

Poisson 方程式に対する有限要素法の解析超特急

桂田 祐史

2012 年 6 月 26 日, 2012 年 7 月 3 日

1 はじめに

この講義 (桂田 [1]) では、菊地文雄『有限要素法概説』 ([2]) に従って、Poisson 方程式の境界値問題

$$\begin{aligned} (1) \quad & -\Delta u = f \quad (\text{in } \Omega), \\ (2) \quad & u = g_1 \quad (\text{on } \Gamma_1), \\ (3) \quad & \frac{\partial u}{\partial n} = g_2 \quad (\text{on } \Gamma_2) \end{aligned}$$

に対する有限要素法を解説した。やり残したことを簡単に反省してみよう。

- 弱解の存在と一意性を証明していない。
- 弱解の正則性 (微分可能性) を証明していない。弱解が十分な滑らかさを持っていれば、それは真の解であることを示すに止まっている。
- 有限要素解の精度について、「誤差最小の原理」を示すに止まっている。

有限要素解の一意存在については、弱解の一意存在と同じように示すことも出来るが (例えば齊藤 [4])、この講義では、[2] に従い Poisson 方程式の境界値問題の場合には、正值対称行列を係数とする連立 1 次方程式と同値であることを示してあるので、解決済みである。ここでは省略する。

2 弱解について

参考文献としては、菊地 [3] や、Brezis [5] を勧める。

2.1 弱解の一意存在

弱解、すなわち問題 (W) の解 u は一意的に存在する (さらに $\|u\|_V \leq C \|f\|$ が成り立つ—ここで $\|u\|_V := \|\nabla u\| =$ 菊地先生の $\|u\|$)。これはかなりの程度、一般的に扱うことが出来る。

証明は？それは解析の問題、と知らん顔をすることも出来るけれど、有限要素法の場合は「ついでに」説明することが多い。

Hilbert 空間の Riesz の表現定理、あるいは Lax-Milgram の定理、さらにその一般化である Stampacchia の定理 (この名称は一般的ではないかもしれない。Brezis で採用されている名前であるが。) を用いる。

これらの定理は兄弟のようなものである。どれかを使って別の定理を証明したり出来る場合もあるし、「似たようにして証明する」ことも出来る。

定理 2.1 (Riesz の表現定理) H は \mathbf{R} 上の Hilbert 空間、 $F \in H'$ とするとき、 $\exists! u \in H$ s.t.

$$(u, v) = \langle F, v \rangle \quad (v \in H).$$

定理 2.2 (Lax-Milgram の定理) V は \mathbf{R} 上の Hilbert 空間、 $a: V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ は有界双線型形式で、 V で強圧的 (coercive, V-elliptic)、すなわち

$$\exists \mu > 0 \quad \forall v \in V \quad a(v, v) \geq \mu \|v\|^2$$

が成り立つとする。このとき、 $\forall F \in V'$ に対して、 $\exists! u \in V$ s.t.

$$a(u, v) = \langle F, v \rangle \quad (v \in V).$$

さらに a が対称ならば、この u は次のようにも特徴づけられる:

$$u \in V, \quad J(u) = \min_{v \in V} J(v).$$

ただし

$$J(v) := \frac{1}{2} a(v, v) - \langle F, v \rangle \quad (v \in V).$$

定理 2.3 (Stampacchia の定理) V は \mathbf{R} 上の Hilbert 空間、 K は V の空でない閉凸集合とする。 $a: V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ を有界双線型形式で、 K で強圧的 (coercive)、すなわち

$$\exists \mu > 0 \quad \forall v \in K \quad a(v, v) \geq \mu \|v\|^2$$

が成り立つとする。このとき $\forall F \in V'$ に対して、 $\exists! u \in K$ s.t.

$$(\#) \quad \forall v \in K \quad a(u, v - u) \geq \langle F, v - u \rangle.$$

さらに a が対称ならば、この u は次のようにも特徴づけられる:

$$u \in K, \quad J(u) = \min_{v \in K} J(v).$$

ただし

$$J(v) := \frac{1}{2} a(v, v) - \langle F, v \rangle \quad (v \in V).$$

注意 2.4 Stampacchia の定理で、 a が K で強圧的でなくても、

$$\exists \mu > 0 \quad \forall v, v^* \in K \quad a(v - v^*, v - v^*) \geq \mu \|v - v^*\|^2$$

が成り立てば十分である。この条件は、特に $K = u_0 + M$, M は V の閉部分空間とするとき、

$$\exists \mu > 0 \quad \forall v \in M \quad a(v, v) \geq \mu \|v\|^2$$

という条件とも同値である。■

注意 2.5 $K = u_0 + M$, M は V の閉部分空間とするとき、変分不等式 (‡) は、変分方程式

$$\forall v \in K \quad a(u, v - u) = \langle F, v - u \rangle$$

や

$$\forall v \in M \quad a(u, v) = \langle F, v \rangle$$

と同値である。■

例えば、Poisson 方程式の同次 Dirichlet 境界値問題

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

に対して、 $V := H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ on } \Gamma\}$ で、その内積とノルムを

$$(u, v)_V := (\nabla u, \nabla v), \quad \|u\|_V := \sqrt{(u, u)_V}$$

で定義すると (trace についての定理や Poincaré の不等式を用いる)、 u が弱解とは

$$u \in V, \quad (u, v)_V = (f, v) \quad (v \in V)$$

を満たすことになる。この場合、弱解の一意存在は Lax-Milgram の定理で片付く。

2.2 弱解の滑らかさ (微分可能性)

2.2.1 展望

弱解の滑らかさに関しては、Sobolev 空間などの知識が必要になる。

u を Poisson 方程式の境界値問題の弱解とすると、まず定義から $u \in H^1(\Omega)$ である。

楕円型方程式の解の正則性の常識 次に、Poisson 方程式

$$-\Delta u = f$$

を見ると、 $u \in H^{k+2}(\Omega)$ に属していれば、 $f \in H^k(\Omega)$ となることは明らかであるが、条件が整っていれば、逆つまり $f \in H^k(\Omega)$ から $u \in H^{k+2}(\Omega)$ が言える、というのが一つの要点である。この事実はかなり一般の楕円型偏微分方程式について成立する。

Sobolev の埋蔵定理で、普通の意味での滑らかさが導かれる もう一つ大事なことは、Sobolev の意味で十分な階数の微分可能性があれば、普通の意味での滑らかさ (連続性、微分可能性) が導かれるということである (いわゆる Sobolev の埋蔵定理の一つ「 Ω が \mathbf{R}^N の開集合、 $m \in \mathbf{N}$, $1 \leq p \leq \infty$, $m - N/p > 0$ であるとき、 $m - N/p$ より小さい整数のうちで最大のものを n とし、 $\alpha = m - N/p - n$ とする、すなわち $m - N/p = k$, $k = n + \alpha$, $n \in \mathbf{Z}$, $n \geq 0$, $0 < \alpha \leq 1$ とするとき、 $W^{m,p}(\Omega) \subset C^{n,\alpha}(\Omega)$ 」)。

2.2.2 1次元の場合

- $f \in L^2(I)$ ならば $u \in H^2(I)$. これは弱解の定義と $H^2(I)$ の定義による。
- $\forall m \in \mathbf{N}$ について、 $f \in H^m(I)$ ならば $u \in H^{m+2}(I)$.
- $H^m(I) \subset C^{n,\alpha}(I)$ ($m \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$, $0 < \alpha \leq 1$, $n + \alpha \leq m - 1/2$). 特に $H^1(I) \subset C^{0,1/2}(\bar{I})$, $H^2(I) \subset C^{0,1}(\bar{I})$.

2.2.3 2次元の場合

1次元の場合と異なり、領域 Ω について、いわゆる「境界の滑らかさ」が必要になる。

- $k \in \mathbf{Z}$, $k \geq 0$, Ω が C^{k+2} 級の有界領域ならば、 $\forall f \in H^k(\Omega)$ に対して、 $u \in H^{k+2}(\Omega)$, $\|u\|_{H^{k+2}(\Omega)} \leq C_k \|f\|_{H^k(\Omega)}$. 特に Ω が C^2 級ならば、 $f \in L^2(\Omega)$ に対して、 $u \in H^2(\Omega)$.
- Ω が凸多角形領域ならば、 $\forall f \in L^2(\Omega)$ に対して、 $u \in H^2(\Omega)$. (LNM 1341 または Grisvard)
- $H^m(\Omega) \subset C^{n,\alpha}(\bar{\Omega})$ ($m \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$, $0 < \alpha \leq 1$, $n + \alpha \leq m - 2/2$). 特に $H^1(\Omega)$ は $C(\bar{\Omega})$ には含まれないが、 $H^2(\Omega) \subset C^{0,1}(\bar{\Omega})$.

3 有限要素解の誤差評価

あまり一般にやろうとするとまとめるのが難しいので、ここでは Poisson 方程式の同次 Dirichlet 境界値問題を扱うことにする。2次元であれば

$$V := H_0^1(\Omega), \quad \|u\|_V := \|\nabla u\| = \left(\iint_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2) dx dy \right)^{1/2}$$

である。

基礎となるのは証明済みの次の事実

誤差最小の原理

u_h を有限要素解とするとき、

$$\|u - u_h\|_V = \min_{v \in V_h} \|u - v\|_V.$$

(菊地先生の本では $\|\cdot\|_V$ は $\|\cdot\|$ と書いた。)

$\|u - v\|_V$ がある程度具体的に計算できて小さいことを示せるような $v \in V_h$ が見出せれば良いが、ここではいわゆる補間多項式 $u_h = \Pi_h u$ を利用する。

節点の全体を $\{P_i\}_{i=1}^m$ として、区分1次多項式 φ_i で $\varphi_i(P_j) = \delta_{ij}$ を満たすものをとると、 $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ は区分1次多項式全体のなす線形空間の基底になる。

3.1 1次元の場合

$v \in H^1(I)$ は連続関数であるので、

$$\tilde{v}_h(x) = \Pi_h v(x) := \sum_{i=1}^m v(x_i) \varphi_i(x)$$

が意味を持つ。これは区分1次 (P1) 関数であり、 v の Lagrange 補間、線形補間と呼ばれる。

補題 3.1 $\forall v \in H^2(I)$ に対して、

$$\|v - \tilde{v}_h\| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} h^2 \|v''\|, \quad \|v' - \tilde{v}'_h\| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} h \|v''\|.$$

証明は例えば

齊藤宣一『有限要素法と非線形楕円型方程式の解の可視化』¹

の pp. 10–13 に載っている (二つ目の不等式の左辺を $\|v' - \tilde{v}'_h\|_V$ と $\|\cdot\|_V$ で書いてあるけれど、多分誤植でしょう)。

定理 3.2 (有限要素解の誤差評価 (1次元の場合)) $\forall f \in L^2(I)$ に対して、 $\exists! u_h \in V_h$ s.t. u_h は弱解、 $\|u_h\|_V \leq \|f\|$. さらに $\|u - u_h\|_V \leq Ch \|u''\|$, $\|u - u_h\| \leq Ch^2 \|u''\|$.

証明 補題の二つ目の不等式から

$$\|u - u_h\|_V = \|u' - u'_h\| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} h \|u''\|.$$

後半は、Aubin-Nitsche のトリック (別名 duality argument) を用いる。 $e_h := u - u_h$ とおき、

$$(4) \quad (w, v)_V = (e_h, v) \quad (v \in V)$$

を満たす $w \in V$ を求める (この問題を共役な問題と呼ぶそうである)。

$w \in H^2(I)$ かつ $w'' = -e_h$ である。

さらに u_h は u の V_h 射影であるから、 $e_h = u - u_h$ は $\Pi_h w \in V_h$ とは直交している²。すなわち $(e_h, \Pi_h w)_V = 0$ が成り立つ。

¹<http://www.inf-sup.jp/saito/modules/mydownloads/>

² $(u_h, v_h)_V = (f, v_h) = (u, v_h)$ ($v_h \in V_h$ より、 $(u - u_h, v_h)_V = 0$). $u - u_h$ を e_h と書き換えて、 v_h として $\Pi_h w$ をとって、 $(e_h, \Pi_h w)_V = 0$.

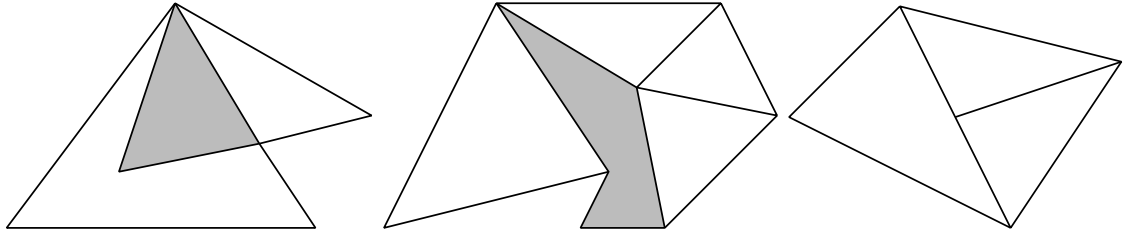


図 1: 重なり, すき間, 頂点が他の要素の边上にある、なんてのはダメ

ゆえに (4) に $v = e_h$ を代入して

$$\begin{aligned} \|e_h\|^2 &= (e_h, e_h) = (w, e_h)_V = (w - \Pi_h w, e_h)_V \leq \|w - \Pi_h w\|_V \|e_h\|_V \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{3}} h \|w''\| \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} h \|u''\| = \frac{4}{3} h^2 \|e_h\| \|u''\|. \end{aligned}$$

両辺を $\|e_h\|$ で割って

$$\|e_h\| \leq \frac{4}{3} h^2 \|u''\|. \blacksquare$$

3.2 2次元の場合

Ω は多角形領域 ($\subset \mathbf{R}^2$), 区分1次多項式による $W = H^1(\Omega)$, $V = H_0^1(\Omega)$ の近似空間 W_h , V_h を導入する。

次の3条件が成り立つように $\bar{\Omega}$ を (閉) 三角形 T の集合 \mathcal{T} に分割する。

- (1) $\bigcup_{T \in \mathcal{T}} T = \bar{\Omega}$
- (2) 任意の異なる二つの三角形は内部を共有しない。
- (3) 任意の三角形の任意の頂点は、他の三角形の頂点としているか、単独で $\bar{\Omega}$ の角をなすかのどちらかである (ある三角形の边上に別の三角形の頂点があることはない)。

$T \in \mathcal{T}$ の直径 ($= \sup_{x, y \in T} |x - y| = T$ の外接円の直径) の最大値を h とおく:

$$h := \max_{T \in \mathcal{T}} h_T.$$

三角形分割 \mathcal{T} を、この h を明示する意味で、 \mathcal{T}_h と書くことが多い。

$H^2(\Omega)$ のセミノルム $|u|_{2,T}$ を次式で定義する:

$$|u|_{2,T} := \left[\iint_T (|u_{xx}|^2 + 2|u_{xy}|^2 + |u_{yy}|^2) dx dy \right]^{1/2}.$$

1次多項式で T の各頂点で u と値が一致するものを Πu と書く。

補題 3.3 (局所補間誤差) T を閉三角形、 $u \in H^2(T)$ とするとき、

$$\|\Pi u - u\|_{L^2(T)} \leq C_1 h_T^2 |u|_{2,T},$$

$$\|\nabla(\Pi u - u)\|_{L^2(T)} \leq C_1 \frac{1}{\sin^2 \theta_T} h_T |u|_{2,T}.$$

ただし $\theta_T := T$ の最小内角. C_1 は T や u に無関係な正定数。

証明 これも齊藤 [4] を見よ。■

この補題はずいぶん細かいことをやっているようだが、実は理由がある。分割の族を扱うと、無限に多くの三角形が対象になるので、一般には、いくらでも小さい θ_T が出て来るような分割の族がありうる。そうなるともともな誤差評価が得られないだろうことは容易に想像出来る。そこで次のような仮定をおくことにする。

定義 3.4 三角形分割の族 $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ が**正則** (regular) とは、

$$(5) \quad \exists \theta_1 > 0 \quad \inf_{\mathcal{T}_h} \min_{T \in \mathcal{T}_h} \theta_T \geq \theta_1.$$

この条件を **Zlámal の最小角条件** と呼ぶ。

同値な条件に

$$(6) \quad \exists \nu_1 > 0 \quad \forall \mathcal{T}_h \in \{\mathcal{T}_h\} \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \quad \frac{h_T}{\rho_T} \leq \nu_1.$$

がある (こちらの条件は、この形のまま3次元の場合に一般することが可能である)。ただし

$$\rho_T := T \text{ の内接円の直径.}$$

定理 3.5 (大域的補間誤差) $\{\mathcal{T}_h\}$ が正則な三角形分割族とするとき、

$$\|\Pi_h u - u\| \leq C_1 h^2 |u|_{2,\Omega} \quad (u \in H^2(\Omega)),$$

$$\|\nabla(\Pi_h u - u)\| \leq \frac{C_1}{\sin^2 \theta_1} h |u|_{2,\Omega} \quad (u \in H^2(\Omega)).$$

ここで C_1 は補題 3.3 中に現れる正定数である。

証明 これも齊藤 [4] を見よ。■

定理 3.6 (H^1 誤差評価) Ω は凸多角形領域、 $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ を Ω の正則な三角形分割の族とする。 $u \in V$ を弱解、 \mathcal{T}_h の連続な区分1次多項式で境界で0になるもの全体を V_h 、 $u_h \in V_h$ を有限要素解とすると、

$$\|u - u_h\|_V \leq C h |u|_{H^2(\Omega)}.$$

ただし $C = C(\theta_1, \Omega) > 0$.

証明 誤差最小の原理から、 $\forall v_h \in V_h$ に対して、

$$\|u - u_h\|_V \leq \|u - v_h\|_V.$$

v_h として $\Pi_h u$ を代入すると、

$$\|u - u_h\|_V \leq \|u - \Pi_h u\|_V \leq C(\theta_1, \Omega)h |u|_{2,\Omega}.$$

ゆえに

$$\|u - u_h\|_V \leq C(\theta_1, \Omega)h |u|_{2,\Omega}. \blacksquare$$

定理 3.7 (L^2 誤差評価) 定理 3.6 と同じ仮定のもとで

$$\|u - u_h\| \leq C'h^2 |u|_{H^2(\Omega)}.$$

証明 定理 3.2 の後半の証明と同様である。■

3.3 まとめ

- H^1 誤差評価については
 - 1次元の証明は、誤差最小の原理+補間関数の局所的な誤差
 - 2次元の証明は、誤差最小の原理+補間関数の局所的な誤差+分割の正則性から導かれる大域的な誤差評価
- L^2 誤差評価は、 H^1 誤差評価よりも h の冪が1高い評価が得られる (Aubin-Nitsche のトリックによる)

文献案内

菊地 [2] は最良の入門書である。非数学科向けに書かれているのと思うが、数学科の学生にとっても、有限要素法は、まずこの本の内容をマスターすることから始めるべきであると信じる。数学的理論を解説した菊地 [3] は、和書では貴重な存在であるが、残念ながらこの文章を書いている現在絶版である。齊藤宣一先生は、あちこちの大学で数値解析 (+数値計算) の集中講義を担当されているが、その講義ノートは貴重な資料である (書籍では紙数の制限のために省略されているような事項の説明が、きちんとされていることが多く、大変ありがたい)。この文書の範囲で言うと、齊藤 [4] が頼れる資料である。

参考文献

- [1] 桂田祐史, ポアソン方程式に対する有限要素法, <http://www.math.meiji.ac.jp/%7Emk/labo/text/members/fem.pdf> (2001~).
これは菊地 [2] の読書ノートの性格が強いので、一般公開はしていません。

- [2] 菊地文雄, 有限要素法概説, サイエンス社 (1980, 新訂版 1999).
- [3] 菊地文雄, 有限要素法の数理, 培風館 (1994).
- [4] 齊藤宣一, 有限要素法と非線形楕円型方程式の解の可視化, <http://www.infsup.jp/saito/modules/mydownloads/> から入手可能。
- [5] H. Brezis 著, 藤田 宏, 小西 芳雄 訳, 関数解析, 産業図書 (1988).