM3) 任意の $A, B \in \mathcal{A}$ に対して $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$ で

$$A \cap B^c \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} A_i \quad \text{かつ} \quad \nu(A) = \nu(A \cap B) + \sum_{i=1}^{k} \nu(A_i)$$

をみたすものがある。

このとき測度空間 $(X, \sigma(\mathcal{A}), \mu)$ で

$$\text{任意の } A \in \mathcal{A} \text{ に対して } \mu(A) = \nu(A) \tag{**}$$

をみたすものが存在する。さらに、下の条件 (CM4) が成り立てば、上の条件 (**) をみたす $\sigma(\mathcal{A})$ を定義域とする測度は一意的である。またこのとき $(X, \sigma(\mathcal{A}), \mu)$ は σ-有限である。
(CM4)　任意の $n \geq 1$ に対して $\nu(U_n) < +\infty$ かつ $U_n \subseteq U_{n+1}$ をみたし更に

$$X = \bigcup_{n \geq 1} U_n$$

が成立するような $\{U_n\}_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{A}$ が存在する。

証明. $V \subseteq X$ に対して、ある $V_1, V_2, \ldots \in \mathcal{A}$ があって $V \subseteq \underset{i \geq 1}{\cup} V_i$ のときは、

$$\nu_*(V) = \inf\{\sum_{i \geq 1} \nu(A_i) | A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}, V \subseteq \underset{i \geq 1}{\cup} A_i\}$$

そうでないときは、$\nu_*(V) = +\infty$ とする。このとき (CM1) より $\nu_*(\emptyset) = 0$. (OM2) は定義より明らか。また、$A \subseteq \underset{i \geq 1}{\cup} A_i$ のとき、$\epsilon > 0$ とすると、各 i に対してある $\{A_{i,j}\}_{j \geq 1} \subseteq \mathcal{A}$ で

$$\sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_{i,j}) < \nu_*(A_i) + \epsilon/2^i$$

を満たすものがある。このとき、$A \subseteq \underset{i,j \geq 1}{\cup} A_{i,j}$ なので、

$$\nu_*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_{i,j}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} (\nu_*(A_i) + \epsilon/2^i) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu_*(A_i) + \epsilon).$$

$\epsilon > 0$ は任意なので、$\nu_*(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \nu_*(A_i)$. 従って (OM3) が成り立ち、$\nu_*$ は外測度である。

次に任意の $A \in \mathcal{A}$ が ν_*-可測であることを示す。$E \subseteq X$ に対して $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ があって $E \subseteq \underset{i \geq 1}{\cup} A_i$ とする。(CM3) より任意の i に対して、$B_{i,1}, \ldots, B_{i,n_i} \in \mathcal{A}$ が存在して、$A_i \cap A^c \subseteq \overset{n_i}{\underset{j=1}{\cup}} B_{i,j}$ かつ $\nu(A_i) = \nu(A_i \cap A) + \sum_{j=1}^{n_i} \nu(B_{i,j})$ をみたす。このとき $E \cap A \subseteq \underset{i \geq 1}{\cup} (A_i \cap A), E \cap A^c \subseteq \underset{i \geq 1}{\cup} (\overset{n_i}{\underset{j=1}{\cup}} B_{i,j})$ であり、

$$\begin{aligned}\sum_{i \geq 1} \nu(A_i) &= \sum_{i \geq 1} \nu(A_i \cap A) + \sum_{i \geq 1} \sum_{j=1}^{n_i} \nu(B_{i,j}) \\ &\geq \nu_*(E \cap A) + \nu_*(E \cap A^c)\end{aligned}$$

である。よって $\nu_*(E) \geq \nu_*(E \cap A) + \nu_*(E \cap A^c)$. 逆の不等号は外測度の性質より明らかなので、

$$\nu_*(E) = \nu_*(E \cap A) + \nu_*(E \cap A^c) \tag{1.4.2}$$

E の $\mathcal{A}$ の要素による可算被覆が存在しないときは、$E \cap A^c$ は $\mathcal{A}$ の要素による可算被覆を持たないので $\nu_*(E \cap A^c) = +\infty$ より (1.4.2) が成立。よって A は ν_*-可測である。従って、$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}(\nu_*)$. これより $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}(\nu_*)$ である。いま $\mu = \nu_*|_{\sigma(\mathcal{A})}$ とおく。このとき (CM2) より任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して $\mu(A) = \nu_*(A) = \nu(A)$. 従って μ は必要な性質をもっている。
さて (CM4) がみたされるならば、 定理 1.3.10 より $\sigma(\mathcal{A})$ を定義域とする測度で $\mathcal{A}$ 上 ν と一致するものは一意的であることが分かる。 □

§1.5 Lebesgue 測度

$\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ を、

$$\mathcal{R} = \{\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i] | \text{ 任意の } i \text{ で } a_i \leq b_i\} \cup \{\emptyset\}$$

$h : \mathcal{R} \to [0, +\infty)$ を $h(\prod_{i=1}^{n}[a_i, b_i]) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$, $h(\emptyset) = 0$ と定義する。このとき

定理 1.5.1. $\mathbb{R}^n$ の *Borel* 正則かつ完備な測度で $\mathcal{R}$ 上 h と一致するものがただ一つ存在する。

定義 1.5.2. 定理 1.5.1 であたえられる測度空間を $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_n, m_n)$ と書く。$\mathcal{L}_n$ を n-次元 Lebesgue 集合族、m_n を n-次元 Lebesgue 測度という。

補題 1.5.3. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間、$\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$、$h : \mathcal{A} \to \mathbb{R}^*_+$ とする。$Y \subseteq X$ に対して $\mathrm{cl}(Y)$ は Y の閉包を、$\mathrm{int}(Y)$ は Y の内部を表すものとする。いま、次の (a), (b), (c), (d) が成り立つと仮定する。

(a) 任意の $A \in \mathcal{A}$ と任意の $\epsilon > 0$ に対して、ある $B \in \mathcal{A}'$ が存在して、$A \subseteq \mathrm{int}(B)$ かつ $h(B) \leq h(A) + \epsilon$.

(b) 任意の $A \in \mathcal{A}$ と任意の $\epsilon > 0$ に対して、$h(A) > 0$ ならば、ある $C \in \mathcal{A}'$ で $\mathrm{cl}(C) \subseteq A$ かつ $h(A) \leq h(C) + \epsilon$ をみたすものがある。

(c) 任意の $A \in \mathcal{A}'$ に対して $\mathrm{cl}(A)$ はコンパクト

(d) $A \in \mathcal{A}', A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}'$ で $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ ならば $h(A) \leq \sum_{i=1}^{n} h(A_i)$.

このとき $A, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}, A \subseteq \bigcup_{i\geq 1} A_i$ ならば $h(A) \leq \sum_{i\geq 1} h(A_i)$ が成り立つ。

証明. $A, A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ で $A \subseteq \bigcup_{i\geq 1} A_i$ とする。$h(A) = 0$ なら示すべき式は明らかなので $h(A) > 0$ とする。$\epsilon > 0$ とする。任意の $i \geq 1$ に対して (a) よりある $B_i \in \mathcal{A}'$ で、$A_i \subseteq \mathrm{int}(B_i)$ であり $h(B_i) \leq h(A_i) + \epsilon/2^i$ をみたすものがある。$U_i = \mathrm{int}(B_i)$ とおくと、$A \subseteq \bigcup_{i\geq 1} U_i$. 次に (b) よりある $C \in \mathcal{A}'$ で $\mathrm{cl}(C) \subseteq A$ かつ $h(A) \leq h(C) + \epsilon$ をみたすものがある。(c) より $\mathrm{cl}(C)$ はコンパクトで、$\mathrm{cl}(C) \subseteq \bigcup_{i\geq 1} U_i$ より、ある $i_1, \ldots, i_N$ に対して、

$$C \subseteq \mathrm{cl}(C) \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} U_{i_j} \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} B_{i_j}.$$

$C, B_i \in \mathcal{A}'$ なので (d) を用いれば

$$h(A) - \epsilon \leq h(C) \leq \sum_{j=1}^{N} h(B_{i_j}) \leq \sum_{j=1}^{N} h(A_{i_j}) + \sum_{j=1}^{N} \frac{\epsilon}{2^{i_j}} \leq \sum_{i\geq 1} h(A_i) + \epsilon.$$

これは任意の $\epsilon > 0$ で成り立つので $h(A) \leq \sum_{i\geq 1} h(A_i)$. □

定理 1.5.1 の証明. $X = \mathbb{R}^n, \mathcal{A} = \mathcal{R}, \nu = h$ として定理 1.4.3 を用いる。(CM1) は h の定義より明らか。

(CM2) は $\mathcal{A} = \mathcal{R}$ として補題 1.5.3 を用いる。$\mathcal{A}'$ を $\mathcal{R}$ の中で、a_i, b_i が全て有理数のものの集まりとする。条件 (a), (b), (c) は明らかである。 (d) を示す。いま $A = \prod_{j=1}^{n}[a_j, b_j]$, $i = 1, \ldots, m$ に対して $A_i = \prod_{j=1}^{n}[a_{i,j}, b_{i,j}]$ であり $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} A_i$, $A, A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{A}'$ とする。十分大きな自然数 M をとると、$a_j, b_j, a_{i,j}, b_{i,j}$ は分母が M である分数で表される。いま全ての座標を M 倍して考えれば、$a_j, b_j, a_{i,j}, b_{i,j}$ は全て整数であるとしてよい。このとき、$h(A), h(A_i)$ は各々に含まれる $\prod_{i=1}^{n}[k_i, k_i + 1]$ （$k_1, \ldots, k_n$ は全て整数）の形の集合の個数であるから、

$$h(A) \leq \sum_{j=1}^{m} h(A_j)$$

は明らかである。 以上より補題 1.5.3 を用いれば (CM2) が示される。

次に (CM3) を示す。任意の i で $a_i \le b_i$ とし、$A = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ とおく。$B \in \mathcal{A}$ に対して、$B \cap A = \emptyset$ ならば (CM3) は $A_1 = A$ とすれば成り立つ。従って $A \cap B \neq \emptyset$ とする。$A \cap B = \prod_{i=1}^n [c_i, d_i]$ とし、

$$\mathcal{C} = \Big\{ \prod_{i=1}^n I_i \Big| \text{任意の } i \text{ で } I_i = [a_i, c_i] \text{ または } [c_i, d_i] \text{ または } [d_i, b_i] \Big\}$$

とおく。$\mathcal{C}$ の要素の内、$A \cap B$ 以外のものを $A_1, \ldots, A_{3^n-1}$ とおくと、$A \cap B^c \subseteq \bigcup_{j=1}^{3^n-1} A_j$ であり $h(A) = h(A \cap B) + \sum_{j=1}^{3^n-1} h(A_j)$. 従って (CM3) が成立する。

最後に (CM4) は、$U_m = \prod_{i=1}^n [-m, m]$ とおけば明らか。

以上より定理 1.4.3 を用いれば $\sigma(\mathcal{R})$ を定義域とする測度で、$\mathcal{R}$ 上で h と一致するものがただ一つ存在する。いま $\sigma(\mathcal{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ であるので、この測度空間の Lebesgue 拡大が求める測度空間になる。一意性は Lebesgue 拡大の一意性（系 1.3.5）より明らか。 □

命題 1.5.4. (1) 任意の $\epsilon > 0$ に対して $\mathbb{R}$ の稠密な開集合 O で $m_1(O) < \epsilon$ を満たすものが存在する。
(2) $\mathbb{R}$ の非可算部分集合 K で $K \in \mathcal{L}_1$ かつ $m(K) = 0$ をみたすものがある。
(3) （選択公理のもとで）$\mathcal{L}_n \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$.

証明. (1) $\mathbb{R}$ の有理数の全体を $\{x_i\}_{i \ge 1}$ とし、$O = \bigcup_{i \ge 1} (x_i - 2^{-n-2}\epsilon, x_i + 2^{-n-2}\epsilon)$ とおけば $m_1(O) \le \sum_{i \ge 1} 2^{-n-1}\epsilon = \epsilon/2$.
(2) $f_0(x) = x/3, f_1(x) = (x+2)/3$ とおき $K_0 = [0,1]$, $K_{n+1} = f_0(K_n) \cup f_1(K_n)$ とする。このとき $K_n \supseteq K_{n+1}$. K_n はコンパクトであるから $K = \bigcap_{n \ge 1} K_n$ とおくと $K \neq \emptyset$. また $m_1(K_n) = (2/3)^n$ より $m_1(K) = 0$. ここで $\Sigma = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ とし $\pi : \Sigma \to [0,1]$ を $\pi(i_1 i_2 \ldots) = \sum_{n \ge 1} 2 i_n / 3^n$ とおくと $\pi(\Sigma) = K$ で π は Σ から K への全単射となる。Σ は非可算集合なので K も非可算集合 □

(2) の証明にでてきた K を Cantor 集合または Cantor の 3 進集合 (Cantor's ternary set) という。K は 3 進小数展開で 0 と 2 しか現れないような $[0,1]$ の数の集合である。

演習 1.5.1. (1) $f : [0,1] \to [0,\infty)$ は $[0,1]$ 上連続であるとする。このとき、$G_f = \{(x,y) | x \in [0,1], 0 \le y \le f(x)\}$ は $G_f \in \mathcal{L}_2$ であり、$m_2(G_f) = \int_0^1 f(x)dx$ が成り立つことを示せ。
(2) (1) において「f が $[0,1]$ 上連続」という仮定を「f が $[0,1]$ 上 Riemann 可積分」に代えても同じ結論が成り立つことを示せ。

演習 1.5.2. $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ は $\mathbb{R}$ 上連続かつ単調非減少であるとする。$\mathcal{R} = \{[a,b] | a, b \in \mathbb{R}\}$ とし、$A = [a,b] \in \mathbb{R}$ に対して、$a \le b$ のときは、

$$h(A) = f(b) - f(a)$$

$a > b$ のときは $h(A) = 0$ と定義する。このとき、$\mathbb{R}$ 上の Borel 正則かつ完備な測度 μ で任意の $A \in \mathcal{R}$ に対して $h(A) = \mu(A)$ を満たすものがただ一つ存在することを示せ。

演習 1.5.3. $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mu)$ を測度空間とし、$\mu([0,1]) < +\infty$ とする。いま任意の $x \in [0,1]$ に対して、$\mu(\{x\}) = 0$ とする。このとき次の問いに答えよ。
(1) 任意の $x \in (0,1)$ と任意の $\epsilon > 0$ に対して x を含む開区間 U で $\mu(U) < \epsilon$ をみたすものが存在することを示せ。
(2) 任意の $\epsilon > 0$ に対して $[0,1]$ の稠密な開集合 O で $\mu(O) < \epsilon$ をみたすものが存在することを示せ。

演習 1.5.4. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を σ-有限な測度空間であり任意の $x \in X$ に対して $\{x\} \in \mathcal{M}$ とする。
(1) $U \in \mathcal{M}$ かつ $\mu(U) < +\infty$ とする。いま

$$Y_{U,n} = \{x | x \in U, \mu(\{x\}) \ge 1/n\}$$

とおくとき任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $Y_{U,n}$ は有限集合であることを示せ。
(2) $\{x | x \in X, \mu(\{x\}) > 0\}$ は高々可算集合であることを示せ。

演習 1.5.5. (X, d) を孤立点を持たない可分な距離空間とする。$(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ を測度空間とし、$\mu(X) < +\infty$ とする。このとき任意の $\epsilon > 0$ に対して X の稠密な開集合 O があって、$\mu(O) < \epsilon$ となることを示せ。

§1.6 Bernoulli 測度

$\Sigma = \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{i_1 i_2 \ldots | i_1, i_2, \ldots \in \{0,1\}\}$ とする。ここで $m \ge 0$ に対して

$$W_m = \{0,1\}^m = \{i_1 \ldots i_m | i_1, \ldots, i_m \in \{0,1\}\}.$$

とする。ただし $W_0 = \{\emptyset\}$ とおく。さらに $i_1 \ldots i_n \in W_n$ に対して

$$\Sigma_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \{a_1 a_2 \ldots | a_1 a_2 \ldots \in \Sigma, a_1 = i_1, a_2 = i_2, \ldots, a_n = i_n\}$$

とする。$\Sigma_{\emptyset} = \Sigma$ である。

命題 1.6.1. $a = a_1a_2\dots, b = b_1b_2\dots \in \Sigma$ に対して、

$$d(a,b) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{|a_j - b_j|}{2^j}$$

とおくと、d は Σ 上の距離となる。さらに d から決まる Σ の位相は $\{0,1\}$ の無限直積としての直積位相と一致する。

証明. d が距離であること：$d(a,b) \geq 0, d(a,b) = d(b,a)$ は定義より明らか。$d(a,b) = 0$ ならば任意の $i \in \mathbb{N}$ で $a_i = b_i$ なので $a = b$. さらに $c = c_1c_2\dots \in \Sigma$ とするとき、

$$d(a,b) + d(b,c) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|a_j - b_j| + |b_j - c_j|}{2^j} \geq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|a_j - c_j|}{2^j} = d(a,c).$$

以上より d は Σ 上の距離である。Σ の d に関する開集合の全体を $\mathcal{O}_1$, Σ の $\{0,1\}$ の無限直積としての直積位相での開集合の全体を $\mathcal{O}_2$ とする。任意の $j \in \mathbb{N}$ に対して π_j を直積の j 番目の成分への射影とする。すなわち $\pi_j : \Sigma \to \{0,1\}$ を $\pi_j(i_1i_2\dots) = i_j$ とする。このとき $\mathcal{O}_2$ は任意の $j \in \mathbb{N}$ に対して π_j が連続となる最小の位相である。いま $a = a_1a_2\dots, b = b_1b_2\dots \in \Sigma$ とすると、$d(a,b) < 1/2^j$ ならば、$|a_j - b_j| = 0$ となり $\pi_j(a) = \pi_j(b) = 0$. よって π_j は d に関して連続である。従って、$\mathcal{O}_2 \subseteq \mathcal{O}_1$. 次に $O \in \mathcal{O}_1$ とする。つまり任意の $x = x_1x_2\dots \in O$ に対してある $r > 0$ が有って $B_d(x,r) = \{y | y \in \Sigma, d(x,y) < r\} \subseteq O$ が成り立つ。$1/2^j < r$ となる j を選ぶとき、$y = y_1y_2\dots \in \Sigma_{x_1x_2\dots x_j}$ ならば

$$d(x,y) \leq \sum_{k=j+1} \frac{|x_k - y_k|}{2^k} \leq \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^j}.$$

従って $x \in \Sigma_{x_1x_2\dots x_j} \subseteq B_d(x,r) \subseteq O$. $\Sigma_{x_1x_2\dots x_j} \in \mathcal{O}_2$ より $O \in \mathcal{O}_1$. 従って $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ が示され、$\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$ である。 □

$$\mathcal{A} = \bigcup_{m \geq 0} \{\Sigma_{i_1i_2\dots i_m} | i_1i_2\dots i_m \in W_m\} \cup \{\emptyset\}$$

とおく。このとき、

補題 1.6.2. (1) $A, B \in \mathcal{A}$ で $A \cap B \neq \emptyset$ ならば $A \subseteq B$ または $B \subseteq A$ である。とくに $\mathcal{A}$ は乗法族である。
(2) $A, B \in \mathcal{A}$ で $A \subseteq B$ とする。このとき、$w = w_1\dots w_m$ と $i_1\dots i_n$ があって、$B = \Sigma_w$, $A = \Sigma_{wi_1\dots i_n}$.

証明. $i_1i_2\ldots \in A\cap B$ とするとき、ある $j,k\in\mathbb{N}$ が有って、$A=\Sigma_{i_1\ldots i_j}, B=\Sigma_{i_1\ldots i_k}$. これより (1), (2) 共に明らか。 □

定理 1.6.3. $0<p_0,p_1<1, p_0+p_1=1$ に対して $P:\mathcal{A}\to[0,1]$ を $P(\Sigma_{i_1i_2\ldots i_n})=p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_n},\ P(\Sigma)=1,\ P(\emptyset)=0$ と定義する。このとき (Σ,d) 上の *Borel* 正則かつ完備な測度で $\mathcal{A}$ 上 P と一致するものがただ一つ存在する。

定義 1.6.4. 定理 1.6.3 で与えられる測度を Σ 上の重み (p_0,p_1) の Bernoulli 測度という。

補題 1.6.5. $A,A_1,\ldots,A_n\in\mathcal{A}, A\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ ならば $P(A)\le\sum_{i=1}^n P(A_i)$.

証明. $A\subseteq B$ ならば $P(A)\le P(B)$ である。よって $P(A)\le\sum_{i=1}^n P(A\cap A_i)$ を示せば十分である。従って A_i を $A_i\cap A$ で置き換えることにより $A_i\subseteq A$ としてよい。ここからは帰納法を用いる。

$n=1$ のときは、$A_1=A$ となり明らか。

$n=m$ まで成立したとする。$w=w_1w_2\ldots w_k\in W_k$ に対して $A=\Sigma_w$ とする。このとき $A=\Sigma_{w0}\cup\Sigma_{w1}$ であり $P(A)=P(\Sigma_{w0})+P(\Sigma_{w1})$ が成り立つ。いまある i で $A=A_i$ ならば示すべきことは明らか。よって任意の i で $A\neq A_i$ とする。このとき $A_i\subseteq A$ であるので、$A_i\subseteq\Sigma_{w0}$ かまたは $A_i\subseteq\Sigma_{w1}$. $j=0,1$ に対して $I_j=\{i|A_i\subseteq\Sigma_{wj}\}$ とおくと、I_j は空でなく、要素の個数は m 以下である。ここで、$\Sigma_{wj}\subseteq\bigcup_{i\in I_j}A_i$ であるので、帰納法の仮定より、$P(\Sigma_{wj})\le\sum_{i\in I_j}P(A_i)$ となる。従って

$$P(A)=P(\Sigma_{w0})+P(\Sigma_{w1})\le\sum_{i\in I_0}P(A_i)+\sum_{i\in I_1}P(A_i)=\sum_{i=1}^n P(A_i).$$

□

定理 *1.6.3* の証明. 定理 1.4.3 を $X=\Sigma,\nu=P$ として用いる。(CM1) は定義より明らか。また補題 1.6.5 より $\mathcal{A}$ 上の P は $\mathcal{A}'=\mathcal{A}$ として補題 1.5.3 の (a), (b), (c), (d) の条件をみたす。よって (CM2) がみたされる。次に (CM3) を示す。いま $A=\sum_{i_1\ldots i_m}, B=\sum_{j_1\ldots j_k}$ とする。$A\cap B=\emptyset$ のときは (CM3) は明らか。$A\cap B\neq\emptyset$ のときは、$A\subseteq B$ または $A\supseteq B$. $A\subseteq B$ のとき $A\cap B^c=\emptyset$ より (CM3) は明らか。$A\supseteq B$ のとき、$m\le k$ であり $i_1\ldots i_m=j_1\ldots j_m$ である。$p=k-m$ とおくと

$$A\cap B^c=\bigcup_{w\in W_p:w\neq j_{m+1}\cdots j_k}\Sigma_{i_1\ldots i_m w}$$

さらに $P(A)=\sum_{w\in W_p}P(\Sigma_{i_1\dots i_m w})$ であるので (CM3) が成り立つ。(CM4) は $\Sigma\in\mathcal{A}$ より明らかである。以上より定理 1.4.3 を使えば $\sigma(\mathcal{A})$ を定義域とする測度で $\mathcal{A}$ 上 P と一致するものが一意的に存在する。$\sigma(\mathcal{A})=\mathcal{B}(\Sigma,d)$ であるのでこの測度の Lebesgue 拡大が求める測度である。一意性も系 1.3.5 より明らか。 □

演習 1.6.1. $p_0,p_1>0,p_0+p_1=1$ とする。表の出る確率が p_0, 裏の出る確率が p_1 のコインを無限回投げることにする。このとき次の各の事象は重み (p_0,p_1) の Bernoulli 測度で可測であることを示し、さらにその確率を求めよ。

(1) いつかは表がでる。
(2) 表が無限回でる。
(3) n 回目で表、$n+1$ 回目で裏、$n+2$ 回目で表となる n が無限個ある。

Chapter 2

積分

§2.1　単関数

定義 2.1.1. X を集合、$\mathcal{M}$ を X の σ-加法族とする。$f : X \to \mathbb{R}$ が X 上の $\mathcal{M}$ に関する単関数（simple function）であるとは、 ある $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ とある $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{M}$ に対して $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ と書けることである。ただし $A \subseteq X$ に対して χ_A は A の定義関数、すなわち

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in A \\ 0 & \text{if } x \notin A \end{cases}$$

命題 2.1.2. X を集合、$\mathcal{M}$ を X の σ-加法族、f は X 上の $\mathcal{M}$ に関する単関数とする。このとき $f(X) = \{f(x) | x \in X\}$ は有限集合であり、任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f^{-1}(a) \in \mathcal{M}$ となる。さらに、$f = \sum_{a \in f(X)} a \chi_{f^{-1}(a)}$ である。とくにある $b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$ とある $B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{M}$ があって、$i \neq j$ なら $B_j \cap B_j = \emptyset$ かつ $f = \sum_{i=1}^{m} b_i \chi_{B_i}$ と書ける。

証明. $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{M}$ に対して $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ とし、n に関する帰納法を用いる。$n = 1$ のときは明らか。$n - 1$ まで成立したとする。いま、$g = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \chi_{A_i}$ とおく。帰納法の仮定よりある $b_1 < b_2 < \ldots < b_k$ と $B_1, \ldots, B_k \in \mathcal{M}$ で $i \neq j$ ならば $B_i \cap B_j = \emptyset$ をみたすものがあって、$g = \sum_{i=1}^{k} b_i \chi_{B_i}$ が成り立つ。このとき、

$$f = \sum_{i=1}^{k} \left((b_i + a_n) \chi_{B_i \cap A_n} + b_i \chi_{B_i \setminus A_n} \right) + a_n \chi_{A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{k} B_i}.$$

となり、$f(X) \subseteq \{b_1, \ldots, b_k, b_1+a_n, \ldots, b_k+a_n, a_n\}$ である。これより、n でも成立することが分かる。 $\square$

定義 2.1.3. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とする。$\mathcal{M}$ に関する X 上の非負な単関数 f に対して、その X 上の μ に関する積分（μ-積分）$\int_X f d\mu$ を、

$$\int_X f d\mu = \sum_{a \in f(X)} a\mu(f^{-1}(a))$$

と定義する。ただし $0 \times (+\infty) = 0$ としておく。

注意. (1) ある $a > 0$ に対して $\mu(f^{-1}(a)) = +\infty$ のときは $\int_X f d\mu = +\infty$ とする。
(2) $a = 0$ のとき $0 \times (+\infty) = 0$ と約束したので $a\mu(f^{-1}(a)) = 0$ である。

補題 2.1.4. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間、f を X 上の μ に関する非負な単関数とする。いま $b_1, \ldots, b_m \in [0, +\infty)$, $B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{M}$ は $i \neq j$ ならば $B_i \cap B_j = \emptyset$ であり $f = \sum_{i=1}^m b_i \chi_{B_i}$ とする。このとき

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^m b_i \mu(B_i).$$

証明. 各 $a \in f(X)$ に対して、ある $B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots, B_{i_m}$ があって、$f^{-1}(a) = \bigcup_{j=1}^{m} B_{i_j}$ である。このとき $\mu(f^{-1}(a)) = \sum_{j=1}^m \mu(B_{i_j})$. これより $\int_X f d\mu = \sum_{a \in f(X)} a\mu(f^{-1}(a)) = \sum_{i=1}^m b_i \mu(B_i)$. $\square$

命題 2.1.5. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とする。
(1) f を X 上の $\mathcal{M}$ に関する非負の単関数、$\alpha > 0$ とするとき、

$$\int_X \alpha f d\mu = \alpha \int_X f d\mu$$

(2) f, g を X 上の $\mathcal{M}$ に関する非負の単関数とするとき、

$$\int_X (f+g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

(3) f が $\mathcal{M}$ に関する非負の単関数であり、$a_1, \ldots, a_n \geq 0$, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{M}$ に対して、$f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$ ならば

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^\infty a_i \mu(A_i)$$

証明. (1) は明らか。
(2) $f(X)=\{a_1,\dots,a_n\}, g(X)=\{b_1,\dots,b_m\}$ $i\neq j$ ならば $a_i\neq a_j, b_i\neq b_j$ とする。いま $C_{ij}=f^{-1}(a_i)\cap g^{-1}(b_j)$ とおけば、

$$f+g=\sum_{i,j}(a_i+b_j)\chi_{C_{ij}}$$

いま $(i,j)\neq(k,l)$ ならば $C_{ij}\cap C_{kl}=\emptyset$ であるので補題 2.1.4 より、

$$\begin{aligned}\int_X(f+g)d\mu&=\sum_{i,j}(a_i+b_j)\mu(C_{ij})\\&=\sum_{i=1}^{n}a_i\big(\sum_{j=1}^{m}\mu(C_{ij})\big)+\sum_{j=1}^{m}b_j\big(\sum_{i=1}^{n}\mu(C_{ij})\big)\\&=\sum_{i=1}^{n}a_i\mu(f^{-1}(a_i))+\sum_{j=1}^{m}b_j\mu(g^{-1}(b_j))\\&=\int_X fd\mu+\int_X gd\mu\end{aligned}$$

(3) (1), (2) より

$$\int_X fd\mu=\sum_{i=1}^{n}\int_X a_i\chi_{A_i}d\mu=\sum_{i=1}^{n}a_i\mu(A_i).$$

□

演習 2.1.1. $(X,\mathcal{M},\mu)$ を測度空間とする。X 上の $\mathcal{M}$ に関する単関数 f が μ-有限であるとは、ある $a_1,\dots,a_m\in\mathbb{R}, A_1,\dots,A_m\in\mathcal{M}$ に関して $f=\sum_{i=1}^{m}a_i\chi_{A_i}$ で任意の i に対して $\mu(A_i)<+\infty$ であることとする。
(1) f,g が X 上の $\mathcal{M}$ に関する単関数ならば fg も X 上の $\mathcal{M}$ に関する単関数であることを示せ。
(2) f,g は X 上の $\mathcal{M}$ に関する単関数であり、f は μ-有限とする。このとき fg も μ-有限であることを示せ。

§2.2 積分の定義 I

記号. $\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ とする。$a\in\mathbb{R}$ に対して $(a,+\infty]=(a,+\infty)\cup\{+\infty\}$, $[a,+\infty]=[a,+\infty)\cup\{+\infty\}$, $[-\infty,a)=(-\infty,a)\cup\{-\infty\}$, $[-\infty,a]=(-\infty,a]\cup\{-\infty\}$ とおく。

定義 2.2.1. $+\infty, -\infty$ の掛け算を次のように定義する。

$$(+\infty)\times(-\infty) = -\infty, \quad (+\infty)\times(+\infty) = (-\infty)\times(-\infty) = +\infty.$$

また、$a \in \mathbb{R}$ に対して、

$$a + (\pm\infty) = \pm\infty \quad (\text{複号同順}),$$

$a > 0$ に対して

$$a \times (\pm\infty) = \pm\infty \quad (\text{複号同順}),$$

$a < 0$ に対して

$$a \times (\pm\infty) = \mp\infty \quad (\text{複号同順})$$

さらに

$$0 \times \pm\infty = 0$$

と定義する。

定義 2.2.2. X を集合、$\mathcal{M}$ を X の σ-加法族とする。$f : X \to \mathbb{R}^*$ が $\mathcal{M}$-可測関数であるとは、任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して、$f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$ かつ $f^{-1}(+\infty), f^{-1}(-\infty) \in \mathcal{M}$ となることである。

この定義よりすぐに $\mathcal{M}$ に関する X 上の単関数は $\mathcal{M}$-可測であることがわかる。

注意. $\mathcal{B}(\mathbb{R})^*$ を $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \cup \{-\infty, +\infty\}$ から生成される $\mathbb{R}^*$ の σ-加法族とする。このとき

$$\mathcal{B}(\mathbb{R})^* = \sigma(\mathcal{B}(\mathbb{R}) \cup \{A \cup \{+\infty, -\infty\}, A \cup \{+\infty\}, A \cup \{-\infty\} | A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

と書け、$f : X \to \mathbb{R}^*$ が $\mathcal{M}$-可測であることは、任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^*$ に対して $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$ となることと同値である。

命題 2.2.3. X を集合、$\mathcal{M}$ を X の σ-加法族、$f : X \to \mathbb{R}$ とする。さらに $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ とする。いま、$\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ならば、f が $\mathcal{M}$-可測であるための必要十分条件は、任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$ である。さらに $f : X \to \mathbb{R}^*$ ならば f が $\mathcal{M}$-可測となるための必要十分条件は、任意の $A \in \mathcal{A}$ に対して $f^{-1}(A) \in \mathcal{M}$ かつ $f^{-1}(+\infty), f^{-1}(-\infty) \in \mathcal{M}$ が成り立つことである。

証明. $\Rightarrow$ は $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$ より明らか。$\Leftarrow$ を示す。$\mathcal{N} = \{A | A \subseteq \mathbb{R}, f^{-1}(A) \in \mathcal{M}\}$ とおくと、$\mathcal{N}$ は σ-加法族である。従って $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{N}$ ならば $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{N}$. □

系 2.2.4. X を集合、$\mathcal{M}$ を X の σ-加法族、$f : X \to \mathbb{R}^*$ とする。任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f^{-1}(a, +\infty] \in \mathcal{M}$ ならば f は $\mathcal{M}$-可測である。

証明. $\mathcal{A} = \{(a, +\infty] | a \in \mathbb{R}\}$ とするとき、$[-\infty, b] \in \mathcal{A}^c \in \sigma(\mathcal{A})$. $(a, b] \in \sigma(\mathcal{A})$, $(a, b) = \bigcup_{n \geq 1}(a, b - 1/n] \in \sigma(\mathcal{A})$ より $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. さらに $\{+\infty\} = \bigcap_{n \geq 1}(n, +\infty]$, $\{-\infty\} = \bigcap_{n \geq 1}[-\infty, -n]$. あとは命題 2.2.3 より。 □

命題 2.2.5. X を集合、$\mathcal{M}$ を X の σ-加法族とする。
(1) $f, g : X \to \mathbb{R}^*$ で f, g が $\mathcal{M}$- 可測 かつ $f^{-1}(+\infty) \cap g^{-1}(-\infty) = f^{-1}(-\infty) \cap g^{-1}(+\infty) = \emptyset$ とする。このとき、$f + g$ は X から $\mathbb{R}^*$ への関数として定義可能であり、 $f + g$ も $\mathcal{M}$-可測
(2) $f, g : X \to \mathbb{R}^*$ で f, g が $\mathcal{M}$- 可測ならば fg も $\mathcal{M}$-可測
(3) 任意の $n \geq 1$ に対して $f_n : X \to \mathbb{R}^*$ が $\mathcal{M}$-可測ならば、$\sup_{n \geq 1} f_n$, $\inf_{n \geq 1} f_n$, $\limsup_{n \to \infty} f_n$, $\liminf_{n \to \infty} f_n$ も $\mathcal{M}$-可測

証明. (1) 任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$(f + g)^{-1}(a, +\infty] = \bigcup_{\alpha, \beta \in \mathbb{Q} : a < \alpha + \beta} \bigl(f^{-1}(\alpha, +\infty] \cap g^{-1}(\beta, +\infty]\bigr)$$

f, g が $\mathcal{M}$-可測ならば $(f + g)^{-1}(a, +\infty] \in \mathcal{M}$.
(2) $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ に対して、

$$(x, y) \cdot (z, w) = \{pq | p \in (x, y), q \in (z, w)\}$$

とおく。このときある $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ に対して $(x, y) \cdot (z, w) = (x_0, y_0)$ これより、$a \in \mathbb{R}$ に対して、

$$(fg)^{-1}(a, +\infty) = \bigcup_{x, y, z, w \in \mathbb{Q} : (x, y) \cdot (z, w) \subset (a, +\infty)} \bigl(f^{-1}(x, y) \cap g^{-1}(z, w)\bigr).$$

また

$$\begin{aligned}(fg)^{-1}(+\infty) = &\bigl(f^{-1}(+\infty) \cap g^{-1}(0, +\infty]\bigr) \cup \bigl(f^{-1}(-\infty) \cap g^{-1}[-\infty, 0)\bigr) \\ &\cup \bigl(f^{-1}(0, +\infty] \cap g^{-1}(+\infty)\bigr) \cup \bigl(f^{-1}[-\infty, 0) \cap g^{-1}(-\infty)\bigr)\end{aligned}$$

よって f, g が $\mathcal{M}$-可測ならば $(fg)^{-1}(a, +\infty] \in \mathcal{M}$.
(3) $h(x) = \sup_{n \geq 1} f_n(x)$ とおくとき $h^{-1}(a, +\infty] = \bigcup_{n \geq 1}(f_n)^{-1}(a, +\infty]$ より h は

$\mathcal{M}$-可測。同様に $\inf_{n\geq 1} f_n$ も可測。いま、$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_{m\geq 1}\left(\sup_{n\geq m} a_n\right)$ である。従って $F_m = \sup_{n\geq m} f_n$ とおくと $\limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_{m\geq 1} F_m$. f_n は可測より、F_m も可測、従って $\limsup_{n\to\infty} f_n$ も可測。$\liminf_{n\to\infty} f_n$ についても同様。 □

定義 2.2.6. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間、$f : X \to \mathbb{R}_+^*$ は $\mathcal{M}$-可測とする。このとき、f の μ に関する X 上の積分 $\int_X f d\mu$ を

$$\int_X f d\mu = \sup\Big\{ \int_X g d\mu \Big| \ g \text{ は } X \text{ 上の } \mathcal{M} \text{ に関する単関数} \\ \text{任意の } x \in X \text{ で } 0 \leq g(x) \leq f(x) \Big\}$$

補題 2.2.7. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間、$f, g : X \to \mathbb{R}_+^*$ は $\mathcal{M}$-可測とする。
(1) $\mu(f^{-1}(+\infty)) > 0$ ならば $\int_X f d\mu = +\infty$ である。
(2) 任意の $x \in X$ で $g(x) \leq f(x)$ ならば、

$$\int_X g d\mu \leq \int_X f d\mu$$

証明. (1) $A = f^{-1}(+\infty)$ とする。このとき $g_n = n\chi_A$ とおけば、$g_n \leq f$ であり、$\int_X g_n d\mu = n\mu(A) \to +\infty$ $(n \to \infty)$.
(2) 任意の $x \in X$ で $g(x) \leq f(x)$ ならば

$$\{h | h \text{ は } X \text{ 上の } \mathcal{M} \text{ に関する単関数、任意の } x \in X \text{ で } 0 \leq h(x) \leq g(x)\} \\ \subseteq \{h | h \text{ は } X \text{ 上の } \mathcal{M} \text{ に関する単関数、任意の } x \in X \text{ で } 0 \leq h(x) \leq f(x)\}$$

より明らか。 □

定理 2.2.8 (単調収束定理). $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とする。任意の n に対して $f_n : X \to \mathbb{R}_+^*$ は $\mathcal{M}$-可測であり、任意の $x \in X$ と任意の $n \geq 1$ に対して $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ とする。このとき、任意の $x \in \mathcal{M}$ に対して $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ とするとき f は $\mathcal{M}$-可測であり $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$.

証明. f が $\mathcal{M}$-可測であることは命題 2.2.5-(3) より。補題 2.2.7-(2) より任意の $n \geq 1$ で $\int_X f_n d\mu \leq \int_X f_{n+1} d\mu \leq \int_X f d\mu$. 従って、$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$ は（$+\infty$ も含めて）存在し $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu$.

いま g を X 上の $\mathcal{M}$ に関する非負の単関数で $g \le f$ を満たすものとする。このとき、ある $a_1, \dots, a_m \in (0, +\infty), A_1, \dots, A_m \in \mathcal{M}$ で $i \ne j$ ならば $A_i \cap A_j = \emptyset$ であり、$g = \sum_{i=1}^m a_i \chi_{A_i}$ と書ける。ここで $0 < \epsilon < \min_{i=1,\dots,m} a_i$ をみたす ϵ をとる。任意の i に対して、$g \le f$ より $f(A_i) \subseteq (a_i - \epsilon, +\infty]$. 従って $A_i \subseteq f^{-1}(a_i - \epsilon, +\infty]$. いま、任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して、$(f_n)^{-1}(a, +\infty]$ は n について単調増大であり $\bigcup_{n \ge 1} (f_n)^{-1}(a, +\infty] = f^{-1}(a, +\infty]$ である。これより、$A_{i,n} = A_i \cap (f_n)^{-1}(a_i - \epsilon, +\infty]$ とすれば、$A_{i,n}$ は n に関して単調増大であり $\bigcup_{n \ge 1} A_{i,n} = A_i$. ここで $g_n = \sum_{i=1}^m (a_i - \epsilon)\chi_{A_{i,n}}$ とおけば $g_n \le f_n$. これより

$$\sum_{i=1}^m (a_i - \epsilon)\mu(A_{i,n}) \le \int_X f_n d\mu.$$

$n \to \infty$ とすれば

$$\sum_{i=1}^m (a_i - \epsilon)\mu(A_i) \le \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

ある i で $\mu(A_i) = +\infty$ ならば $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu = +\infty$. 任意の i で $\mu(A_i) < +\infty$ のときは、$\epsilon \downarrow 0$ とすると、$\int_X g d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$. よって $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$. □

命題 2.2.9. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間、$f : X \to \mathbb{R}_+^*$ は $\mathcal{M}$-可測とする。このとき非負の単関数の列 $\{g_n\}$ で任意の $n \ge 1$ と任意の $x \in X$ で $g_n(x) \le g_{n+1}(x)$ かつ $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = f(x)$ をみたすものが存在する。

証明. $A_{i,n} = f^{-1}([\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}))$ とおき、

$$g_n(x) = \sum_{i=1}^{2^{2n}} \frac{i-1}{2^n}\chi_{A_{i,n}} + 2^n \chi_{f^{-1}([2^n, +\infty])}$$

とする。$f(x) \ne +\infty$ ならば、十分大きな n で $f(x) \le 2^n$. このとき $|g_n(x) - f(x)| \le 2^{-n}$. $n \to \infty$ で $g_n(x) \to f(x)$. $f(x) = +\infty$ のとき、$g_n(x) = 2^n \to +\infty = f(x)$ $(n \to \infty)$. □

系 2.2.10. $(X,\mathcal{M},\mu)$ を測度空間、$f:X\to\mathbb{R}_+^*$ は $\mathcal{M}$-可測とする。$\mu(f^{-1}(+\infty))=0$ のとき、

$$\int_X fd\mu=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\mu\Big(f^{-1}\big([\frac{k}{2^n},+\infty)\big)\Big).$$

証明. g_n を命題 2.2.9 の証明で定義した単関数とするとき、$m\geq 2^{2n}$ ならば、

$$g_n\leq\sum_{i=1}^{m}\frac{i-1}{2^n}\chi_{A_{i,n}}+\frac{m}{2^n}\chi_{f^{-1}([\frac{m}{2^n},+\infty])}\leq f$$

である。従って $\mu(f^{-1}(+\infty))=0$ のときには、

$$\int_X g_nd\mu\leq\sum_{i=2}^{m}\frac{i-1}{2^n}\mu(A_{i,n})+\frac{m}{2^n}\mu(f^{-1}([\frac{m}{2^m},+\infty))\leq\int_X fd\mu.$$

ここで、

$$\sum_{i=2}^{m}\frac{i-1}{2^n}\mu(A_{i,n})+\frac{m}{2^n}\mu(f^{-1}([\frac{m}{2^m},+\infty))=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2^n}\mu\Big(f^{-1}\big([\frac{k}{2^n},+\infty)\big)\Big)$$

$m\to\infty$ とすれば、

$$\int_X g_nd\mu\leq\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\mu\Big(f^{-1}\big([\frac{k}{2^n},+\infty)\big)\Big)\leq\int_X fd\mu.$$

ここで、$n\to\infty$ とすれば、証明は終わる。 □

命題 2.2.11. $(X,\mathcal{M},\mu)$ を測度空間とする。
(1) $f:X\to\mathbb{R}_+^*$ は $\mathcal{M}$-可測とする。このとき任意の $\alpha\in(0,+\infty)$ に対して、

$$\int_X(\alpha f)d\mu=\alpha\int_X fd\mu.$$

(2) $f,g:X\to\mathbb{R}_+^*$ は共に $\mathcal{M}$-可測とする。このとき

$$\int_X(f+g)d\mu=\int_X fd\mu+\int_X gd\mu.$$

証明. (1) は明らか。(2) を示す。いま $\{f_n\}_{n\geq 1}, \{g_n\}_{n\geq 1}$ をそれぞれ、X 上の $\mathcal{M}$ に関する非負な単関数の単調非減少列であり、任意の x に対して $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$ を満たすものとする。（この様な列の存在は命題 2.2.9 よりわかる。）このとき $h_n = f_n + g_n$ とすると h_n はやはり非負な単関数の単調非減少列で 任意の x に対して $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = f(x)$. よって定理 2.2.8 および命題 2.1.5-(2) を用いれば、

$$\int_X (f+g)d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X h_n d\mu$$
$$= \lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu + \lim_{n\to\infty}\int_X g_n d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

□

演習 2.2.1. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする。$f : X \to \mathbb{R}$ が連続ならば f は $\mathcal{B}(X, \mathcal{O})$-可測であることを示せ。

演習 2.2.2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とする。f が次の各の条件を満たすとき f は Lebesgue-可測（$\mathcal{L}_1$-可測）であることを示せ。
(1) f が単調非減少のとき。
(2) f が高々可算個の点を除いて連続のとき

演習 2.2.3. X を集合、$\mathcal{M}$ を X の σ-加法族、$n \geq 1$ で $f_n : X \to \mathbb{R}$ は $\mathcal{M}$-可測とする。このとき

$$\{x | x \in X, \text{ある } a \in \mathbb{R} \text{ に対して } n \to \infty \text{ で } f_n(x) \to a\}$$

は $\mathcal{M}$ に属することを示せ。

§2.3 積分の定義 II

定義 2.3.1. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間、$f : X \to \mathbb{R}^*$ を $\mathcal{M}$-可測, $A \in \mathcal{M}$ とする。$f_+ = f\chi_{f^{-1}([0,+\infty])}, f_- = -f\chi_{f^{-1}([-\infty,0))}$ とおく。$\int_X |f|\chi_A d\mu < +\infty$ が成り立つとき、f は A 上 μ-可積分であるといい、f の A 上での μ に関する積分 $\int_A f d\mu$ を

$$\int_A f d\mu = \int_X f_+\chi_A d\mu - \int_X f_-\chi_A d\mu$$

と定義する。f が X 上 μ-可積分のとき単に f は μ-可積分であるという。さらに μ が文脈からわかるときには「μ-」を省略して単に「可積分である」という。

注意.

$$f_+(x) = \max\{f(x), 0\}, f_-(x) = -\min\{f(x), 0\}$$

従って、f が $\mathcal{M}$-可測ならば、命題 2.2.3-(3) より $f_\pm$ も $\mathcal{M}$-可測である。さらに

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x)$$
$$|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$$

なので、f が $\mathcal{M}$-可測ならば $|f|$ も $\mathcal{M}$-可測である。また

$$0 \leq f_\pm(x) \leq |f(x)|$$

より、f が A 上 μ-可積分ならば $\int_X f_\pm \chi_A d\mu < +\infty$. 従って $\int_A f d\mu \in \mathbb{R}$ である。

$(X, \mathcal{M}, \mu)$ が測度空間、$A \in \mathcal{M}$ とする。$f : A \to \mathbb{R}^*$ に対して

$$f_*(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \text{ のとき} \\ 0 & x \in A^c \text{ のとき} \end{cases}$$

と定義し、f_* が $\mathcal{M}$-可測であるとき、f が $\mathcal{M}$-可測であるという。$\mathcal{M}$-可測な f が A 上 μ-可積分であるとは $|f_*|$ が A 上 μ-可積分であることとする。

上の定義より f が A 上可積分ならば明らかに、

$$\Big| \int_A f d\mu \Big| \leq \int_A |f| d\mu.$$

補題 2.3.2. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間、$f : X \to \mathbb{R}^*$ を $\mathcal{M}$-可測, $A \in \mathcal{M}$ で $\mu(A) = 0$ とする。このとき f は A 上可積分であり、$\int_A f d\mu = 0$.

証明. $\int_X |f| \chi_A d\mu = 0$ を示せばよい。いま任意の単関数 g で $0 \leq g \leq |f|\chi_A$ をみたすものに対して $\int_X g d\mu = 0$ である。従って $\int_X |f|\chi_A d\mu = 0$. □

記号. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間、$A \in \mathcal{M}$ とする。$x \in \mathcal{A}$ に対して定義された命題 $P(x)$ が「A 上 μ-a.e. (almost everywhere) で成り立つ」、「μ-a.e. $x \in A$ で成り立つ」あるいは「A 上 μ に関してほとんど至る所成り立つ」とは、ある $B \in \mathcal{M}, \mu(B) = 0$ に対して $\{x | x \in A, P(x)$ が成り立たない $\} \subseteq B$ となることである。$A = X$ のときには A を省略して「μ-a.e. で成立する」という。また μ が文脈からわかっているときには、μ を省略して単に「a.e. で成り立つ」あるいは「ほとんど至る所成り立つ」などという。

命題 2.3.3. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間、$A, B \in \mathcal{M}$、$f, g : X \to \mathbb{R}^*$ は $\mathcal{M}$-可測とする。
(1) $A \cap B = \emptyset$、f が $A \cup B$ 上可積分ならば f は A, B それぞれの上で可積分であり

$$\int_{A \cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu$$

(2) f, g は $A \in \mathcal{M}$ 上可積分とする。いま μ-*a.e.* $x \in A$ で $g(x) \leq f(x)$ ならば

$$\int_A g d\mu \leq \int_A f d\mu.$$

証明. (1) $f = f_+ - f_-$ とする。このとき、$\chi_A + \chi_B = \chi_{A \cup B}$ である。命題 2.2.11-(2) より $\int_X f_\pm \chi_{A \cup B} d\mu = \int_X f_\pm \chi_A d\mu + \int_X f_\pm \chi_B d\mu$. これより明らか。
(2) $B = A \cap \{x | f(x) - g(x) < 0\}$ とおけば $f - g$ は $\mathcal{M}$-可測であるから $B \in \mathcal{M}$ であり $\mu(B) = 0$. いま、$C = A \backslash B$ とすれば、任意の $x \in C$ で $g(x) \leq f(x)$. このとき、

$$\max\{0, f(x)\} \geq \max\{0, g(x)\}, \min\{0, f(x)\} \geq \min\{0, g(x)\}$$

従って、任意の $x \in C$ で $f_+(x) \geq g_+(x)$ かつ $f_-(x) \leq g_-(x)$. よって $\int_C f_+(x) d\mu \geq \int_C g_+(x) d\mu$ かつ $\int_C f_-(x) d\mu \leq \int_C g_-(x) d\mu$. これより $\int_C f d\mu \geq \int_C g d\mu$ いま $\mu(B) = 0$ なので補題 2.3.2 より $\int_B f d\mu = \int_B g d\mu = 0$. 従って、(1) を使えば $\int_A f d\mu \geq \int_A g d\mu$. □

命題 2.3.4. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間、$A \in \mathcal{M}$、$f, g : X \to \mathbb{R}^*$ は $\mathcal{M}$-可測かつ A 上可積分とする。
(1) $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して

$$\int_A (\alpha f) d\mu = \alpha \int_A f d\mu.$$

(2)

$$\int_A (f + g) d\mu = \int_A f d\mu + \int_A g d\mu \tag{2.3.1}$$

証明. (1) は明らか。(2) を示す。簡単のために $A = X$ とする。いま、

$$\begin{aligned}
&A_1 = \{x|f(x) \geq 0, g(x) \geq 0\},\\
&A_2 = \{x|f(x) \geq 0, g(x) < 0, f(x)+g(x) \geq 0\}\\
&A_3 = \{x|f(x) \geq 0, g(x) < 0, f(x)+g(x) < 0\},\\
&A_4 = \{x|f(x) < 0, g(x) \geq 0, f(x)+g(x) \geq 0\}\\
&A_5 = \{x|f(x) < 0, g(x) \geq 0, f(x)+g(x) < 0\},\\
&A_6 = \{x|f(x) < 0, g(x) < 0\}
\end{aligned}$$

とおく。f, g は $\mathcal{M}$-可測より $i = 1, \ldots, 6$ で $A_i \in \mathcal{M}$. ここで、任意の $i = 1, \ldots, 6$ について

$$\int_{A_i} (f+g) d\mu = \int_{A_i} f d\mu + \int_{A_i} g d\mu \tag{2.3.2}$$

を示す。$i = 1$ のとき、$x \in A_1$ では $(f+g)(x) = (f+g)_+(x) = f_+(x) + g_+(x), f(x) = f_+(x), g(x) = g_+(x)$. 従って、命題 2.2.11-(2) より

$$\int_{A_1} (f+g) d\mu = \int_{A_1} (f_+ + g_+) d\mu = \int_{A_1} f d\mu + \int_{A_1} g d\mu$$

次に $x \in A_2$ では $(f+g)(x) = (f+g)_+(x), f(x) = f_+(x), g(x) = -g_-(x)$. よって $(f+g)_+(x) + g_-(x) = f_+(x)$. 命題 2.2.11-(2) より

$$\int_{A_2} (f+g) d\mu + \int_{A_2} g_-(x) d\mu = \int_{A_2} f_+(x) d\mu = \int_{A_2} f d\mu.$$

ここで $\int_{A_2} g_-(x) d\mu = -\int_{A_2} g d\mu$ より、$\int_{A_2} (f+g) d\mu = \int_{A_2} f d\mu + \int_{A_2} g d\mu$.

以下同様に、$i = 3, 4, 5, 6$ でも (2.3.2) を示すことができる。これらを $i = 1, \ldots, 6$ で加えれば、命題 2.3.3-(1) より (2.3.1) が得られる。 □

測度空間 $(X, \mathcal{M}, \mu)$, $A \in \mathcal{M}$ に対して、

$$\mathcal{L}^1(A, \mu) = \{f | f : A \to \mathbb{R}^*, f \text{ は } \mathcal{M}|_A\text{-可測かつ } A \text{ 上 } \mu\text{-可積分}\}$$

とする。このとき命題 2.3.4 は $\int_A f d\mu$ が $\mathcal{L}^1(A, \mu)$ から $\mathbb{R}$ への線型写像であることを示している。

演習 2.3.1. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間、$f : X \to \mathbb{R}^*$ は可測とする。
(1) μ は完備とする。このとき $g : X \to \mathbb{R}^*$ で μ-a.e. $x \in X$ で $f(x) = g(x)$ なら g も可測であることを示せ。
(2) μ が完備でないときは (1) は一般に成立しないことを示せ。

[ヒント：(1) $A = \{x | x \in X, f(x) \neq g(x)\}$ とおくと、μ-a.e. $x \in X$ で $f(x) = g(x)$ かつ μ は完備なので $A \in \mathcal{M}$. $B = X \backslash A$ とおく。このとき $\{x | f(x) > a\} = \big(\{x | f(x) > a\} \cap A\big) \cap \big(\{x | f(x) > a\} \cap B\big)$.]

演習 2.3.2. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間、$A \in \mathcal{M}$, $f, g : X \to \mathbb{R}^*$ は $\mathcal{M}$-可測とする。いま μ-a.e. $x \in A$ で $f(x) = g(x)$ とする。f が A 上可積分ならば g も A 上可積分であり、$\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$ が成り立つことを示せ。

演習 2.3.3. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間、$f : X \to \mathbb{R}^*$ は $\mathcal{M}$-可測、$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}$ であり任意の n に対して $A_n \subseteq A_{n+1}$ とする。このとき $A = \bigcup_{n \geq 1} A_n$ とおく。f が A 上可積分ならば

$$\int_A f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_{A_n} f d\mu$$

が成り立つことを示せ。

演習 2.3.4. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間、$f : X \to \mathbb{R}^*$ は $\mathcal{M}$-可測、$B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{M}$ であり $i \neq j$ ならば $B_i \cap B_j = \emptyset$ とする。$B = \bigcup_{n \geq 1} B_n$ とおく。いま f が B 上可積分ならば

$$\int_B f d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{B_n} f d\mu$$

を示せ。

§2.4 極限と積分

定義 2.4.1. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間、$f : X \to \mathbb{R}^*$ を $\mathcal{M}$-可測とする。$A \in \mathcal{M}$ に対して $\int_X f_+ \chi_A d\mu$ または $\int_X f_- \chi_A d\mu$ の少なくとも一方が有限の値をとるとき、f は A 上で広義可積分であるという。f が A 上で広義可積分であり、$\int_X f_+ \chi_A d\mu = +\infty$ のとき、$\int_A f d\mu = +\infty$, $\int_X f_- \chi_A d\mu = +\infty$ のとき $\int_A f d\mu = -\infty$ と定義する。

補題 2.4.2. $(X,\mathcal{M},\mu)$ を測度空間、$A\in\mathcal{M}$ とする。$g:X\to\mathbb{R}^*$ は $\mathcal{M}$-可測かつ A 上可積分であり、$h:X\to\mathbb{R}^*_+$ は $\mathcal{M}$-可測とする。このとき、$f=h+g$ とおくと、f は $\mathcal{M}$-可測かつ A 上広義可積分であり、

$$\int_A fd\mu=\int_A hd\mu+\int_A gd\mu. \tag{2.4.1}$$

証明. $h\geq 0$ より、

$$f_+-f_-=f=h+g_+-g_-. \tag{2.4.2}$$

よって $f\leq h+g_+$ であるから $f_+\leq h+g_+$. 従って、$g_--f_-=h+g_+-f_+\geq 0$. これより $0\leq\int_X f_-\chi_A d\mu\leq\int_X g_-\chi_A d\mu<+\infty$ が成り立つので、f は A 上広義可積分である。さて (2.4.2) より

$$\int_A f_+d\mu+\int_A g_-d\mu=\int_A hd\mu+\int_A g_+d\mu+\int_A f_-d\mu.$$

$\int_A f_-d\mu,\int_A g_-d\mu$ は有限であるから、(2.4.1) が成り立つ。 □

定理 2.4.3 (Fatou の補題)**.** $(X,\mathcal{M},\mu)$ を測度空間、$A\in\mathcal{M},\ n\geq 1$ で $f_n:X\to\mathbb{R}^*$ は $\mathcal{M}$-可測とする。
(1) $\mathcal{M}$-可測かつ A 上可積分な $g:X\to\mathbb{R}^*$ で 任意の $x\in A$ に対して、$g(x)\leq\inf_{n\geq 1}f_n(x)$ をみたすものがあるとする。このとき $f_n,\ \liminf_{n\to\infty}f_n$ は A 上広義可積分であり、

$$\int_A\liminf_{n\to\infty}f_nd\mu\leq\liminf_{n\to\infty}\int_A f_nd\mu.$$

(2) $\mathcal{M}$-可測かつ A 上可積分な $g:X\to\mathbb{R}^*$ で任意の $x\in A$ に対して、$g(x)\geq\sup_{n\geq 1}f_n(x)$ をみたすものがあるとする。 このとき $f_n,\ \limsup_{n\to\infty}f_n$ は A 上広義可積分であり、

$$\limsup_{n\to\infty}\int_A f_nd\mu\leq\int_A\limsup_{n\to\infty}f_nd\mu.$$

証明. (1) $h_n=f_n-g$ とおくと任意の n で A 上 $h_n\geq 0$. また、$f=\liminf_{n\to\infty}f_n, h=f-g$ とおくと A 上 $h\geq 0$. 補題 2.4.2 より f_n および f は A 上広義可積分。いま $\inf_{n\geq m}h_n(x)$ は m に関して単調非減少であり $m\to\infty$ で $h(x)$ に収束する。定理 2.2.8 より

$$\lim_{m\to\infty}\int_A\big(\inf_{n\geq m}h_n\big)d\mu=\int_A hd\mu.$$

一方、$m \leq k$ ならば $\inf_{n \geq m} h_n \leq h_k$ より $\int_A \big(\inf_{n \geq m} h_n\big) d\mu \leq \inf_{k \geq m} \int_A h_k d\mu$. $m \to \infty$ とすれば

$$\lim_{m \to \infty} \int_A \big(\inf_{n \geq m} h_n\big) d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int_A h_n d\mu$$

これより $\int_A h d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int_A h_n d\mu$ が成り立つ。ここで補題 2.4.2 の (2.4.1) を用いると、題意の不等式が得られる。
(2) (1) を $-f$ について適用すればよい。 □

定理 2.4.4 (Lebesgue の収束定理). $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間, g, f, f_n は X から $\mathbb{R}^*$ への $\mathcal{M}$-可測関数、g は X 上可積分とする。いま、μ-*a.e.* $x \in X$ で

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$$

かつ任意の n に対して μ-*a.e.* $x \in X$ で

$$|f_n(x)| \leq g(x)$$

が成り立つならば、f は X 上可積分であり、

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

注意. 上の定理で「μ が完備」ならば f が $\mathcal{M}$-可測であるという仮定は必要ない。なぜなら、$g(x) = \liminf_{n \to \infty} f_n(x)$ とおけば f_n は $\mathcal{M}$-可測なので g も $\mathcal{M}$-可測である。さらに μ-a.e. $x \in X$ で $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ より μ-a.e. $x \in X$ で $f(x) = g(x)$. 演習 2.3.1-(1) を用いれば f は $\mathcal{M}$-可測である。

証明. μ-a.e. $x \in X$ で $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ であるから、ある $Y_0 \in \mathcal{M}$ で $\mu(X \backslash Y_0) = 0$ かつ

$$Y_0 \subseteq \{x | x \in X, \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)\}$$

さらに任意の $n \geq 1$ で μ-a.e. $x \in X$ で $|f_n(x)| \leq g(x)$ より

$$Y_n = \{x | x \in X, |f_n(x)| \leq g(x)\}$$

とおくと、$Y_n \in \mathcal{M}$ で $\mu(X \backslash Y_n) = 0$ がなりたつ。ここで $Y = \bigcap_{n \geq 0} Y_n$ とするとき、

$$Y \subseteq \{x | x \in X, \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x), \text{任意の } m \text{ に対して、} |f_m(x)| \leq g(x)\}$$

であり $X\backslash Y \subseteq \bigcup_{n\geq 0} X\backslash Y_n$ より $\mu(X\backslash Y)=0$.

さて任意の n および任意の $x\in Y$ に対して $|f_n(x)|\leq g(x)$ より、任意の $x\in Y$ で $-g(x)\leq \inf_{n\geq 1} f_n(x)\leq \sup_{n\geq 1} f_n(x)\leq g(x)$ なので 定理 2.4.3 を用いれば、

$$\int_Y \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\int_Y f_n d\mu \leq \limsup_{n\to\infty}\int_Y f_n d\mu \leq \int_Y \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu.$$

ここで、Y 上 $\liminf_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n = f$ より、

$$\lim_{n\to\infty}\int_Y f_n d\mu = \int_Y f d\mu.$$

$\mu(X\backslash Y)=0$ より $\int_{X\backslash Y} f_n d\mu = \int_{X\backslash Y} f d\mu = 0$ なので、上の式で Y を X に変えたものも成り立つ。 □

演習 2.4.1. 測度空間 $(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\#)$ を考える。
(1) 任意の $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ は可測であることを示せ。
(2) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ が可積分であるための必要十分条件は、$\sum_{i=1}^{+\infty}|f(i)|<+\infty$ であることを示せ。f が可積分ならば $\int_{\mathbb{N}} f d\# = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ を示せ。
(3) $n,m\in\mathbb{N}$ に対して $a_{n,m}\in\mathbb{R}$ とする。いま、任意の n に対してある $a_n\in\mathbb{R}$ があって $m\to\infty$ で $a_{n,m}\to a_n$ とする。さらに $b_n=\sup_{m\in\mathbb{N}}|a_{n,m}|$ とおけば $\sum_{n=1}^{\infty} b_n<+\infty$ である。このとき $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|<+\infty$ であり $m\to\infty$ で

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m}\to\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

が成立することを示せ。

演習 2.4.2. $(X,\mathcal{M},\mu)$ を測度空間、$f_n, f: X\to[0,+\infty)$ は可測かつ X 上可積分とする。いま μ-a.e. $x\in X$ で $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ かつ $\lim_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$ が成り立つとき $\lim_{n\to\infty}\int_X |f-f_n| d\mu = 0$ を示せ。

[ヒント：$\lim_{n\to\infty}\int_X (f_n-f)_{\pm} d\mu = 0$ を示せばよい。$\int_X (f_n-f)d\mu = \int_X (f_n-f)_+ d\mu - \int_X (f_n-f)_- d\mu$ であることに注意。]

演習 2.4.3. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間、$f_n, f : X \to [0, \infty)$ は可測とする。いま $n \to \infty$ で f_n が f に確率収束するとは任意の $\epsilon > 0$ に対して $n \to \infty$ で $\mu(\{x | x \in X, |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) \to 0$ が成立することである。
(1) $\mu(X) < +\infty$ とする。μ-a.e. $x \in X$ で $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ ならば $n \to \infty$ で f_n が f に確率収束することを示せ。
(2) $n \to \infty$ で f_n が f に確率収束するならば $\{f_n\}$ の部分列 g_m で μ-a.e. $x \in X$ で $\lim_{m\to\infty} g_m(x) = f(x)$ となることを示せ。

[ヒント:$A_{n,\epsilon} = \{x | x \in X, |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}$ で $\{x | x \in X, \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\}$ を表現せよ。　(2) では $\mu(A_{n_i, 2^{-i}}) \leq 2^{-i}$ となるような $n_1, n_2, \ldots$ がとれることを示し、Borel-Cantelli を使え。]

演習 2.4.4. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間、$f_n, f : X \to \mathbb{R}^*$ は可測とする。いま $n \to \infty$ で $\int_X |f_n - f| d\mu \to 0$ ならば $n \to \infty$ で f_n は f に確率収束することを示せ。

§2.5 Lebesgue 積分と Riemann 積分

定理 2.5.1. $a, b \in \mathbb{R}$ で $a < b$ とする。$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ は $[a.b]$ 上有界とする。f が $[a, b]$ 上 *Riemann* 可積分ならば f は $[a, b]$ 上（*Lebesgue* 集合族 $\mathcal{L}_1$ に関して）可測かつ m_1-可積分であり、

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a.b]} f dm_1$$

である。

まず Riemann 積分の基本的な定義を思い出しておく。

定義 2.5.2. (1) $\Delta = (x_i)_{i=1}^n$ が $[a, b]$ の分割であるとは、$a = x_1$, $b = x_n$ かつ任意の $i = 1, \ldots, n-1$ で $x_i < x_{i+1}$ が成り立つことである。分割 $\Delta = (x_i)_{i=1}^n$ に対して $|\Delta| = \max\{|x_{i+1} - x_i| : i = 1, \ldots, n-1\}$ とおく。
(2) $\Delta = (x_i)_{i=1}^n$ を $[a, b]$ の分割、$(\xi_i)_{i=1}^{n-1}$ は任意の $i = 1, \ldots n-1$ で $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$ をみたすとする。$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ に対して、f の $(\delta, (\xi_i)_{i=1}^{n-1}$ に関する Riemann 和 $S(f, \Delta, (\xi_i)_{i=1}^{n-1})$ を

$$S(f, \Delta, (\xi_i)_{i=1}^{n-1}) = \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

と定義する。
(3) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ が $[a,b]$ 上 Riemann 可積分であるとは、ある $T \in \mathbb{R}$ と任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ があって分割 Δ に対して $|\Delta| < \delta$ が成り立つならば、$|S(f,\Delta,\{\xi\}_{i=1}^{n-1}) - T| < \epsilon$ が成り立つことである。f が $[a,b]$ 上 Riemann 可積分のとき、T を f の $[a,b]$ 上での Riemann 積分とよび、

$$T = \int_a^b f(x)dx$$

と書く。

定理 2.5.1 の証明には Riemann 可積分であるための次の必要十分条件を用いる。

定理 2.5.3. $a,b \in \mathbb{R}$ で $a < b$、$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ とする。 f が $[a,b]$ 上で *Riemann* 可積分であるための必要十分条件は、 f が $[a,b]$ 上有界であり、$[a.b]$ の分割 $\Delta = (x_i)_{i=0,1,\dots,m}$ に対して、$|\Delta| = \max_{i=1,\dots,m} |x_i - x_{i-1}|$,

$$v(\Delta,f) = \sum_{i=1}^{m} (\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) - \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x))|x_i - x_{i-1}|$$

とおくとき、$|\Delta| \to 0$ ならば $v(\Delta,f) \to 0$ となることである。

定理 *2.5.1* の証明. $f_\pm$ を $f_+(x) = \max\{f(x),0\}$, $f_-(x) = -\min\{f(x),0\}$ とおくとき、$v(\Delta,f_\pm) \le v(\Delta)$. 従って f が Riemann 可積分であるための必要十分条件は $f_+.f_-$ が共に Riemann 可積分であること。これより f のかわりに $f_\pm$ に対して定理を示せばよい。つまり f は非負と仮定してよい。さらに簡単のため $a = 0, b = 1$ としておく。このとき、$n \ge 1$ に対して、

$$f_n = \sum_{i=1}^{2^n} (\inf_{x\in[\frac{i-1}{2^n},\frac{i}{2^n}]} f(x))\chi_{[\frac{i-1}{2^n},\frac{i}{2^n})}$$

とおく。f_n は可測であり、n について単調非減少である。ここで $f_*(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ とおくと f_* は可測である。f は有界であるので定理 2.2.8 より、$n \to \infty$ で

$$\int_{[0,1]} f_n dm_1 = \frac{1}{2^n}\sum_{i=1}^{2^n} (\inf_{x\in[\frac{i-1}{2^n},\frac{i}{2^n}]} f(x)) \to \int_{[0,1]} f_* dm_1$$

また $f_n(x) \le f(x)$ より $f_*(x) \le f(x)$.

次に $\epsilon > 0$ に対して $A_\epsilon = \{x|x \in [0,1], f(x) - f_*(x) \geq \epsilon\}$ とおく。$y \in A_\epsilon \cap [\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}]$ ならば $\sup_{x\in[\frac{i-1}{2^n},\frac{i}{2^n}]} f(x) \geq f(y)$ かつ $f_*(y) \geq \inf_{x\in[\frac{i-1}{2^n},\frac{i}{2^n}]} f(x)$.
従って、

$$\sup_{x\in[\frac{i-1}{2^n},\frac{i}{2^n}]} f(x) - \inf_{x\in[\frac{i-1}{2^n},\frac{i}{2^n}]} f(x) \geq \epsilon$$

よって

$$A_{\epsilon,n} = \bigcup_{i:A_\epsilon\cap[\frac{i-1}{2^n},\frac{i}{2^n}]\neq\emptyset} \left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right]$$

および $B_\epsilon = \bigcap_{n\geq 1} A_{\epsilon,n}$ とおくと、

$$v((i/2^n)_{i=0,\ldots,2^n}, f) \geq \epsilon m_1(A_{\epsilon,n}) \geq \epsilon m_1(B_\epsilon)$$

f は Riemann 可積分なので定理 2.5.3 を用いれば、$n \to \infty$ で上の式の左辺 $\to 0$. 従って $m_1(B_\epsilon) = 0$. $A_\epsilon \subseteq B_\epsilon$ であるので $A_\epsilon \in \mathcal{L}_1$ かつ $m_1(A_\epsilon) = 0$ である。ここで $A = \{x|x \in [0,1], f_*(x) \neq f(x)\}$ とおくとき、$A = \bigcup_{k\geq 1} A_{1/k}$.
よって $A \in \mathcal{L}_1$ であり $m_1(A) = 0$. つまり m_1-a.e. $x \in [0,1]$ で $f(x) = f_*(x)$.
これより f も可測であり、

$$\int_{[0,1]} f dm_1 = \int_{[0,1]} f_* dm_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{2^n} (\inf_{x\in[\frac{i-1}{2^n},\frac{i}{2^n}]} f(x))$$

ここで $z_{i,n} \in [\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}]$ を $f(z_{i,n}) \leq \inf_{x\in[\frac{i-1}{2^n},\frac{i}{2^n}]} f(x) + 1/n$ をみたすように選べば、

$$\frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{2^n} (\inf_{x\in[\frac{i-1}{2^n},\frac{i}{2^n}]} f(x)) \leq \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{2^n} f(z_{i,n}) \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{2^n} (\inf_{x\in[\frac{i-1}{2^n},\frac{i}{2^n}]} f(x)).$$

よって

$$\int_{[0,1]} f dm_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{2^n} f(z_{i,n}) = \int_0^1 f(x) dx.$$

□

例 2.5.4. Lebesgue 可積分であるが Riemann 可積分でない例
$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

とする。f は $[0,1]$ 上 Riemann 可積分ではない。($[0,1]$ の任意の分割 Δ に対して $v(\Delta, f) = 1$.) 一方 $m_1(\mathbb{Q}) = 0$ より m_1-a.e. $x \in [0,1]$ で $f(x) = 1$. 従って、

$$\int_{[0,1]} f dm_1 = 1$$

例 2.5.5. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ とする。広義 Riemann 積分の意味で、f は $[0,+\infty)$ 上で可積分であるが、$[0,+\infty)$ 上で Lebesgue 可積分ではない。
f が $[0,+\infty)$ 上で広義 Riemann 可積分であることは次の命題より。

命題 2.5.6. $g : (0,+\infty) \to [0,+\infty)$ は単調非増加であり $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ とする。さらに $g(x)\sin x$ は $x \downarrow 0$ で有界な極限をもつとする。このとき、$g(x)\sin x$ は $[0,+\infty)$ 上広義 *Riemann* 可積分である。

証明. $n = 1, \ldots$ に対して $a_n = (-1)^{n-1}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} g(x)\sin x dx$ とおくとき、$a_n \geq 0$ であり g は単調非増加であるので、$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq 0$. また $a_n \leq g((n-1)\pi)\pi$ であり $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ より $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. これより、$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$ は交代級数となり収束する。いま、n を x/π の整数部分とするとき、

$$\int_0^x g(t)\sin t dt = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{i-1}a_i + \int_{n\pi}^{x} g(t)\sin t dt$$

ここで $|\int_{n\pi}^x g(x)\sin x dx| \leq \int_{n\pi}^x g(x)dx \leq g(n\pi)\pi$ である。$x \to \infty$ で $n \to \infty$ より

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x g(x)\sin x dx = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$$

□

次に f が $[0,+\infty)$ 上 Lebesgue 可積分でないことを示す。いま、$n \in \mathbb{N}$ に対して

$$f_-(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \in [(2n-1)\pi, 2n\pi] \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

ここで

$$\int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi} f_-(x)dx \geq \frac{1}{2n\pi}\int_{(2n-1)\pi}^{2n\pi} \sin x dx = \frac{1}{n\pi}$$

従って、$\int_0^{2n\pi} f_-(x)dx \geq \sum_{i=1}^n 1/(n\pi)$. 定理 2.5.1 より $\int_0^{2n\pi} f_-(x)dx = \int_{[0,2n\pi]} fdm_1$. 従って $n \to \infty$ とすれば、$\int_{[0,+\infty)} f_-dm_1 = +\infty$. よって f は $[0,+\infty)$ 上 m_1-可積分でない。

これ以降、

$$\int_{[a,b]} fdm_1, \int_{(a,b)} fdm_1, \int_{(a,b]} fdm_1, \int_{[a,b)} fdm_1$$

を $\int_a^b f(x)dx$ と書くこととする。$m_1(\{a\}) = m_1(\{b\}) = 0$ であるから、上の積分の値は（存在すれば）すべて等しいことに注意せよ。

演習 2.5.1. $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ とする。このとき f が $[0,+\infty)$ 上広義 Riemann 積分の意味で可積分ならば $\mathcal{L}_1$-可測かつ m_1-可積分であることを示せ。

演習 2.5.2. 次の積分の $n \to \infty$ の極限を求めよ。

$$(1)\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}dx \quad (2)\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin e^x}{1+nx^2}dx \quad (3)\ \int_0^1 \frac{n\cos x}{1+n^2x^{3/2}}dx$$

演習 2.5.3. $(t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}$ に対して、

$$P(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\Big(-\Big(\frac{x^2}{4t}\Big)\Big)$$

とおく。また $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $\mathbb{R}$ 上連続かつ有界な関数とする。
(1) 任意の $(t,x) \in (0,+\infty)\times\mathbb{R}$ に対して $y \in \mathbb{R}$ の関数として $P(t,x-y)f(y)$ は Lebesgue 可積分であることを示せ。
(2) $t > 0, x \in \mathbb{R}$ に対して

$$F(t,x) = \int_{\mathbb{R}} P(t,x-y)f(y)dy$$

と定義する。このとき F は $(0,+\infty) \times \mathbb{R}$ 上連続であることを示せ。
(3) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $t \downarrow 0$ で $F(t,x) \to f(x)$ を示せ。

[ヒント：(3) $z = (x-y)/(4t)^{1/2}$ と変数変換する。]

§2.6　積測度

定義 2.6.1. $i = 1, \ldots, n$ に対して X_i を集合、$\mathcal{M}_i$ を X_i の σ-加法族とする。このとき、

$$\mathcal{R} = \mathcal{M}_1 \times \ldots \times \mathcal{M}_n$$

とし、$\sigma(\mathcal{R})$ を $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_n$ の直積といい、$\mathcal{M}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{M}_n$ と表す。

定理 2.6.2. $i = 1, 2$ に対して $(X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)$ は測度空間とし、$X = X_1 \times X_2$, $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ とおく。
(1)　$\mathcal{M}$ を定義域とする X 上の測度 μ で任意の $A \in \mathcal{M}_1, B \in \mathcal{M}_2$ に対して $\mu(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B)$ を満たすものが存在する。
(2)　$(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1), (X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ がともに σ-有限ならば (1) の条件をみたす測度 μ はただ一つである。
(3)　$(X_1, \mathcal{M}_1, \mu_1), (X_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ がともに σ-有限ならば測度空間 $(X, \mathcal{N}, \nu)$ で、次の条件 (A), (B) をみたすものがただ一つ存在する。
　(A)　$\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ で $\mathcal{M}$-正則かつ完備,
　(B)　任意の $A \times B \in \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ に対して $\nu(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B)$.
更に $(X, \mathcal{N}, \nu)$ は σ-有限である。

定義 2.6.3. $i = 1, 2$ に対して $(X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)$ は σ-有限な測度空間とする。このとき定理 2.6.2-(2) できまる測度 μ を μ_1 と μ_2 の積測度（product measure）といい $\mu_1 \times \mu_2$ で表す。また (3) で決まる X 上の測度 ν を μ_1 と μ_2 の完備化された積測度と呼ぶ。

　完備化された積測度は $\mu_1 \times \mu_2$ の Lebesgue 拡大に他ならない。

定理 *2.6.2* の証明. $\mathcal{A} = \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$, $A \times B \in \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ に対して、$\nu(A \times B) = \mu_1(A)\mu_2(B)$ として 定理 1.4.3 を用いる。このとき $\mathcal{A}$ は乗法族であり、(CM1) が成り立つことは明らかである。
(CM2) の証明：$A, A_i \in \mathcal{M}_1, B, B_i \in \mathcal{M}_2$ であり、$A \times B \subseteq \bigcup\limits_{i \geq 1} (A_i \times B_i)$ とする。ここで $(x, y) \in X_1 \times X_2$ に対して

$$\chi_{A \times B}(x, y) = \chi_A(x)\chi_B(y) \leq \sum_{i \geq 1} \chi_{A_i \times B_i}(x, y) = \sum_{i \geq 1} \chi_{A_i}(x)\chi_{B_i}(y)$$

である。いま $x \in X_1$ を固定して $y \in X_2$ について上の式を μ_2 に関して積

分すれば、単調収束定理より

$$\begin{aligned}\mu_2(B)\chi_A(x) &\le \int_{X_2} \sum_{i\ge1} \chi_{A_i}(x)\chi_{B_i}(y)d\mu_2(y)\\ &= \lim_{m\to\infty}\int_{X_2}\sum_{i=1}^{m}\chi_{A_i}(x)\chi_{B_i}(y)d\mu_2(y) = \sum_{i\ge1}\mu_2(B_i)\chi_{A_i}(x).\end{aligned}$$

さらにこの式を $x \in X_1$ について μ_1 に関して積分し、再び単調収束定理を用いれば、

$$\nu(A\times B) = \mu_1(A)\mu_2(B) \le \sum_{i\ge1}\mu_1(A_i)\mu_2(B_i) = \sum_{i\ge1}\nu(A_i\times B_i).$$

(CM3) の証明：$A = A_1 \times A_2, B \in B_1 \times B_2 \in \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ のとき、

$$A \cap B^c = \big((A_1\backslash B_1)\times A_2\big) \cup \big((A_1\cap B_1)\times(A_2\backslash B_2)\big).$$

さらに

$$\begin{aligned}&\nu(A\cap B) + \nu((A_1\cap B_1)\times(A_2\backslash B_2)) + \nu((A_1\backslash B_1)\times A_2)\\ =&\mu_1(A_1\cap B_1)\mu_2(A_2\cap B_2) + \mu_1(A_1\cap B_1)\mu_2(A_2\backslash B_2) + \mu_1(A_1\backslash B_1)\mu_2(A_2)\\ =&\mu_1(A_1\cap B_1)\mu_2(A_2) + \mu_1(A_1\backslash B_1)\mu_2(A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) = \nu(A)\end{aligned}$$

よって (CM3) が成り立つ。
以上より定理 1.4.3 の前半の結論が得られる。つまり $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ を定義域とする測度で $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ 上 ν と一致するものが存在する。よって (1) は成り立つ。

次に $i = 1, 2$ に対して $(X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)$ は σ-有限であると仮定する。このとき $X_{i,j} \in \mathcal{M}_i$ で $X_{i,1} \subseteq X_{i,2} \subseteq \ldots$, $\mu_i(X_{i,j}) < +\infty$, $X_i = \bigcup_{j\ge1} X_{i,j}$ となるものがとれる。$n \ge 1$ に対して $U_n = X_{1,n} \times X_{2,n}$ とすれば定理 1.4.3 の条件 (CM4) をみたす。定理 1.4.3 の後半の結論より (1) の性質をもつ測度は一意的である。(3) については (1) で構成した測度の Lebesgue 拡大を考えればよい。一意性は、(2) と系 1.3.5 から明らか。 □

命題 2.6.4. $(X_1, \mathcal{O}_1), (X_2, \mathcal{O}_2)$ を第 2 可算公理をみたす位相空間とし、$\mathcal{O}$ を $X_1 \times X_2$ の $\mathcal{O}_1$ と $\mathcal{O}_2$ の直積位相とする。このとき、

$$\mathcal{B}(X_1, \mathcal{O}_1) \otimes \mathcal{B}(X_2, \mathcal{O}_2) = \mathcal{B}(X_1 \times X_2, \mathcal{O})$$

証明. $i=1,2$ について $\mathcal{B}_i=\mathcal{B}(X_i,O_i)$, $X=X_1\times X_2$, $\mathcal{B}=\mathcal{B}(X_1\times X_2,\mathcal{O})$ とおく。
(a) $\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_2\subseteq\mathcal{B}$ であること：

$$\mathcal{U}=\{A|A\subseteq X_1, A\times X_2\in\mathcal{B}\}$$

とおくと $\mathcal{U}$ は X_1 の σ-加法族であり、さらに $\mathcal{O}_1\subseteq\mathcal{U}$. よって $\mathcal{B}_1\subseteq\mathcal{U}$. すなわち任意の $A\in\mathcal{B}_1$ に対して $A\times X_2\in\mathcal{B}$. 同様にして任意の $B\in\mathcal{B}_2$ に対して $X_1\times B\in\mathcal{B}$. ここで $A\in\mathcal{B}_1, B\in\mathcal{B}_2$ に対して $A\times B=(A\times X_2)\cap(X_1\times B)\in\mathcal{B}$. つまり $\mathcal{B}_1\times\mathcal{B}_2\subseteq\mathcal{B}$ であるので、$\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_2\subseteq\mathcal{B}$.
(b) $\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_2\supseteq\mathcal{B}$ であること：$\{O_i\}_{i\geq 1}, \{U_i\}_{i\geq 1}$ をそれぞれ $\mathcal{O}_1,\mathcal{O}_2$ の開基とする。$U\in\mathcal{O}$ とするとき、任意の $x\in U$ に対してある $i(x), j(x)\in\mathbb{N}$ があって $x\subseteq O_{i(x)}\times U_{j(x)}\subseteq U$ が成り立つ。$I=\{(i(x),j(x))|x\in U\}$ とおくと、$I\subseteq\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ より I は高々可算集合。従って $U=\underset{(i,j)\in I}{\cup}O_i\times U_i\in\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_2$. つまり $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_2$ となり、$\mathcal{B}=\mathcal{B}(X,\mathcal{O})\subseteq\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_2$ が成り立つ。 □

命題 2.6.5. $i=1,2$ に対して $(X_i,\mathcal{N}_i,\nu_i)$ を σ-有限な測度空間 $(X_i,\mathcal{M}_i,\mu_i)$ の *Lebesgue* 拡大とする。$X=X_1\times X_2$, $\mathcal{N}=\mathcal{N}_1\otimes\mathcal{N}_2$, $\nu=\nu_1\times\nu_2$, $\mathcal{M}=\mathcal{M}_1\otimes\mathcal{M}_2$, $\mu=\mu_1\times\mu_2$ とおき、さらに $(X,\widetilde{\mathcal{M}},\tilde{\mu})$ を $(X,\mathcal{M},\mu)$ の *Lebesgue* 拡大とするとき、 $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{N}\subseteq\widetilde{\mathcal{M}}$ かつ $\nu=\tilde{\mu}|_{\mathcal{N}}$ である。とくに、$(X,\mathcal{N},\nu)$ の *Lebesgue* 拡大は $(X,\widetilde{\mathcal{M}},\tilde{\mu})$ である。

証明. Step 1 $\nu|_{\mathcal{M}}=\mu$ であること：$A\in\mathcal{M}_1, B\in\mathcal{M}_2$ に対して $\nu(A\times B)=\nu_1(A)\nu_2(B)=\mu_1(A)\mu_2(B)$ である。従って $\nu|_{\mathcal{M}}$ は $\mathcal{M}$ 上の $A\times B\in\mathcal{M}_1\times\mathcal{M}_2$ に対して $\nu(A\times B)=\mu_1(A)\mu_2(B)$ をみたす測度である。いま $(X_i,\mathcal{M}_i,\mu_i)$ は σ-有限であるから定理 2.6.2-(2) により $\nu|_{\mathcal{M}}=\mu$.
Step 2 $\mathcal{N}\subseteq\widetilde{\mathcal{M}}$ かつ $\tilde{\mu}|_{\mathcal{N}}=\nu$ であること：$A_1\times A_2\in\mathcal{N}_1\times\mathcal{N}_2$ とする。$i=1,2$ で $(X_i,\mathcal{N}_i,\nu_i)$ は $(X_i,\mathcal{M}_i,\mu_i)$ の Lebesgue 拡大であるから、ある $B_i,C_i\in\mathcal{M}_i$ があって $C_i\subseteq A_i\subseteq B_i, A_i$ かつ $\mu_i(B_i\backslash C_i)=0$ となる。従って $C_1\times C_2\subseteq A_1\times A_2\subseteq B_1\times B_2$ かつ $\mu((B_1\times B_2)\backslash(C_1\times C_2))=0$. よって $A_1\times A_2\in\widetilde{\mathcal{M}}$. これより、$\mathcal{N}_1\times\mathcal{N}_2\subseteq\widetilde{\mathcal{M}}$. さらに

$$\nu(A_1\times A_2)=\nu_1(A_1)\nu_2(A_2)=\mu(B_1)\mu(B_2)=\mu(B_1\times B_2)=\tilde{\mu}(A_1\times A_2)$$

よって $\mathcal{N}=\sigma(\mathcal{N}_1\times\mathcal{N}_2)\subseteq\widetilde{\mathcal{M}}$ で $\mathcal{N}_1\times\mathcal{N}_2$ 上で $\tilde{\mu}$ と ν は一致する。$\mathcal{N}_1\times\mathcal{N}_2$ は乗法族であるから、定理 1.3.10 を $\mathcal{A}=\mathcal{N}_1\times\mathcal{N}_2$ として $(X,\mathcal{N},\nu),(X,\widetilde{\mathcal{M}},\tilde{\mu})$ に対して使うと、$\tilde{\mu}|_{\mathcal{N}}=\nu$ が得られる。
Step 3 $(X,\mathcal{N},\mu)$ の Lesbegue 拡大が $(X,\widetilde{\mathcal{M}},\tilde{\mu})$ であること：

$(X,\widetilde{\mathcal{N}},\widetilde{\nu})$ を $(X,\mathcal{N},\nu)$ の Lebesgue 拡大とする。このとき、$A\in\widetilde{\mathcal{N}}$ に対してある $B,C\in\mathcal{N}$ で $C\subseteq A\subseteq B$ かつ $\nu(B\backslash C)=0$. いま $\tilde{\mu}|_{\mathcal{N}}=\nu$ よりある $B_1,B_2,C_1,C_2\subseteq\mathcal{M}$ で $B_1\subseteq B\subseteq B_2$, $C_1\subseteq C\subseteq C_2$, $\mu(B_2\backslash B_1)=0$, $\mu(C_2\backslash C_1)=0$ が成り立つ。このとき $C_1\subseteq A\subseteq B_2$ であり、$B_2\backslash B\subseteq B_2\backslash B_1$ より $\nu(B_2\backslash B)=0$、$C\backslash C_1\subseteq C_2\backslash C_1$ より $\nu(C\backslash C_1)=0$. 従って $\mu(B_2\backslash C_1)=\nu(B_2\backslash C_1)=\nu(B_2\backslash B)+\nu(B\backslash C)+\nu(C\backslash C_1)=0$. 従って $A\in\widetilde{\mathcal{M}}$ であり $\widetilde{\nu}(A)=\tilde{\mu}(A)$. □

例 2.6.6. (1) 命題 2.6.4 を $\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n=\mathbb{R}^{k+n}$ に用いれば、

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^{k+n})=\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

(2) k-次元 Lebesgue 測度 m_k と n-次元 Lebesgue 測度 m_n の完備化された積測度は $k+n$ 次元の Lebesgue 測度である。

証明. $n\in\mathbb{N}$ に対して $(X,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n),\mu_n)$ を §1.5 で構成した $\mathcal{R}$ 上で h と一致するただ一つの測度空間とする。$k,n\in\mathbb{N}$ として $(X_1,\mathcal{M}_1,\mu_1)=(\mathbb{R}^k,\mathcal{B}(\mathbb{R}^k),\mu_k)$, $(X_2,\mathcal{M}_2,\mu_2)=(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n),\mu_n)$ として命題 2.6.5 を適用する。いま、

$$\begin{aligned}(X,\mathcal{M},\mu)&=(\mathbb{R}^{k+n},\mathcal{B}(\mathbb{R}^{k+n}),\mu_{k+n}),\\(X,\widetilde{\mathcal{M}},\tilde{\mu})&=(\mathbb{R}^{k+n},\mathcal{L}_{k+n},m_{k+n}),\\(X,\mathcal{N},\nu)&=(\mathbb{R}^{k+n},\mathcal{L}_k\otimes\mathcal{L}_m,m_k\times m_n)\end{aligned}$$

であるから、$(\mathbb{R}^{k+n},\mathcal{L}_k\otimes\mathcal{L}_m,m_k\times m_n)$ の Lebesgue 拡大は $(\mathbb{R}^{k+n},\mathcal{L}_{k+n},m_{k+n})$ で有ることがわかる。□

定理 2.6.7. $i=1,2$ に対して $(X_i,\mathcal{M}_i,\mu_i)$ は σ-有限な測度空間とし、$X=X_1\times X_2$, $\mathcal{M}=\mathcal{M}_1\otimes\mathcal{M}_2$, $\mu=\mu_1\times\mu_2$, ν を μ の完備化、$\mathcal{N}$ をその定義域とする。さらに $U\subseteq X$, $x\in X_1$, $y\in X_2$ に対して、$U_{2,x}=\{z|z\in X_2,(x,z)\in U\}$, $U_{1,y}=\{z|z\in X_1,(z,y)\in U\}$ と定義する。
(1) $E\in\mathcal{M}$ とする。このとき任意の $x\in X_1$ に対して $E_{2,x}\in\mathcal{M}_2$ であり、$\mu_2(E_{2,x})$ は $x\in X_1$ の関数として $\mathcal{M}_1$-可測である。また任意の $y\in X_2$ に対して $E_{1,y}\in\mathcal{M}_1$ であり、$\mu_1(E_{1,y})$ は $y\in X_2$ の関数として $\mathcal{M}_2$-可測である。さらに

$$\mu(E)=\int_{X_1}\mu_2(E_{2,x})d\mu_1(x)=\int_{X_2}\mu_1(E_{1,y})d\mu_2(y).\tag{2.6.1}$$

(2) $i=1,2$ に対して $(X_i,\mathcal{M}_i,\mu_i)$ は完備とする。任意の $E\in\mathcal{N}$ に対して μ_1-*a.e.* $x\in X_1$ に対して $E_{2,x}\in\mathcal{M}_2$ であり、$\mu_2(E_{2,x})$ は $x\in X_1$ の関数として $\mathcal{M}_1$-可測である。また μ_2-*a.e.* $y\in X_2$ に対して $E_{1,y}\in\mathcal{M}_1$ であり $\mu_1(E_{2,y})$ は $y\in X_2$ の関数として $\mathcal{M}_2$ 可測である。さらに (2.6.1) で μ を ν に変えたものが成立する。

注意. 上の定理の (2) においては、$\mu_2(E_{2,x})$ は μ_1-a.e. $x \in X_1$ でしか定義されないが、定義されない $x \in X$ に対しては適当な値（例えば 0）と定めることで X_1 上の関数と考える。$\mu_1(E_{1,y})$ についても同様。

(2.6.1) は

$$\int_X \chi_E d\mu = \int_{X_1} \Big(\int_{X_2} \chi_E(x,y) d\mu_2(y) \Big) d\mu_1(x)$$
$$= \int_{X_2} \Big(\int_{X_1} \chi_E(x,y) d\mu_1(x) \Big) d\mu_2(y)$$

と書くこともできる。

証明. (1) $\mathcal{R} = \{A \times B | A \in \mathcal{M}_1, B \in \mathcal{M}_2\}$ とする。$(X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)$ は σ-有限であるから、定理 2.6.2-(2) の証明と同様に $i = 1, 2$ に対して $\mathcal{M}_i$ の単調非減少列 $\{X_{i,j}\}_{j \geq 1}$ がとれて $\mu_i(X_{i,j}) < +\infty$ かつ $\underset{j \geq 1}{\cup} X_{i,j} = X_i$. $Z_j = X_{1,j} \times X_{2,j}$ とするとき $\{Z_j\}_{j \geq 1}$ は $\mathcal{R}$ の単調非減少列であって $\mu(Z_j) < +\infty$, $X = \underset{j \geq 1}{\cup} Z_j$. ここで $\mathcal{R}_j = \{Z \cap Z_j | Z \in \mathcal{R}\}$, $\mathcal{R}_j$ から生成される Z_j の σ-加法族を $\mathcal{M}_j$ とすると、補題 1.3.9 より $\mathcal{M}_j = \{A \cap Z_j | A \in \mathcal{M}\}$ である。さて

$$\mathcal{U}_j = \{E | E \subset Z_j,\ E \text{ は (1) の性質を持つ}\}$$

とおく。$\mathcal{R}_j \subseteq \mathcal{U}_j$ は明らかである。$\mathcal{U}_j$ が Z_j の Dynkin 族であることを示す。$A, B \in \mathcal{U}_j$ で $B \subseteq A$ のとき、$C = A \backslash B$ とおくと、$y \in X_2$ に対して $C_{1,y} = A_{1,y} \backslash B_{1,y}$. 従って、$C_{1,y} \in \mathcal{M}_1$ であり $\mu_1(C_{1,y}) = \mu_1(A_{1,y}) - \mu_1(B_{1,y})$. これより $\mu_1(C_{1,y})$ は y に関して $\mathcal{M}_2$-可測であり、

$$\int_{X_2} \mu_1(C_{1,y}) d\mu_2(y) = \int_{X_2} \mu_1(A_{1,y}) d\mu_2(y) - \int_{X_2} \mu_1(B_{1,y}) d\mu_2(y)$$
$$= \mu(A) - \mu(B) = \mu(C)$$

$C_{2,x}$ についても同様であるので $C \in \mathcal{U}_j$. 次に $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{U}_j$ で $i \neq j$ なら $A_i \cap A_j = \emptyset$ とする。$A = \underset{i \geq 1}{\cup} A_i$ とおくとき、$A_{1,y} = \underset{i \geq 1}{\cup} (A_i)_{1,y} \in \mathcal{M}_1$. さらに $\mu_1(A_{1,y}) = \sum_{i \geq 1} \mu_1((A_i)_{1,y})$ より $\mu_1(A_{1,y})$ は $\mathcal{M}_2$-可測であり、単調収束定理を用いれば

$$\int_{X_2} \mu_1(A_{1,y}) d\mu_2(y) = \sum_{i \geq 1} \int_{X_2} \mu_1((A_i)_{1,y}) d\mu_2(y)$$
$$= \sum_{i \geq 1} \mu(A_i) = \mu(A).$$

$A_{2,x}$ についても同様なので $A \in \mathcal{U}_j$. 以上より $\mathcal{U}_j$ は Z_j の Dynkin 族である。一方 $\mathcal{R}_j$ は乗法族であるから、Dynkin 族定理（定理 1.3.8）より $\delta_{Z_j}(\mathcal{R}_j) = \sigma_{Z_j}(\mathcal{R}_j) = \mathcal{M}_j$.（$\delta_{Z_j}(\mathcal{R}_j)$ は $\mathcal{R}_j$ から生成される Z_j の Dynkin 族とする。）いま $\delta_{Z_j}(\mathcal{R}_j) \subseteq \mathcal{U}_j$ であるので、任意の $A \in \mathcal{M}_j$ に対して (1) が成立することがわかった。$E \in \mathcal{M}$ とするとき $E_j = E \cap Z_j$ とおけば、$E_j \in \mathcal{M}_j$. いま、$\{(E_j)_{1,y}\}_{j\geq 1}$ は単調増大列で $E_{1,y} = \bigcup_{j\geq 1}(E_j)_{1,y} \in \mathcal{M}_1$ である。よって $\mu_1(E_{1,y}) = \lim_{j\to\infty} \mu_1((E_j)_{1,y})$. 単調収束定理により

$$\int_X \mu_1(E_{1,y})d\mu_2(y) = \lim_{j\to\infty}\int_X \mu_1((E_j)_{1,y})d\mu_2(y) = \lim_{j\to\infty}\mu(E_j) = \mu(E).$$

(2)　$E \in \mathcal{N}$ とするとき、Lebesgue 拡大の定義より、$A, B \in \mathcal{M}$ で $A \subseteq E \subseteq B$ かつ $\mu(B\backslash A) = 0$ を満たすものが有り、$\nu(E) = \mu(A) = \mu(B)$ である。ここで $C = E\backslash A$ とおく。$B\backslash A \in \mathcal{M}$ より

$$\mu(B\backslash A) = \int_{X_1} \mu_2((B\backslash A)_{2,x})d\mu_1(x)$$

$\mu(BA\backslash) = 0$ なので μ_1-a.e. $x \in X_1$ で $\mu_2((B\backslash A)_{2,x}) = 0$. μ_2 は完備であり $C_{2,x} \subseteq (B\backslash A)_{2,x}$ なので、μ_1-a.e. $x \in X_1$ で $C_{2,x} \in \mathcal{M}_2$ であり $\mu_2(C_{2,x}) = 0$ となる。μ_1 は完備であるので $\mu_2(C_{2,x})$ は $\mathcal{M}_1$-可測である。($V = \{x|x \in X_1, C_{2,x} \in \mathcal{M}_2, \mu_2(C_{2,x}) > 0\}$ とすると μ_1 は完備であるから $V \in \mathcal{M}_1$ で $\mu_1(V) = 0$. 従って上で注意したように V 上では $\mu_2(C_{2,x})$ として適当な値を与えておけばよい。）いま $\mu_2(E_{2,x}) = \mu_2(A_{2,x}) + \mu_2(C_{2,x})$ であるから $\mu_2(E_{2,x})$ も $\mathcal{M}_1$-可測で有り、

$$\int_{X_1} \mu_2(E_{2,x})\mu_1(dx) = \int_{X_1} (\mu_2(A_{2,x}) + \mu_2(C_{2,x}))d\mu_1(x) = \mu(A) = \nu(E)$$

が成り立つ。$\mu_1(E_{1,y})$ についても同様の議論をすればよい。 □

演習 2.6.1. $i = 1, 2, 3$ について $(X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)$ は測度空間とする。
(1)　$\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 \otimes \mathcal{M}_3 = (\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2) \otimes \mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_1 \otimes (\mathcal{M}_2 \otimes \mathcal{M}_3)$ を示せ。
(2)　$i = 1, 2, 3$ について $(X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)$ は σ-有限とする。このとき、$(\mu_1 \times \mu_2) \times \mu_3 = \mu_1 \times (\mu_2 \times \mu_3)$ を示せ。

演習 2.6.2. $i = 1, 2$ に対して $(X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)$ は σ-有限な測度空間、$f_i : X_i \to \mathbb{R}^*$ は $\mathcal{M}_i$-可測とする。ここで $(x, y) \in X_1 \times X_2$ に対して $g(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ と定義する。さらに $X = X_1 \times X_2, \mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2, \mu = \mu_1 \times \mu_2$ とおく。

(1) g は $\mathcal{M}$-可測であることを示せ。
(2) $i = 1, 2$ で f_i が μ_i-可積分ならば g は μ-可積分であり、

$$\int_X g d\mu = \int_{X_1} f_1 d\mu_1 \int_{X_2} f_2 d\mu_2$$

が成り立つことを示せ。

[ヒント：(1) $F(x,y) = f_1(x), G(x,y) = f_2(y)$ とおけば F, G は $\mathcal{M}$-可測]

演習 2.6.3. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を σ-有限な測度空間、$f : X \to \mathbb{R}_+^*$ は $\mathcal{M}$-可測とする。このとき、$S = \{(x,y) | x \in X, 0 < y < f(x)\}$ とおけば $S \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{L}_1$ であり $\int_X f d\mu = (\mu \times m_1)(S)$ が成り立つことを示せ。

[ヒント：f は単関数の単調非減少列の極限]

§2.7　逐次積分

一般に、$i = 1, 2$ に関して、$(X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)$ が測度空間であり、$f : X_1 \times X_2 \to \mathbb{R}$ に対して、逐次積分

$$\int_{X_1} \Big(\int_{X_2} f(x,y) d\mu_2(y) \Big) d\mu_1(x) \quad \text{及び} \quad \int_{X_2} \Big(\int_{X_1} f(x,y) d\mu_1(x) \Big) d\mu_2(y)$$

が（意味を持ち）その値が有界であっても、両者が一致するとは限らない。

例 2.7.1. $(t, x) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}$ に対して、

$$P(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\Big(- \Big(\frac{x^2}{4t} \Big) \Big)$$

とおく。このとき、

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \big(- \frac{1}{2t} + \frac{x^2}{4t^2} \big) P(t,x)$$
$$\frac{\partial P}{\partial x} = - \frac{x}{2t} P(t,x).$$

これより $(t, x) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}$ で

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

である。さらに任意の $t>0$ に対して $P(t,x)$ は x に関して $\mathbb{R}$ 上 (Lebesgue) 可積分であり $\int_{-\infty}^{+\infty} P(t,x)dx = 1$. ここで、$T>0$ を固定する。このとき $\frac{\partial P}{\partial t}$ は任意の $x\in\mathbb{R}$ に対して t に関して $[T,+\infty)$ 上可積分であり、

$$\int_T^{+\infty} \frac{\partial P}{\partial t}dt = \lim_{s\to\infty}\int_T^s \frac{\partial P}{\partial t}dt = \lim_{s\to\infty}(P(s,x)-P(T,x)) = -P(T,x).$$

よって

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(\int_T^{+\infty}\frac{\partial P}{\partial t}dt\Big)dx = -1.$$

一方、任意の $t>0$ に対して $\frac{\partial P}{\partial t}$ は x に関して $\mathbb{R}$ 上可積分であり、

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial P}{\partial t}dx = \lim_{y\to\infty}\int_{-y}^{y}\frac{\partial P}{\partial t}dx &= \lim_{y\to\infty}\int_{-y}^{y}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}dx \\ &= \lim_{y\to\infty}\Big(\frac{\partial P}{\partial x}(t,y)-\frac{\partial P}{\partial x}(t,-y)\Big) = 0.\end{aligned}$$

よって

$$\int_T^{+\infty}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial P}{\partial t}dx\Big)dt = 0.$$

定理 2.7.2 (Fubini の定理)**.** $i=1,2$ に対して $(X_i,\mathcal{M}_i,\mu_i)$ を σ-有限な測度空間とする。$X = X_1\times X_2, \mathcal{M} = \mathcal{M}_1\otimes\mathcal{M}_2, \mu = \mu_1\times\mu_2$ とし、さらに μ の完備化を ν、その定義域を $\mathcal{N}$ とする。また $f : X\to\mathbb{R}^*$ のとき $x\in X_1, y\in X_2, z=(x,y)\in X$ に対して $f(z)=f(x,y)$ と書く。

(1-a) $f : X\to\mathbb{R}^*_+$ は $\mathcal{M}$-可測とする。このとき任意の $x\in X_1$ に対して $f(x,y)$ は $y\in X_2$ の関数として $\mathcal{M}_2$-可測であり $\int_{X_2} f(x,y)d\mu_2(y)$ は $x\in X_1$ の関数として $\mathcal{M}_1$-可測である。また $y\in X_2$ に対して $f(x,y)$ は $x\in X_1$ の関数として $\mathcal{M}_1$-可測であり $\int_{X_1} f(x,y)d\mu_1(x)$ は $y\in X_2$ の関数として $\mathcal{M}_2$-可測である。さらに

$$\int_X fd\mu = \int_{X_1}\Big(\int_{X_2} f(x,y)d\mu_2(y)\Big)d\mu_1(x) = \int_{X_2}\Big(\int_{X_1} f(x,y)d\mu_1(x)\Big)d\mu_2(y)$$

が成立する。

(1-b) $f : X\to\mathbb{R}^*$ は $\mathcal{M}$-可測とする。いま次の 3 つの値

$$\int_X |f|d\mu, \int_{X_1}\Big(\int_{X_2}|f(x,y)|d\mu_2(y)\Big)d\mu_1(x), \int_{X_2}\Big(\int_{X_1}|(x,y)|d\mu_1(x)\Big)d\mu_2(y)$$

のいずれかが有限ならば X 上 f は μ-可積分であり f に対して (1-a) の結論がすべて成立する。
(2) $i=1,2$ に対して $(X_i,\mathcal{M}_i,\mu_i)$ は完備とする。このとき (1-a), (1-b) において「$\mathcal{M}$-可測」を「$\mathcal{N}$-可測」に、「任意の $x\in X_1$」を「μ_1-*a.e.* $x\in X_1$」に、「任意の $y\in X_2$」を「μ_2-*a.e.* $y\in X_2$」に、μ を ν に置き換えたものが成立する。

証明. (1-a) Step 1 f が単関数のとき: $f=\sum_{i=1}^n a_i\chi_{E_i}$ で $a_1,\dots,a_n\in(0,+\infty), E_1,\dots,E_n\in\mathcal{M}$ とする。$y\in X_2$ に対して、

$$f(x,y)=\sum_{i=1}^n a_i\chi_{(E_i)_{1,y}}(x)$$
$$\int_{X_1} f(x,y)d\mu_1(x)=\sum_{i=1}^n a_i\mu_1((E_i)_{1,y})$$

定理 2.6.7 より (1-a) は成立する。
Step 2 一般の場合: $f:X\to\mathbb{R}^*$ は $\mathcal{M}$-可測とする。命題 2.2.9 と定理 2.2.8 より非負な単関数の単調非減少列 $\{f_n\}_{n\geq 1}$ があって任意の $z\in X$ に対して $n\to\infty$ で $f_n(z)\to f(z)$ でありかつ $n\to\infty$ で $\int_X f_n d\mu\to\int_X f d\mu$ となる。Step 1 より f_n に対しては (1-a) が成り立つので、命題 2.2.5-(3) および 定理 2.2.8 よりその極限 f に対しても (1-a) は成り立つ。
(1-b) $|f|\geq 0$ より (1-a) を用いれば (1-b) の 3 つの積分の値は一致する。従ってそのうちの 1 つが有界であれば $\int_X |f|d\mu<+\infty$ より f は μ-可積分である。ここで $f_\pm$ それぞれに (1-a) を用いれば、$f=f_+-f_-$ に対しても (1-a) の結論が成り立つことがわかる。
(2) (1) と同様にまず単関数について示し、その極限を考えればよい。 □

演習 2.7.1. $(X,\mathcal{M},\mu)$ を σ-有限な測度空間、$f:X\to[0,+\infty)$ は $\mathcal{M}$-可測とする。
(1) $A=\{(x,t)|x\in X, t\in[0,+\infty), f(x)>t\}$ とおく。このとき $A\in\mathcal{M}\otimes\mathcal{L}_1$ を示せ。
(2) $A_t=\{x|x\in X, f(x)>t\}$ とするとき、$\mu(A_t)=\int_X \chi_A(x,t)d\mu(x)$ を示せ。
(3) $p\in[1,+\infty)$ に対して

$$\int_X f^p d\mu = p\int_0^{+\infty} t^{p-1}\mu(A_t)dt$$

を示せ。(この等式は分布等式とよばれるものである。)

演習 2.7.2. 任意の $(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ に対して実数 $a_{n,m}$ が与えられているとする。
(1)
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\sum_{m=1}^{+\infty}|a_{n,m}|\Big)<+\infty$$
ならば
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\sum_{m=1}^{+\infty}a_{n,m}\Big)=\sum_{m=1}^{+\infty}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}a_{n,m}\Big)$$
を示せ。
(2)　(1) の仮定が成り立たないとき (1) の結論は成り立つか？

演習 2.7.3. $(X,\mathcal{M},\mu)$ を σ-有限な測度空間とする。$n\geq 1$ に対して、$f_n: X\to\mathbb{R}$ は $\mathcal{M}$-可測かつ μ-可積分とする。
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_X |f_n(x)|dx<+\infty$$
が成り立つとき、μ-a.e. $x\in X$ で $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0$ が成り立つことを示せ。

Chapter 3

位相と測度

§3.1　距離空間上の測度

定理 3.1.1. (X, d) は距離空間、$(X, \mathcal{M}, \mu)$ を *Borel* 正則な測度空間とする。さらに $\mu(X) < \infty$ であるものする。このとき、任意の $A \in \mathcal{M}$ に対して、

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \inf\{\mu(U)|U \supseteq A, U \text{ は開集合 }\} \\ &= \sup\{\mu(F)|F \subseteq A, F \text{ は閉集合 }\}\end{aligned} \tag{3.1.1}$$

さらに (X, d) が可分かつ完備ならば、任意の $A \in \mathcal{M}$ に対して、

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K)|K \subseteq A, K \text{ はコンパクト }\} \tag{3.1.2}$$

記号. 距離空間 (X, d) において、$r > 0$, $x \in X$ に対して、

$$\begin{aligned}B_d(x, r) &= \{y|y \in X, d(x, y) < r\} \\ D_d(x, r) &= \{y|y \in X, d(x, y) \leq r\}\end{aligned}$$

とする。

補題 3.1.2. (X, d) は距離空間、$(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間で $\mu(X) < \infty$ かつ $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{B}(X, d)$ とする。このとき

$$\begin{aligned}\mathcal{N} = \{A|A \in \mathcal{M}, &\text{任意の } \epsilon > 0 \text{ に対して開集合 } U \text{ と閉集合 } F \text{ があって} \\ &F \subseteq A \subseteq U, \mu(U \backslash F) < \epsilon\}\end{aligned}$$

とおくと $\mathcal{N}$ は $\mathcal{B}(X, d)$ を含む σ-加法族である。

証明. $\emptyset \in \mathcal{N}$ は明らか。またある開集合 U と閉集合 F があって、$F \subseteq A \subseteq U, \mu(U \backslash F) < \epsilon$ ならば $U^c \subseteq A^c \subseteq F^c$ かつ $\mu(F^c \backslash U^c) < \epsilon$ なので $A \in \mathcal{N}$ ならば $A^c \in \mathcal{N}$. さらに $F_i \subseteq A_i \subseteq U_i, \mu(U_i \backslash F_i) < \epsilon/n$ ならば $F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i, U = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$ とおけば $F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq U, \mu(U \backslash F) < \epsilon$ なので $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{N}$ ならば $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{N}$ である。

さて $\{A_i\}_{i \geq 1} \subseteq \mathcal{N}$ のとき、$A = \bigcup_{i \geq 1} A_i, B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ とおく。このとき $B_n \in \mathcal{N}$ であり、$\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu(B_n)$ である。ここで m を $\mu(A \backslash B_m) < \epsilon/4$ となるように選んでおく。いま 閉集合 F を $F \subseteq B_m$ で $\mu(B_m \backslash F) < \epsilon/4$ をみたすように選べば、$\mu(A \backslash F) < \epsilon/2$ また開集合 U_n を $A_n \subseteq U_n, \mu(U_n \backslash A_n) < 2^{-(n+1)}\epsilon$ をみたすように選んで、$U = \bigcup_{n \geq 1} U_n$ とおけば、$\mu(U \backslash A) < \epsilon/2$. 以上より $F \subseteq A \subseteq U$ かつ $\mu(U \backslash F) < \epsilon$. よって $A \in \mathcal{N}$ である。以上より $\mathcal{N}$ は σ-加法族であることが示された。

次に任意の閉集合 F と任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、$U_n = \bigcup_{x \in F} B_d(x, 1/n)$ とおけば $\{U_n\}$ は単調減少な開集合列であり $F = \bigcap_{n \geq 1} U_n$. 命題 1.2.8-(2) より $\mu(F) = \lim_{n \to \infty} \mu(U_n)$. よって n が十分大きいなら $\mu(U \backslash F) < \epsilon$ である。従って $F \in \mathcal{N}$. ゆえに $\mathcal{N} \supseteq \mathcal{B}(X, d)$. □

補題 3.1.3. 補題 *3.1.2* の設定のもとで μ が *Borel* 正則ならば、$\mathcal{N} = \mathcal{M}$

証明. μ が Borel 正則で $\mu(X) < \infty$ ならば任意の $A \in \mathcal{M}$ に対して、ある X の Borel 集合 $B, C \in \mathcal{B}(X, d)$ があって、$C \subseteq A \subseteq B, \mu(A) = \mu(B) = \mu(C)$. ここで $B, C \in \mathcal{N}$ なので任意の $\epsilon > 0$ に対してある開集合 U と閉集合 F があって、$F \subseteq C \subseteq A \subseteq B \subseteq U, \mu(U \backslash F) < \epsilon$. 従って $A \in \mathcal{N}$ である。 □

定理 *3.1.1* の証明. 任意の $A \in \mathcal{M}$ に対して (3.1.1) は補題 3.1.2, 3.1.3 より明らか。(X, d) が可分かつ完備とし $\{x_n\}_{n \geq 1}$ を X の稠密な部分集合とする。任意の R に対して $\bigcup_{n \geq 1} D_d(x_n, R) = X$. ここで $\epsilon > 0$ を固定する。このとき任意の m に対してある $n(m)$ があって、$\mu\Big(X \backslash \big(\bigcup_{k=1}^{n(m)} D_d(x_k, \frac{1}{m})\big)\Big) < \epsilon/2^m$. さて

$$F_m = \bigcup_{k=1}^{n(m)} D_d\Big(x_k, \frac{1}{m}\Big), \quad K = \bigcap_{m \geq 1} F_n$$

とおき K がコンパクトであることを示す。任意の $r > 0$ に対して $m \geq \mathbb{N}$ で $r > 1/m$ となるものをとれば $K \subseteq F_m$. よって K は全有界である。さ

らに $\{y_n\}_{n\geq 1}$ を K 内のコーシー列とすると (X,d) は完備よりであるから、ある $y\in X$ で $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. 任意の m に対して $\{y_n\}_{n\geq 1}\subseteq F_m$ であるので $j\in\{1,\ldots,n(m)\}$ と部分列 $\{y_{n_i}\}_{i\geq 1}$ で $\{y_{n_i}\}_{i\geq 1}\subseteq D_d(x_j,\frac{1}{m})$ となるものが存在する。いま $\lim_{i\to\infty} y_{n_i} = y$ なので $y\in D_d(x_j,\frac{1}{m})$. 従って任意の $m\in\mathbb{N}$ で $y\in F_m$ となり、$y\in K$ である。つまり K は完備となり、K はコンパクトであることがわかる。さて

$$\mu(X\backslash K)\leq\sum_{m=1}^{+\infty}\mu(X\backslash F_n)<\epsilon$$

いま任意の閉集合 F に対して、$\mu(F\backslash(F\cap K))\leq\mu(X\backslash K)<\epsilon$. $F\cap K$ はコンパクトであるから、$\mu(F)=\sup\{\mu(K)|K\subseteq F, K \text{ はコンパクト }\}$. これと (3.1.1) を合わせれば、(3.1.2) が得られる。 □

定理 3.1.4. (X,d) を距離空間、$(X,\mathcal{M},\mu)$ は *Borel* 正則な測度空間であり、開集合の単調増大列 $\{U_n\}_{n\geq 1}$ があって、任意の n に対して $\mu(\overline{U_n})<+\infty$ かつ $X=\underset{n\geq 1}{\cup}U_n$ をみたすとする。このとき任意の $A\in\mathcal{M}$ に対して (3.1.1) が成り立つ。さらに (X,d) が可分かつ完備ならば、任意の $A\in\mathcal{M}$ に対して、(3.1.2) が成り立つ。

注意. 定理 3.1.4 の条件 は例えば、任意の $r>0$ 任意の $x\in X$ に対して、$\mu(B_d(x,r))<+\infty$（つまり任意の有界集合 $A\in\mathcal{M}$ に対して $\mu(A)<+\infty$）ならば満足される。

証明. $A\in\mathcal{M}$ とする。まず

$$\mu(A)=\inf\{\mu(U)|U\supseteq A, U \text{ は開集合 }\}\tag{3.1.3}$$

を示す。$\mu(A)=+\infty$ ならば $\mu(X)=+\infty$ かつ X は開集合。従って、(3.1.3) は満たされる。

$\mu(A)<+\infty$ とする。$A_i=U_i\cap A$ とおき、$(U_i,\mathcal{M}|_{U_i},\mu|_{U_i})$ に対して定理 3.1.1 を用いれば、任意の $\epsilon>0$ に対して U_i の開集合 O_i で　$O_i\supseteq A_i$ かつ $\mu(O_i\backslash A_i)<\epsilon/2^i$ となるものがある。ここで U_i は開集合なので O_i も（X の）開集合である。よって $O=\underset{i\geq 1}{\cup}O_i$ と定義すれば O は開集合であり、$\mu(O\backslash A)\leq\sum_{i=1}^{+\infty}\mu(O_i\backslash A_i)<\epsilon$. これより (3.1.3) がみたされる。

次に

$$\mu(A)=\sup\{\mu(F)|F\subseteq A, F \text{ は閉集合 }\}.\tag{3.1.4}$$

を示す。$V_i = \overline{U_i}$、 $B_i = A_i \cap V_i$ とおく。このとき $(V_i, \mathcal{M}|_{V_i}, \mu|_{V_i})$ に対して定理 3.1.1 を用いれば、任意の $\epsilon > 0$ に対して、V_i の閉集合 F_i で $F_i \subseteq B_i$ かつ $\mu(B_i \backslash F_i) < \epsilon/2$. V_i は（X の）閉集合なので F_i も（X の）閉集合である。さて $\mu(A) = +\infty$ のときは、$\lim\limits_{i\to\infty} \mu(B_i) = \mu(A) = +\infty$ より $\lim\limits_{i\to\infty} \mu(V_i) = +\infty = \mu(A)$. よって (3.1.4) は成り立つ。

$\mu(A) < +\infty$ のとき $\lim\limits_{i\to\infty} \mu(B_i) = \mu(A)$ よりある n に対して $\mu(A \backslash B_n) < \epsilon/2$. よって $\mu(A \backslash F_i) < \epsilon$. これより (3.1.4) が成り立つ。

(X, d) が完備かつ可分のときは V_i も可分かつ完備である。よって $(V_i, \mathcal{M}|_{V_i}, \mu|_{V_i})$ に定理 3.1.1 の後半を用いれば、上の証明での F_i をコンパクト集合で選ぶことができる。したがって (3.1.2) が成り立つ。 □

定義 3.1.5. $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする。（$\mathcal{O}$ は X の開集合の全体）$f : X \to \mathbb{R}$ に対して、f の台（support）$\mathrm{supp}\, f$ を $\{x | x \in X, f(x) \neq 0\}$ の閉包で定義する。$\mathrm{supp}\, f$ がコンパクトであるとき、f を台コンパクト（support compact）な関数という。

定理 3.1.6. (X, d) を距離空間、$(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間で、任意の $A \in \mathcal{M}$ に対して (3.1.1) をみたすとする。$f : X \to \mathbb{R}$ が $\mathcal{M}$-可測かつ μ-可積分とするとき、任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\int_X |f - g| d\mu < \epsilon$$

となる連続関数 $g : X \to \mathbb{R}$ が存在する。さらに (X, d) が局所コンパクトであり、任意の $A \in \mathcal{M}$ に対して (3.1.2) が成り立つならば、g を台コンパクトな関数に選ぶことができる。

証明. Step 1 $A \in \mathcal{M}$ に対して $f = \chi_A$ のとき：
$\int_X f d\mu = \mu(A) < +\infty$ としてよい。このとき、$\epsilon > 0$ に対して開集合 U と閉集合 F で $F \subseteq A \subseteq U$ であり $\mu(U \backslash F) < \epsilon$ となるものがとれる。ここで Urysohn の補題により、連続関数 $g : X \to \mathbb{R}$ で、任意の x で $0 \leq g(x) \leq 1$, $x \in F$ で $g(x) = 1$, $x \in U^c$ で $g(x) = 0$ となるものがある。$h = f - g$ とおくと、$x \in (U \backslash F)^c$ で $h(x) = 0$ であり、任意の $x \in X$ で $|h(x)| \leq 1$. したがって、

$$\int_X |h| d\mu \leq \int_{U \backslash F} d\mu = \mu(U \backslash F) < \epsilon.$$

(3.1.2) がなりたつときは、上の議論で F のかわりに コンパクトな $K \subseteq A$ がとれる。さらに (X, d) が局所コンパクトならば、任意の $x \in X$ に対して

ある x の開近傍 O_x で $\overline{O_x}$ がコンパクトなものがとれる。いま $\{O_x\}_{x\in K}$ は K の開被覆であるからある $x_1,\cdots,x_m\in K$ があって $K\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{m}O_{x_i}$ である。いま $O=U\cap(\bigcap\limits_{i=1}^{m}O_i)$ とおくとき $\overline{O}\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{m}\overline{O_{x_i}}$ より $\overline{O}$ はコンパクト。ここで、Urysohn の補題より g として任意の $x\in X$ で $0\le g(x)\le 1$, $x\in K$ で $g(x)=1$, $x\in O^c$ で $g(x)=0$ となる連続関数がある。$\mathrm{supp}\, g\subseteq\overline{O}$ より g は台コンパクトである。また上と同様の議論で $\int_X|f-g|d\mu\le\int_{U\backslash F}d\mu<\epsilon.$

Step 2 一般の場合：

$f:X\to\mathbb{R}$ が可測かつ可積分ならば、任意の $\epsilon>0$ に対して単関数 h で $\int_X|f-h|d\mu<\epsilon/2$ となるものがある。$h=\sum_{i=1}^n a_i\chi_{A_i}$ （$a_1,\cdots,a_n\in\mathbb{R}\backslash\{0\},A_1,\cdots,A_n\in\mathcal{M},\mu(A_i)<+\infty$）とするとき、Step 1 より任意の i に対して、連続関数 $g_i:X\to\mathbb{R}$ で $\int_X|a_i\chi_{A_i}-g_i|d\mu<\epsilon/2n$ となるものがある。$g=\sum_{i=1}^n g_i$ とおくと

$$\begin{aligned}\int_X|f-g|d\mu&\le\int_X|f-h|d\mu+\int_X|h-g|d\mu\\&\le\epsilon/2+\sum_{i=1}^n\int_X|a_i\chi_{A_i}-g_i|d\mu<\epsilon.\end{aligned}$$

(X,d) が局所コンパクトかつ (3.1.2) が成り立つときは Step 1 より g_i が台コンパクトにとれるので g も台コンパクトである。 □