2010 年 3 月 19 日

双曲線関数について

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

双曲線関数は、三角関数と似た記号を使って書かれるが、実際には指数関数の簡単な式で定義される関数なので、特に新しい関数として追加されるようなものではなく、よって数学の教科書でも定義とそのグラフ程度しか紹介されないことが多い。実際、私が使用している教科書 [1] でも、定義と簡単な性質が発展として 1 頁書かれているだけである。

せっかくであるから、この関数の他の性質などを、余談も含め色々調べてみることにする。

2 定義

双曲線関数とは、次のように定義されるものである。

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{1}$$

sinh は「ハイパボリックサイン」、cosh は「ハイパボリックコサイン」と読む 4 文字の関数名である。ハイパボリック (hyperbolic) とは、「ハイパーボラ (hyperbola) = 双曲線」という言葉の形容詞形で、「双曲的な」という言葉を指している。そのため、双曲線関数と呼ばれるのであるが、この「双曲的」という言葉がなぜついているのかについては、3 節で紹介する。

$\cosh x$ は

$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cosh x \tag{2}$$

より偶関数、$\sinh x$ は、

$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = -\sinh x \tag{3}$$

より奇関数である。

$y = \cosh x$, $y = \sinh x$ のグラフは、$y = e^{x}$, $y = e^{-x}$ のグラフから容易にわかるが、図 1 のようになる。

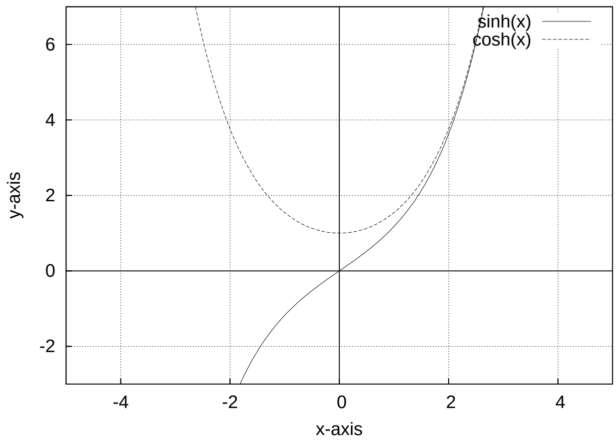

図 1: $y = \cosh x$, $y = \sinh x$ のグラフ

$\sin x$, $\cos x$ 以外の三角関数が、

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

と定義されるのと同様に、$\sinh x$, $\cosh x$ 以外の双曲線関数は、

$$\begin{aligned} \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}, & \coth x &= \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}, \\ \operatorname{sech} x &= \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^{x} + e^{-x}}, & \operatorname{cosech} x &= \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^{x} - e^{-x}} \end{aligned} \tag{4}$$

と定義される。$\cosh x$, $\sinh x$ 以外でよく用いられるのは $\tanh x$ 程度であり、$\tanh x$, $\coth x$ のグラフは図 2 のようになる。

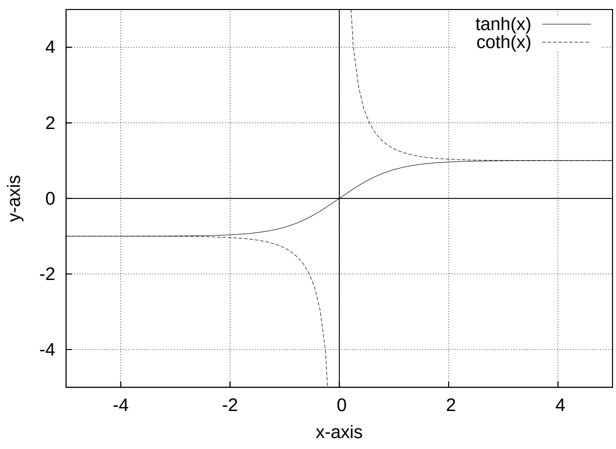

図 2: $y = \tanh x$, $y = \coth x$ のグラフ

なお、tan (タンジェント)、cot (コタンジェント) は、特に東欧では tg, ctg のように書かれることも多い。その流儀では、sinh, cosh, tanh, coth なども、sh, ch, th, cth のように書かれるようである (例えば [2] 参照)。

次の式は、双曲線関数の最も基本的な性質である。

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x} \tag{5}$$

なお三角関数と同様に、自然数 n に対し、

$$\cosh^n x = (\cosh x)^n, \quad \sinh^n x = (\sinh x)^n, \quad \tanh^n x = (\tanh x)^n$$

のように書くことになっている。

(5) の最初の式は、定義の式 (1) を代入して展開すれば容易に得られるし、2 本目の式は最初の式の両辺を $\cosh^2 x$ で割れば得られる。

この性質 (5) は、三角関数の性質

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

に対応している。

3 名前の由来

双曲線関数の名前の由来は、歴史的には詳しくは知らないが、この関数が双曲線のパラメータ表示になっているからであろう。

良く知られているように、$(x, y) = (\cos t, \sin t)$ は

$$x^2 + y^2 = 1$$

を満たし、この点 (x, y) は t が動くと原点中心で半径 1 の円を描く。それに対し、

$$(x, y) = (\cosh t, \sinh t) \tag{6}$$

は、(5) により

$$x^2 - y^2 = 1 \quad (x > 0)$$

を満たし、よって t が動くと (6) の点 (x, y) は、双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ の右半分を描く。

ここで、**双曲線**とは、

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0,\ b > 0) \tag{7}$$

で表される曲線、あるいはそれを平行移動、回転したものを指す、いわゆる 2 次曲線の一つである (図 3)。なお、**2 次曲線**とは、x, y の 2 次式

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

で表される曲線のうち、直線ではないものを指し、それは適当に平行移動、回転をすると、次の 3 つのいずれかになることが知られている $(a > 0,\ b > 0)$。

- 楕円 (ellipse): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
- 放物線 (parabola): $y^2 = ax$

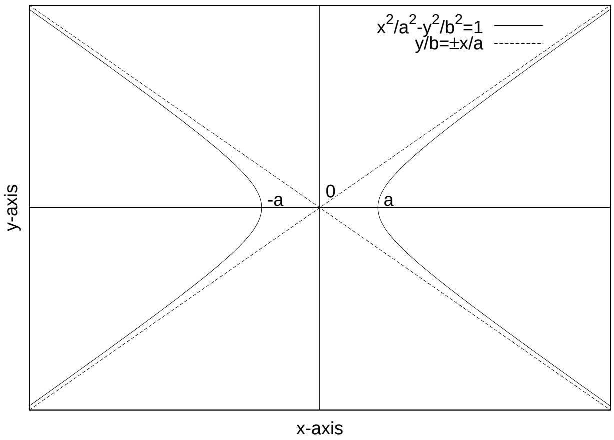

図 3: 双曲線 $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ のグラフ

- 双曲線 (hyperbola): $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

双曲線 (7) の右側は $(x, y) = (a\cosh t, b\sinh t)$ で、左側は $(x, y) = (-a\cosh t, b\sinh t)$ で表されることになる。

しかし、それにしても三角関数と双曲線関数は全く物が違うので、似た名前を用いることに違和感を感じる人もいると思うが、それはこの後にも出てくる三角関数と双曲線関数の性質の類似性から、その自然さが徐々にわかってくると思う。

4 加法定理

三角関数では、次のような加法定理が成り立つ。

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y, \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \end{aligned} \tag{8}$$

それと同様に、双曲線関数に対しても次のような加法定理が成り立つ。

$$\begin{aligned} \sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y, \\ \cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \end{aligned} \tag{9}$$

例えば (9) の 2 本目の式は、

$$
\begin{aligned}
\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}\frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}\frac{e^y - e^{-y}}{2} \\
&= \frac{1}{4}\left(e^x e^y + e^x e^{-y} + e^{-x} e^y + e^{-x} e^{-y}\right) + \frac{1}{4}\left(e^x e^y - e^x e^{-y} - e^{-x} e^y + e^{-x} e^{-y}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{x+y} + e^{-x-y}\right) = \cosh(x+y)
\end{aligned}
$$

のようにして確認できる。$\tan x$, $\tanh x$ に対する加法定理も、(8), (9) の 1 本目を 2 本目の式でそれぞれ割ることで、

$$
\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \quad \tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}
$$

のように得られる。

5 微積分

三角関数の微分の公式は以下の通りである。

$$
(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \tag{10}
$$

双曲線関数の微分も、これによく似た公式が成り立つ。

$$
(\sinh x)' = \cosh x, \quad (\cosh x)' = \sinh x, \quad (\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x} \tag{11}
$$

(11) の最初の 2 つは $(e^x)' = e^x$, $(e^{-x})' = -e^{-x}$ から容易にわかる。$\tanh x$ の微分も、

$$
\begin{aligned}
(\tanh x)' &= \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \frac{(\sinh x)' \cosh x - (\cosh x)' \sinh x}{\cosh^2 x} \\
&= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}
\end{aligned}
$$

として得られる。

積分の公式も、三角関数の場合は (10) から

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x\,dx = \sin x + C$$

となるように、双曲線関数の積分は (11) より

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C, \quad \int \cosh x\,dx = \sinh x + C \tag{12}$$

となる。$\tan x$ の積分は、置換積分の公式

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + C$$

を利用すれば、

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx = -\log|\cos x| + C$$

となるから、$\tanh x$ の積分も同様に

$$\int \tanh x\,dx = \int \frac{\sinh x}{\cosh x}\,dx = \int \frac{(\cosh x)'}{\cosh x}\,dx = \log|\cosh x| + C$$

となるが、$\cosh x > 0$ であるから、

$$\int \tanh x\,dx = \log(\cosh x) + C \tag{13}$$

となる。

6 逆関数

三角関数では、三角比の値から角の大きさを求めるための逆三角関数 arcsin, arccos, arctan 等がよく用いられる。ただし三角関数は単調ではなく、逆関数は一般には多価関数となるので、通常は三角関数の定義域を制限して以下のように一価の関数とするのが普通である (それを多価関数の主値と呼ぶこともある)。

- $y = \sin x$ の定義域を $-\pi/2 \le x \le \pi/2$ に制限した単調増加関数の逆関数を $x = \arcsin y$ (アークサイン、$-1 \le y \le 1$)
- $y = \cos x$ の定義域を $0 \le x \le \pi$ に制限した単調減少関数の逆関数を $x = \arccos y$ (アークコサイン、$-1 \le y \le 1$)
- $y = \tan x$ の定義域を $-\pi/2 < x < \pi/2$ に制限した単調増加関数の逆関数を $x = \arctan y$ (アークタンジェント、$-\infty < y < \infty$)

なお、この $\arcsin y$ の「arc」とは「円弧」のことで、角度は弧度法では単位円の弧の長さを意味するので、「三角比 y に対する弧の長さ」という意味で $\arcsin x$ のように呼ぶわけである。

もう一つ逆関数を表す流儀として $x = \sin^{-1} y$, $x = \cos^{-1} y$, $x = \tan^{-1} y$ の形の記法もよく使われるが、これは (-1) 乗と紛らわしい (もちろん $\sin^{-1} y$ と $(\sin y)^{-1}$ とは全く異なる) ので、本来は使わない方がいいと思うのだが、基礎数理の教科書 [1] では $\sin^{-1} y$ の記法を採用している[1]。

双曲線関数の場合、例えば $y = \sinh x$ は、$-\infty < x < \infty$ から $-\infty < y < \infty$ への単調増加関数なので、定義域を制限せずにそのまま逆関数が作れる。それを、三角関数の逆関数と同様に $x = \operatorname{arcsinh} y$ (ハイパボリックアークサイン)、または $x = \sinh^{-1} y$ (インバースハイパボリックサイン) と書くようである。

ただし、この「arc」には「弧」の意味はなく、つまり実際になんらかの曲線の長さを表しているわけではなく、単に三角関数の逆関数に記号を合わせて「arc」と書いているだけのようである。実際、$(x, y) = (\cosh t, \sinh t)$ で表される双曲線の $0 \le t \le a$ の部分の弧の長さ ℓ は、

$$\ell = \int_0^a \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt = \int_0^a \sqrt{\sinh^2 t + \cosh^2 t}\,dt = \int_0^a \sqrt{\cosh 2t}\,dt$$

となるが、この最後の積分は a の簡単な式では表すことはできず、いわゆる楕円積分になることが知られている (詳しくは [2] 参照)。

$x = \operatorname{arcsinh} y$ と $y = \sinh x$ は全く同じ関係を意味しているので、逆関数 $x = \operatorname{arcsinh} y$ のグラフは、単に $y = \sinh x$ の見方を変えて、横軸と縦軸を入れ換えただけのものになる (図 4)。

[1] しかも $\sin^{-1} y$ と書いて「アークサイン」と読め、と書いてあるのだが、この記号ならむしろ「インバースサイン」とでも読むべきではなかろうか。

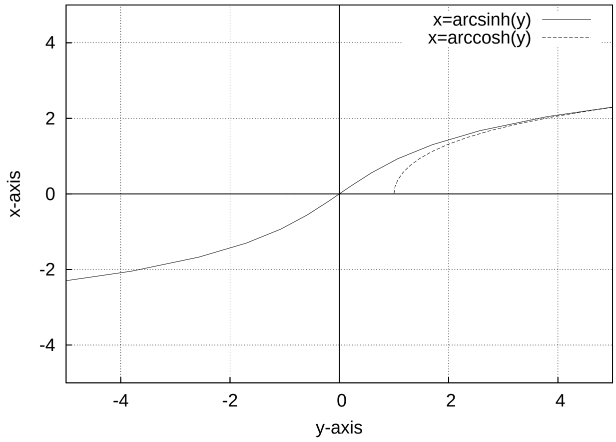

図 4: $x = \operatorname{arcsinh} y$, $x = \operatorname{arccosh} y$ のグラフ

$y = \cosh x$ の場合は単調ではないので、$x \geq 0$ に制限して逆関数を考えることになる。それを $x = \operatorname{arccosh} y$、あるいは $x = \cosh^{-1} y$ と書く ($y \geq 1$)。

$y = \tanh x$ は、$-\infty < x < \infty$ 上の単調増加関数であり、その値域は $-1 < y < 1$ なので、逆関数 $x = \operatorname{arctanh} y = \tanh^{-1} y$ は $-1 < y < 1$ 上の関数となる。

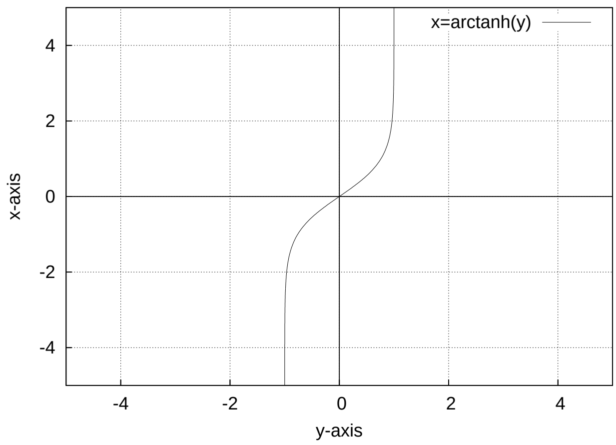

図 5: $x = \operatorname{arctanh} y$ のグラフ

これらの逆関数は、元々の関数が指数関数の簡単な式で表されるので、逆関数自体も比較的やさしい式で表すことができる。例えば、$y = \sinh x$ の場合、

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

より、

$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0, \quad (e^x - y)^2 = y^2 + 1$$

となり、

$$y - e^x = -\frac{e^x + e^{-x}}{2} = -\cosh x < 0$$

なので、

$$e^x - y = \sqrt{y^2 + 1}$$

となり、よって、

$$\operatorname{arcsinh} y = \sin^{-1} y = \log\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right) \quad (-\infty < y < \infty) \tag{14}$$

となる。

$y = \cosh x$ の場合も同様で、

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

より、

$$e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0, \quad (e^x - y)^2 = y^2 - 1$$

となり、$x \geq 0, y \geq 1$ なので、

$$y - e^x = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\sinh x \leq 0$$

となり、よって

$$e^x - y = \sqrt{y^2 - 1}$$

より、

$$\operatorname{arccosh} y = \cosh^{-1} y = \log\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right) \quad (y \geq 1) \tag{15}$$

となる。

$y = \tanh x$ の場合は、

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}, \quad e^{2x}(1 - y) = 1 + y$$

であり、$-1 < y < 1$ より、

$$\operatorname{arctanh} y = \tanh^{-1} y = \frac{1}{2} \log \frac{1 + y}{1 - y} \quad (-1 < y < 1) \tag{16}$$

が得られる。

次に、それぞれの微分を計算してみよう。今求めた (14), (15), (16) を合成関数の微分で計算してもいいのであるが、ここでは逆関数の微分法

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

を用いて計算してみる。まず $x = \operatorname{arcsinh} y$ の微分は、

$$(\operatorname{arcsinh} y)' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{(\sinh x)'} = \frac{1}{\cosh x}$$

となるが、(5) を使えば $\cosh x = \sqrt{\sinh^2 x + 1} = \sqrt{y^2 + 1}$ と書けるので、

$$(\operatorname{arcsinh} y)' = \frac{1}{\sqrt{y^2 + 1}} \quad (-\infty < y < \infty) \tag{17}$$

となる。同様に $x = \operatorname{arccosh} y$ の微分は、

$$(\operatorname{arccosh} y)' = \frac{1}{(\cosh x)'} = \frac{1}{\sinh x}$$

であり、$x \geq 0$ と (5) より $\sinh x = \sqrt{\cosh^2 x - 1} = \sqrt{y^2 - 1}$ となるので、

$$(\operatorname{arccosh} y)' = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}} \quad (y > 1) \tag{18}$$

が得られる。$x = \operatorname{arctanh} y$ は、

$$(\operatorname{arctanh} y)' = \frac{1}{(\tanh x)'} = \cosh^2 x$$

であり、(5) より

$$(\operatorname{arctanh} y)' = \frac{1}{1 - y^2} \quad (-1 < y < 1) \tag{19}$$

となる。この (17), (18), (19) も、逆三角関数の導関数

$$\begin{aligned}
(\arcsin y)' &= \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \quad (-1 < y < 1), \\
(\arccos y)' &= -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \quad (-1 < y < 1), \\
(\arctan y)' &= \frac{1}{1 + y^2} \quad (-\infty < y < \infty)
\end{aligned}$$

に似た形の式になっていることがわかる。

逆にこれらを積分の公式の形に書き直せば、$a > 0$ として、

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \quad (-\infty < x < \infty) \tag{20}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \begin{cases} -\dfrac{1}{a} \operatorname{arctanh} \dfrac{x}{a} + C & (-a < x < a), \\ -\dfrac{1}{a} \operatorname{arctanh} \dfrac{a}{x} + C & (x < -a,\ x > a) \end{cases} \tag{21}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (-a < x < a) \tag{22}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \operatorname{arcsinh}\frac{x}{a} + C \quad (-\infty < x < \infty) \tag{23}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \begin{cases} \operatorname{arccosh}\dfrac{x}{a} + C & (x > a), \\ \operatorname{arccosh}\left(-\dfrac{x}{a}\right) + C & (x < -a), \end{cases} \tag{24}$$

のようになる。これらにより、1/(2 次式), $1/\sqrt{(2\text{ 次式})}$ の形の積分は、その 2 次式が完全平方形でない限りこれらのいずれかの形に帰着されることになる。

これらの公式の大半は $x = at$, $x = -at$ などの置換により得られるが、(21) は、$|x| < a$ の場合は $|x/a| < 1$ であり、合成関数の微分により、

$$\left(\operatorname{arctanh}\frac{x}{a}\right)' = \frac{1}{1-(x/a)^2}\,\frac{1}{a} = -\frac{a}{x^2-a^2}$$

より (21) の前者が得られ、また $|x| > a$ の場合は $|a/x| < 1$ であり、

$$\left(\operatorname{arctanh}\frac{a}{x}\right)' = \frac{1}{1-(a/x)^2}\left(-\frac{a}{x^2}\right) = -\frac{a}{x^2-a^2}$$

となるので (21) の後者が得られる。

7 複素数によるつながり

ここまでは、何となく三角関数と双曲線関数の性質が似ていることを見てきたが、複素数を使えば、直接それらを結びつけることができ、なぜここまで似た性質を持つのかがわかる。

そのためには、本来は複素関数論をある程度は説明すべきであろうが、とりあえず必要なのは、オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{25}$$

と、e の一般の複素数乗

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x\cos y + ie^x\sin y \tag{26}$$

であるので、これらを認め、複素数乗の指数法則 $e^z e^w = e^{z+w}$ も認めた上で議論を進めることにする。

(25) を用いると、

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

より、$\cos x, \sin x$ を $\cosh x, \sinh x$ と同様に指数関数で表すことができる。

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

さらにこの式を使って $\cos x, \sin x$ の変数 x を複素数 $z = x + iy$ にまで拡張できる。

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \tag{27}$$

これが複素関数 (変数も関数値も複素数の関数) としての三角関数の定義である。同様に複素変数 z に対する $\cosh z, \sinh z$ も定義できる。

$$\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \tag{28}$$

$\tan z, \tanh z$ 等についても同様である。そしてこれらの式を用いると、容易に次のことがわかる。

$$\begin{aligned}
\cos iz &= \frac{e^{-z} + e^{z}}{2} = \cosh z, && (29)\\
\cosh iz &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z, && (30)\\
\sin iz &= \frac{e^{-z} - e^{z}}{2i} = i \sinh z, && (31)\\
\sinh iz &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = i \sin z && (32)
\end{aligned}$$

すなわち $\cos z$ は $\cosh iz$ で、$\cosh z$ は $\cos iz$ で、$\sin z$ は $\sinh iz$ で、$\sinh z$ は $\sin iz$ でそれぞれ表されるのである。複素関数としての三角関数に対しても加法定理は通常と同じ形で成り立つ。つまり、複素数 z, w に対して

$$\begin{aligned}
\sin(z + w) &= \sin z \cos w + \cos z \sin w,\\
\cos(z + w) &= \cos z \cos w - \sin z \sin w
\end{aligned} \tag{33}$$

が成り立つので、双曲線関数の加法定理が三角関数と似た形になるのはそこからわかる。すなわち、

$$\begin{aligned}\sinh(z+w) &= \frac{1}{i}\sin(iz+iw) = \frac{1}{i}(\sin iz\cos iw + \cos iz\sin iw)\\ &= \sinh z\cosh w + \cosh z\sinh w,\\ \cosh(z+w) &= \cos(iz+iw) = \cos iz\cos iw - \sin iz\sin iw\\ &= \cosh z\cosh w + \sinh z\sinh w\end{aligned}$$

のようになるわけである。

このように考えると、双曲線関数に関する色んな公式が三角関数と似た形で成り立つのは、ある程度自然であることがわかる。ちなみに、初等関数はこのように複素変数で考える方が見通しが良くなることがある。これを発展させたのが「複素関数論」という分野である。

なお、複素形の三角関数の加法定理 (33) は、指数法則から成り立つことがわかる。その計算は、4 節の (9) の証明とほぼ同等であるので省略する。

最後に $\cosh z$, $\sinh z$ を x, y の式で表してみよう。

$$\begin{aligned}\cosh z &= \frac{e^z+e^{-z}}{2} = \frac{e^{x+iy}+e^{-x-iy}}{2}\\ &= \frac{1}{2}(e^x\cos y + ie^x\sin y + e^{-x}\cos y - ie^{-x}\sin y) && (34)\\ &= \frac{e^x+e^{-x}}{2}\cos y + i\frac{e^x-e^{-x}}{2}\sin y\\ &= \cosh x\cos y + i\sinh x\sin y, && (35)\\ \sinh z &= \frac{e^z-e^{-z}}{2} = \frac{e^{x+iy}-e^{-x-iy}}{2}\\ &= \frac{1}{2}(e^x\cos y + ie^x\sin y - e^{-x}\cos y + ie^{-x}\sin y) && (36)\\ &= \frac{e^x-e^{-x}}{2}\cos y + i\frac{e^x+e^{-x}}{2}\sin y\\ &= \sinh x\cos y + i\cosh x\sin y && (37)\end{aligned}$$

なお、これらはこのような展開ではなく、複素数版の加法定理によって得ることもできる。$\cos z$, $\sin z$ をその方法で同様の形に表してみよう。それには、加法定理 (33) と、(29), (31) を用いればよい。

$$\cos z = \cos(x+iy) = \cos x\cos iy - \sin x\sin iy$$

$$
\begin{aligned}
&= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y, &(38)\\
\sin z &= \sin(x+iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy\\
&= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y &(39)
\end{aligned}
$$

となる。

8 テイラー展開

本節では、双曲線関数のテイラー展開 (マクローリン展開) を紹介する。良く知られているように、$\sin x$, $\cos x$ のマクローリン展開は

$$
\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad (-\infty < x < \infty), \tag{40}
$$

$$
\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \quad (-\infty < x < \infty) \tag{41}
$$

となるが、e^x, e^{-x} のマクローリン展開は

$$
e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad (-\infty < x < \infty), \tag{42}
$$

$$
e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad (-\infty < x < \infty), \tag{43}
$$

であるから、これらを足し引きすれば、$\sinh x$, $\cosh x$ のマクローリン展開

$$
\sinh x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad (-\infty < x < \infty), \tag{44}
$$

$$
\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots \quad (-\infty < x < \infty) \tag{45}
$$

が得られる。なお、これらは (40), (41) に ix を代入して 7 節の (29), (31) を用いても得ることができる。

$\tan x$ のマクローリン展開は、微分を使って定義通りに計算するのはかなり面倒なので例えば以下のように計算すればよい。

$$
\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{1-(1-\cos x)}
$$

であり、$-\pi/2 < x < \pi/2$ では $0 \leq 1 - \cos x < 1$ なので、

$$\frac{1}{1-(1-\cos x)} = 1 + (1-\cos x) + (1-\cos x)^2 + (1-\cos x)^3 + \cdots$$

となるから、

$$\tan x = \sin x\{1 + (1-\cos x) + (1-\cos x)^2 + \cdots\}$$

となるが、ここに (40), (41) を代入すれば、

$$\begin{aligned}
&\tan x \\
&= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots\right)\left\{1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \cdots\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \cdots\right)^2 + \cdots\right\} \\
&= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots\right)\left\{1 + \frac{x^2}{2} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{24}\right)x^4 + \cdots\right\} \\
&= x + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right)x^3 + \left(\frac{1}{120} - \frac{1}{12} + \frac{5}{24}\right)x^5 + \cdots \\
&= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \cdots
\end{aligned}$$

のようになる。$\tanh x$ は、(29), (31) より

$$\tan ix = \frac{\sin ix}{\cos ix} = \frac{i\sinh x}{\cosh x} = i\tanh x$$

なので、

$$\tanh x = \frac{1}{i}\tan ix = \frac{1}{i}\left(ix - \frac{ix^3}{3} + i\frac{2}{15}x^5 + \cdots\right) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$$

のようにして $\tan x$ の展開式から求めることができる。

次は逆関数のマクローリン展開を考える。これは、導関数の展開を先に考えると容易に求められる。例えば $\arctan y$ のマクローリン展開は、

$$(\arctan y)' = \frac{1}{1+y^2} = 1 - y^2 + y^4 - y^6 + \cdots \quad (-1 < y < 1)$$

より、この両辺を 0 から y まで積分すれば、$\arctan 0 = 0$ なので、

$$\arctan y = \frac{y}{1} - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} + \cdots \quad (-1 < y < 1) \tag{46}$$

となる。これと同様にすれば、

$$(\operatorname{arctanh} y)' = \frac{1}{1-y^2} = 1 + y^2 + y^4 + y^6 + \cdots \quad (-1 < y < 1)$$

より、

$$\operatorname{arctanh} y = \frac{y}{1} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \frac{y^7}{7} + \cdots \quad (-1 < y < 1) \tag{47}$$

が得られる。

他の逆関数は、$1/\sqrt{1-x}$ の展開式を利用すればよいが、一般二項定理により

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\begin{array}{c} -1/2 \\ n \end{array} \right) x^n \quad (-1 < x < 1) \tag{48}$$

であり、

$$(-1)^n \left(\begin{array}{c} -1/2 \\ n \end{array} \right) = (-1)^n \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{1 \cdot 2 \cdots n} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}$$

となるが、

$$m!! = \begin{cases} (2n)(2n-2)\cdots 4 \cdot 2 & (m = 2n\,(>0)\ \text{のとき}), \\ (2n-1)(2n-3)\cdots 3 \cdot 1 & (m = 2n-1\,(>0)\ \text{のとき}), \\ 1 & (m = 0, -1\ \text{のとき}) \end{cases}$$

と書くことにすると、結局 $n \geq 0$ に対して

$$(-1)^n \left(\begin{array}{c} -1/2 \\ n \end{array} \right) = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

と書けることになり、(48) は、

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n \quad (-1 < x < 1) \tag{49}$$

となる。よって、

$$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} y^{2n} \quad (-1 < y < 1)$$

を 0 から y まで積分すれば

$$\arcsin y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{y^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 < y < 1) \tag{50}$$

が得られ、

$$\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} y^{2n} \quad (-1 < y < 1)$$

を 0 から y まで積分すれば (17) より

$$\operatorname{arcsinh} y = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{y^{2n+1}}{2n+1} \quad (-1 < y < 1) \tag{51}$$

が得られる。

あとは $\operatorname{arccosh} y$ の展開だけであるが、$\operatorname{arccosh} y$ は $y \geq 1$ の関数で、しかも $y = 1$ では微分可能ではない (微分係数は ∞) のでこのままテイラー展開はできない。その代わりに $y = 1/t$ として、$x = \operatorname{arccosh} 1/t$ の t に関する展開を考えてみることにする ($0 < t \leq 1$)。(15) より、

$$\begin{aligned}
\operatorname{arccosh} \frac{1}{t} &= \log\left(\frac{1}{t} + \sqrt{\frac{1}{t^2} - 1}\right) = \log \frac{1 + \sqrt{1-t^2}}{t} \\
&= \log\left(1 + \sqrt{1-t^2}\right) - \log t
\end{aligned} \tag{52}$$

となるが、合成関数の微分 $(y=1/t)$ と (18) より、

$$\left(\operatorname{arccosh}\frac{1}{t}\right)' = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}\times\left(-\frac{1}{t^2}\right) = \frac{-1}{\sqrt{(1/t^2)-1}}\,\frac{1}{t^2} = -\frac{1}{t\sqrt{1-t^2}} \quad (0<t<1)$$

となる。ここで、(49) より

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,t^{2n} \quad (0<t<1)$$

であるから、

$$\left(\operatorname{arccosh}\frac{1}{t}\right)' = -\frac{1}{t} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,t^{2n-1} \quad (0<t<1)$$

より、

$$\left(\operatorname{arccosh}\frac{1}{t} + \log t\right)' = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,t^{2n-1} \quad (0<t<1)$$

となる。この両辺を $+0$ から t まで積分すると、左辺は

$$\operatorname{arccosh}\frac{1}{t} + \log t - \lim_{x\to+0}\left(\operatorname{arccosh}\frac{1}{x} + \log x\right)$$

となるが、(52) より

$$\lim_{x\to+0}\left(\operatorname{arccosh}\frac{1}{x} + \log x\right) = \lim_{x\to+0}\log\left(1+\sqrt{1-x^2}\right) = \log 2$$

なので、

$$\operatorname{arccosh}\frac{1}{t} + \log t - \log 2 = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{t^{2n}}{2n} \quad (0<t<1)$$

となる。これを y に戻せば、結局

$$\operatorname{arccosh} y = \log y + \log 2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{1}{2n}\,\frac{1}{y^{2n}} \quad (y>1) \tag{53}$$

が得られる。これは、厳密にはテイラー展開ではないが、$y=\infty$ を中心とするようなある種の展開 (漸近展開) になっている。

9 懸垂線

最後に、$y = \cosh x$ のグラフと懸垂線の関係を紹介しよう。**懸垂線**とは、一様な重さを持つ細長い線を張ったときに自分の重みによって自然にたわんでできる曲線の形を言い、電線や首のネックレスなどがこの曲線の形になる。

その線の単位長さ当たりの質量 (線密度) を ρ とし、これは場所によらず一定であるとする。線を両端を点 A と B に固定したときにできる曲線を $y = y(x)$ とする (図 6)。

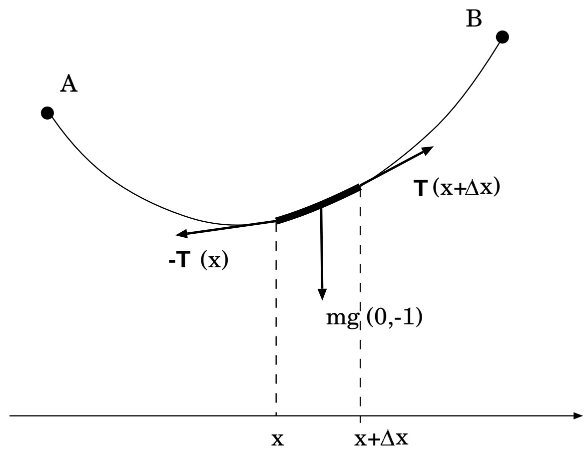

図 6: 懸垂線 $y = y(x)$

まず、各点 $(x, y(x))$ には、接線方向に左右に張力が働くが、一点の線の質量は 0 であるから重力は働かないので、その一点には左右の張力しか働かない。よって釣り合って静止している線では左右の張力も釣り合っているはずである。よってその右向きの張力を $\boldsymbol{T}(x)$ とすると、左向きの張力は $-\boldsymbol{T}(x)$ となる。張力は、曲線 $y = y(x)$ に接するので、接線方向のベクトル $(1, y'(x))$ に平行で、よって、正のあるスカラー関数 $\alpha(x)$ を用いて

$$\boldsymbol{T}(x) = \alpha(x)(1, y'(x)) \tag{54}$$

と書ける。

次に、x から $x + \Delta x$ の、短い幅の線の一部分にかかる力の釣り合いを考えると、この部分には、

- 右端 $x + \Delta x$ でかかる右向きの張力 $\boldsymbol{T}(x + \Delta x)$

- 左端 x でかかる左向きの張力 $-\boldsymbol{T}(x)$
- この部分の質量による下向きの重力 $mg(0,-1)$ (m はこの部分の線の質量)

の 3 つの力がかかることになるが、釣り合って静止している線ではもちろんこれらが釣り合うので、

$$\boldsymbol{T}(x+\Delta x)-\boldsymbol{T}(x)+\rho g\Delta\ell(0,-1)=\mathbf{0} \tag{55}$$

が成り立つことになる。ここで、$\Delta\ell$ はこの部分の線の長さで、ρ の定義より $m=\rho\Delta\ell$ となる。

(55) の両辺を Δx で割って、$\Delta x\to 0$ の極限を考えると、

$$\frac{\Delta\ell}{\Delta x}\approx\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\Delta x}=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

なので、$\Delta x\to 0$ のときに

$$\frac{\Delta\ell}{\Delta x}\to\sqrt{1+(y'(x))^2}$$

となる。一方、(54) より

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta x}\left(\boldsymbol{T}(x+\Delta x)-\boldsymbol{T}(x)\right)\\
&\quad=\ \frac{1}{\Delta x}\left(\alpha(x+\Delta x)-\alpha(x),\alpha(x+\Delta x)y'(x+\Delta x)-\alpha(x)y'(x)\right)\\
&\quad=\ \left(\frac{\alpha(x+\Delta x)-\alpha(x)}{\Delta x},\frac{\alpha(x+\Delta x)y'(x+\Delta x)-\alpha(x)y'(x)}{\Delta x}\right)\\
&\quad\to\ (\alpha'(x),(\alpha(x)y'(x))')=(\alpha'(x),\alpha'(x)y'(x)+\alpha(x)y''(x))
\end{aligned}$$

となるから、結局次の式が成り立つことになる。

$$(\alpha'(x),\alpha'(x)y'(x)+\alpha(x)y''(x))+\rho g\sqrt{1+(y'(x))^2}\,(0,-1)=(0,0) \tag{56}$$

この式 (56) の x 成分は、

$$\alpha'(x)=0$$

を意味するので結局 $\alpha(x)$ は定数であることになり、それを $\alpha_0\,(>0)$ とおけば、(56) の y 成分は

$$\alpha_0 y''(x) - \rho g\sqrt{1+(y'(x))^2} = 0$$

となり、よって懸垂線 $y=y(x)$ の満たすべき常微分方程式

$$y'' = k\sqrt{1+(y')^2} \quad \left(k = \frac{\rho g}{\alpha_0} > 0\right) \tag{57}$$

が得られることになる。

方程式 (57) は 2 階の微分方程式であるから、その一般解は 2 つの任意定数を持つことになるが、それは実は次の式で与えられることが知られている (C_1, C_2 が任意定数)。

$$y = \frac{1}{k}\cosh(kx + C_1) + C_2 \tag{58}$$

方程式 (57) から解 (58) を導くのは容易ではないが[2]、関数 (58) が方程式 (57) を満たすことを確認するのは容易であるので、その計算をしてみよう。

合成関数の微分と (11) を用いて (58) を微分すれば、容易に

$$y' = \sinh(kx + C_1), \quad y'' = k\cosh(kx + C_1)$$

が得られる。よって (5) より、

$$\sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{1+\{\sinh(kx+C_1)\}^2} = \cosh(kx+C_1)$$

となるので、この y が (57) を満たすことがわかる。

(58) は、$y=\cosh x$ のグラフを x 方向、y 方向ともに $1/k$ 倍して平行移動したものであり、よって $y=\cosh x$ も懸垂線の一つであることになる。

[2] $y' = Y$ と置けば、Y の 1 階の変数分離形の微分方程式になり、それも公式 (23) を使えば積分できるので、実はそれほど難しいわけでもない。

10 最後に

本稿では、数学の教科書ではあまり正面から取り上げられることの少ない双曲線関数について考察してきたが、本稿で紹介した以外にも、複素関数としての逆関数の話や、懸垂線以外の応用などもあるだろう。

ただ、私もまともにそれらを取り上げた本をあまり見たことはないので、またこれに関して何か面白い話題があれば、適宜紹介したいと思う。

参考文献

[1] 石原繁、浅野重初「理工系入門 微分積分」(1999)、裳華房

[2] 大槻義彦監修、室谷義昭訳「新数学公式集 I 初等関数」(1991)、丸善